

**SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA****XVIII CONGRESO CHILENO DE HIDRAULICA****UNA APROXIMACIÓN CONCEPTUAL A LA MODELACIÓN DEL TRANSPORTE DE CONTAMINANTES EN SISTEMAS AGROHIDROLÓGICOS**

**DIEGO RIVERA S.<sup>1</sup>**  
**JOSÉ LUIS ARUMÍ R.<sup>2</sup>**  
**EDUARDO HOLZAPFEL H<sup>3</sup>**

**RESUMEN**

El efecto de la interacción entre el agua superficial, el agua subterránea y el agua de riego en la distribución espacial y temporal de los polutos dentro del valle, y el efecto de cambios en los patrones de recarga dentro del valle sobre los niveles de calidad y productividad de los cultivos requieren de una herramienta numérica que permita resolver la ecuación de Richards y la ecuación Advección-Difusión-Reacción en flujo variablemente saturado simultáneamente para agua superficial y subterránea, incluyendo condiciones de borde variables en tiempo y espacio. Este artículo presenta el desarrollo conceptual de un modelo de transporte de contaminantes aplicando un enfoque 2,5-dimensional que permita la modelación de un sistema agro-hidrológico en mesoescala. El esquema de modelación propuesto utiliza una herramienta numérica avanzada, i.e. Volúmenes Finitos, en la solución de la ecuación Advección-Difusión-Reacción e incluye el diseño de los sistemas de monitoreo en la conceptualización del modelo. El modelo numérico es considerado como una herramienta (un laboratorio virtual) que permitirá el diseño eficiente, técnica y económicamente, de sistemas de monitoreo y estrategias de manejo, además de la definición y testeo de hipótesis alternativas que permitan generar conocimiento respecto procesos y funciones dentro del sistema agro-hidrológico.

---

<sup>1</sup> Profesor Asistente, Departamento de Recursos Hídricos, Universidad de Concepción, Chillán [dirivera@udec.cl](mailto:dirivera@udec.cl)

<sup>2</sup> Profesor Asociado, Departamento de Recursos Hídricos, Universidad de Concepción, Chillán

<sup>3</sup> Profesor Titular, Departamento de Recursos Hídricos, Universidad de Concepción, Chillán

## INTRODUCCIÓN

La preservación de la calidad del agua, el manejo adecuado de los sistemas de riego y la generación de estrategias de monitoreo y planificación son componentes esenciales para la sustentabilidad técnica, económica, social y ambiental de la agricultura. Por otro lado, considerando el incremento en la demanda de agua, la mejora en la toma de decisiones requiere de mejores modelos (Beven, 2001), que permitan generar un mejor entendimiento de los sistemas hidrológicos y contribuyan al diseño de sistemas de monitoreo y testeo de hipótesis (Kang & Lin, 2007).

La interacción entre la actividad agrícola y el sistema hidrológico (calidad, cantidad y distribución de los recursos hídricos) es apreciable a meso-escala. Ejemplos de estos fenómenos son el efecto de las filtraciones desde las redes de canales de distribución de aguas de riego, el almacenamiento de polutos en las zonas vadosa y ribereña (Sophocleous, 2002), las zonas de almacenamiento transitorio y el movimiento de polutos bajo zonas regadas (Böhlke, 2002). La modelación en meso-escala no implica el refinamiento de mallados o la aplicación distribuida de modelos locales, sino una conceptualización que integre los diferentes escalas espacio-temporales de los procesos hidrológicos y las prácticas de manejo. Por lo tanto, es posible señalar que la evaluación del impacto de la actividad agrícola en el ambiente, requiere de herramientas de modelación integradas que consideren desde su conceptualización las características de los agroecosistemas, la simulación de la interacción entre los sistemas de aguas superficiales y subterráneas y el movimiento de agua en el sistema agro-hidrológico (Wroblecky *et al.*, 1998).

Sophocleous (2002) desarrolló un marco teórico y conceptual que establece que los procesos de transferencia de masa y energía determinan las zonas de recarga-descarga dentro del sistema y determinan condiciones para la mantención de ecosistemas y cultivos (Winter, 1999; Wroblecky *et al.*, 1998). De esta manera, el patrón espacial y temporal del flujo de aguas establece una serie de restricciones que condicionan el potencial productivo de una zona a través de la interacción con el agua superficial y agua de riego. Como ejemplo de lo anterior, los resultados del proyecto FONDEF *Tecnologías de Manejo de Agua para una Agricultura Intensiva Sustentable*, muestran una dependencia del nivel productivo en el valle de Peumo respecto a la situación hidrológica e hidrogeológica actual, por lo que se requieren análisis integrados de la gestión y planificación del riego, de la aplicación de la normativa, de las posibles modificaciones de infraestructura y del manejo agronómico de los cultivos. La aplicación de este marco conceptual ha permitido analizar, por ejemplo, las implicancias de las filtraciones desde los canales de riego en la asignación de derechos de aprovechamiento de aguas subterráneas, los cambios en los patrones de flujo y recarga y el uso eficiente del agua en el predio. Las decisiones de planificación en el valle de Peumo deben evaluarse sistemáticamente, considerándolo como un continuo y no como diferentes sistemas aislados.

Este movimiento del agua en el continuo hidrológico puede ser representado a través de una serie de ecuaciones y relaciones constitutivas, que permitan estimar el campo de velocidades del flujo de agua en la zona radicular, no-saturada y zona saturada (acuífero). Para estudiar el transporte de polutos, es posible aplicar la ecuación Advección-Difusión-Reacción para el transporte pasivo y reactivo de contaminantes en acuíferos (Ewing *et al.*, 2000). La ecuación de transporte es función del campo de velocidades, de las propiedades del medio y las características del contaminante. Sin embargo, los modelos de transporte de contaminantes en la actualidad son aplicables a

escalas regionales o locales. Como ejemplo, a escala regional, MODFLOW (McDonald & Harbaugh, 1988) presenta problemas para simular procesos en las cercanías de las fronteras del dominio y en las interfaces, donde generalmente existe intercambio entre el sistema agrícola y el ambiente (Sophocleous, 2002; Wroblecky *et al.*, 1998); por otro lado, HYDRUS 2D (Simunek *et al.*, 1999) simula el movimiento de agua y polutos usando elementos finitos en una escala local, aplicable a, por ejemplo, el diseño de equipos de riego por goteo y movimiento de nitrato en la columna de suelo, pero no incluye procesos de interacción con las aguas superficiales, aunque pueden agregarse sólo como condiciones de borde.

Por lo tanto, el efecto de la interacción entre el agua superficial, el agua subterránea y el agua de riego en la distribución espacial y temporal de los polutos dentro del valle, y el efecto de cambios en los patrones de recarga dentro del valle sobre los niveles de calidad y productividad de los cultivos (Böhlke, 2002), requieren de una herramienta numérica que permita resolver la ecuación de Richards y ecuación Advección-Difusión-Reacción en flujo variablemente saturado simultáneamente para agua superficial y subterránea, incluyendo condiciones de borde variables en tiempo y espacio. Una vez encontrado el campo de velocidades en el dominio estudiado es posible aplicar la ecuación de transporte de solutos para estudiar los polutos que son transportados y transformados dentro del área en estudio (e.g. VanderKwaak, 1999; Farthing *et al.*, 2002; Bertolazzi & Manzini, 2004a).

De esta manera, este artículo presenta el desarrollo conceptual de un modelo de transporte de contaminantes aplicando un enfoque 2,5-dimensional que permita la modelación de un sistema agro-hidrológico en mesoescala. El esquema de modelación propuesto utiliza una herramienta numérica avanzada, i.e. Volúmenes Finitos, en la solución de la ecuación Advección-Difusión-Reacción e incluye el diseño de los sistemas de monitoreo en la conceptualización del modelo. El modelo numérico es considerado como una herramienta (un laboratorio virtual) que permitirá el diseño eficiente, técnica y económicamente, de sistemas de monitoreo y estrategias de manejo, además de la definición y testeo de hipótesis alternativas (Sivapalan, 2005; Beven, 2001) que permitan generar conocimiento respecto procesos y funciones dentro del sistema agro-hidrológico.

## **ESTADO DEL ARTE**

### ***Discretización de Leyes de Conservación usando el Método de los Volúmenes Finitos***

El Método de los Volúmenes Finitos (FVM) es un método de discretización adecuado para la simulación numérica de leyes de conservación, que ha sido ampliamente utilizado en campos de ingeniería como la mecánica de fluidos, transferencia de masa y calor o ingeniería del petróleo. Sus principales ventajas radican en que puede ser aplicado en mallas estructuradas y no-estructuradas en geometrías arbitrarias y que los esquemas obtenidos son robustos y poseen la propiedad de conservación local (Eymard *et al.*, 1997; Barth & Ohlberger, 2004). La propiedad de conservación permite que el FVM sea atractivo en problemas donde los flujos, y por ende la conservación (Morton *et al.*, 1997), son importantes. El FEM conserva los flujos de manera aproximada con un límite asintótico cuando el tamaño de la malla tiende a cero, pero esto es una desventaja cuando el objetivo es modelar geometrías complejas y pasos de integración temporal pequeños. El FVM es local y exactamente conservativo (Ewing *et al.*, 2000, Mishev, 1996), ya que está basado en el balance para cada celda discretizada (Volumen de Control).

Este método se encuentra entre el Método de las Diferencias Finitas (FDM) y el Método de los Elementos Finitos (FEM): tiene las ventajas del FEM para trabajar en geometrías complejas del dominio y condiciones de borde complicadas, y la simplicidad de implementación del FDM (Ewing *et al.*, 2002). El Método de los Volúmenes Finitos, es una herramienta que permite resolver numéricamente ecuaciones basadas en leyes de conservación, como la ecuación de Richards, la Ecuación ADR o el acople de sistemas de leyes de conservación. Es aplicable además en problemas con altos gradientes, como en la zona hiporreica, o discontinuidades (problemas de Riemann) en, por ejemplo, suelos estratificados. Las bases matemáticas de la aproximación de volúmenes finitos en problemas de conservación pueden consultarse en (las referencias son sólo indicativas) Eymard *et al.* (1997), Barth & Ohlberger (2004), Mishev (1996) y Cai *et al.* (1991).

Los esquemas numéricos de solución de la derivada temporal para el estado transiente, se basan principalmente en esquemas de Euler explícitos e implícitos. Desde el trabajo de Celia *et al.* (1990), el uso de series de Taylor en la expansión de la derivada temporal en un esquema iterativo de Picard, se ha convertido en un estándar dadas sus propiedades de conservación de masa. Algunos esquemas alternativos o modificaciones pueden encontrarse en Binning (1994), VanderKwaak (1999), Mazzia *et al.* (2000), Farthing *et al.* (2002), Farthing & Miller (2001), Eymard *et al.* (1997) y Barth & Ohlberger (2004). Una extensa revisión sobre métodos numéricos para problemas de advección-difusión dependientes del tiempo puede consultarse en Ewing & Wang (2001). Respecto a la discretización espacial, el FVM es altamente flexible en la definición de los VC. En el caso de los FVM centrados en la celda (*cell-centered*), el triángulo es el VC y las incógnitas son almacenadas en, por ejemplo, el baricentro. En el caso de los FVM centrados en el vértice (*vertex-centered*), el volumen de control se construye a través de una malla dual, como por ejemplo diagramas de Voronoï (conocidos como Polígonos de Thiessen en hidrología) donde las incógnitas son almacenadas en cada vértice del triángulo.

Los enfoques actuales se orientan al desarrollo de matemáticas avanzadas en la aplicación de aproximaciones de volúmenes finitos de ecuaciones diferenciales parciales (e.g Eymard *et al.*, 2006). Las aplicaciones a los fenómenos de flujo de agua en medio poroso variablemente saturado y transporte de contaminantes en medios porosos son académicas, principalmente 2-dimensionales en problemas específicos para verificar funcionamiento (eg. Bertolazi & Manzini 2004a; Manzini & Ferraris, 2004). Los modelos son aplicados en problemas donde el campo de velocidades es conocido, generalmente en flujo saturado en medio poroso, por lo que es necesario aplicar modelos que incorporen el flujo en la zona vadosa, que es un almacenamiento natural y transitorio de agua y polutos.

### ***Modelación matemática de la interacción entre aguas superficiales y subterráneas***

Los modelos de aguas subterráneas de escala regional, generalmente representan los cauces como fronteras del dominio (e.g. McDonald & Harbaugh, 1988; Sophocleous, 2002). En el caso de problemas de interacción agua superficial-agua subterránea, las aguas superficiales se consideran como fuentes distribuidas con flujos y cargas contaminantes conocidas (e.g. Russo *et al.*, 2001; Gardener, 1999). La interacción entre aguas superficiales y subterráneas o agua superficial y de riego han sido estudiadas con detención y detalle, pero el desarrollo de modelos hidrológicos integrados se ha visto frenado por los problemas de no linealidad de las ecuaciones constituyentes y escalamiento y estimación de parámetros (Moench, 2003).

La frontera en la investigación de la interacción entre aguas superficiales y aguas subterráneas está en el análisis acoplado y cuantificación del flujo de agua, solutos y energía en y cerca de los cauces de aguas superficiales, integrando modelos hidrológicos con modelos biogeoquímicos, con lo cual sea posible evaluar la estructura ecológica y el manejo de los agroecosistemas. En la interface entre los continuos de agua superficial y agua subterránea (zona hiporreica), se desarrollan los procesos biogeoquímicos que cumplen un importante rol en calidad del agua que es transferida. Por ejemplo, la desnitrificación es uno de los principales procesos de remoción de nitrógeno, en conjunto con la dilución con aguas subterráneas, por lo que el estudio de estos procesos y su relación con la hidrología de la cuenca y patrones de flujo del agua subterránea permite conocer la dinámica de estos flujos (Cey *et al.*, 1999; Cirno & McDonnell, 1997). La zona ribereña actúa como filtro y almacenamiento natural de nitratos que han sido producidos en zonas altas de cultivo y que pueden alcanzar el agua subterránea. Estas zonas actúan como amortiguadores del flujo, aumentando el tiempo de residencia de los polutos en la zona vadosa Hantush & Mariño (2001).

Existe una extensa literatura respecto a modelos de interacción de las aguas subterráneas (GW) y aguas superficiales (SW). Puede mencionarse el modelo de agua subterráneas MODFLOW (McDonald & Harbaugh, 1998), la extensión de MODFLOW para aguas superficiales BRANCH (Schaffranek, 1987) y la interface MODBRANCH (Swain & Wexler, 1996); el modelo MODFLOW-SURFANCT 3D (HydroGeologic Inc., 1998), el modelo MODFLOW-What (Watershed Hydrology and Transport) desarrollado por Thoms (2003) o el trabajo de Osman & Bruen (2002) que mejora la formulación matemática de fuentes de recarga de acuífero debido pérdidas desde cauces. Respecto a modelos que consideran explícitamente la interacción GW-SW, puede mencionarse el modelo System Hydrologique Européen (SHE; Abbott *et al.*, 1986), el modelo acoplado de análisis de interacción GW-SW Adaptive Hydrology Model (ADH; Schimdt & Roig, 1997; citado por Hussein & Schwartz, 2003), el modelo InHM (Integrated Hydrology Model) desarrollado por VanderKwaak (1999), el modelo FTSTREAM (Hussein & Schwartz, 2003), el modelo tRIBS (Ivanov *et al.*, 2004) y el modelo PARFLOW (Kollet & Maxwell, 2006).

Sin embargo, los modelos citados, no incluyen en su conceptualización los problemas de mesoescala planteados por la actividad agrícola, no es posible acceder a los códigos fuente en la mayoría de los casos y no es posible realizar análisis de error. Los softwares en general, permiten realizar análisis de sensibilidad de las salidas de las simulaciones respecto a los parámetros de entrada, pero no permiten realizar investigaciones rigurosas de los estimadores de error de la formulación codificada.

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### *Interacción entre sistemas de aguas subterráneas, superficiales y de riego*

Existen dos diferentes aproximaciones numéricas para los modelos acoplados de GW y SW. Los modelos completamente acoplados (e.g. VanderKwaak, 1999) consideran ensamblar las ecuaciones de flujo variablemente saturado (Ecuación de Richards) y flujo en canales abiertos (Ecuación de Chèzy-Manning, Ecuación de aproximación de onda cinemática, Ecuaciones de Saint Venant) en una misma matriz global y resolverlas simultáneamente en cada paso de tiempo. Esta aproximación es robusta y menos susceptible a oscilaciones numéricas y errores en el balance de masa, pero no considera las diferencias en las escalas de tiempo, por lo cual el estudio

del transiente implica considerar pasos de tiempo pequeños. El acople de los flujos superficial y subsuperficial es logrado ensamblando y resolviendo un sistema discreto de ecuaciones discretas de balance, donde los flujos de agua y solutos son determinados como parte la solución. La segunda aproximación al problema (e.g. Hussein & Schwartz, 2003; Perkins & Koussis, 1996; Niazi, 2000) considera resolver las ecuaciones de ambos continuos, ecuación de propagación de la onda para aguas superficiales y ecuación de flujo saturado y variablemente saturado para aguas subterráneas, de manera independiente y actualizar continuamente los flujos entre continuos para mantener el balance de masa.

En la mayoría de los modelos disponibles, el vínculo entre el agua superficial y el agua subterránea es el flujo desde el fondo de cauce naturales o canales no revestidos. En general, los modelos de interacción consideran el flujo desde el fondo de canal es una condición de borde (Dirichlet, Neumann o Robin) que es incluida en el modelo de flujo (saturado, no saturado, variablemente saturado) como en Swain & Wexler (1996), o bien se aplican métodos numéricos que consideren el flujo desde el cauce como una incógnita en el sistema a resolver (VanderKwaak, 1999).

#### *Ecuación Advección-Difusión-Reacción y Ecuación de Richards*

Los modelos macroscópicos de transporte de solutos en medio poroso son usualmente descritos por la ecuación Advección-Difusión-Reacción (ADR):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v} \cdot c - \mathbf{D} \cdot \nabla c) = S, \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}^N \quad (1)$$

donde  $\Omega$  corresponde al dominio espacial,  $c(\mathbf{x},t)$  corresponde a la distribución espacio temporal de un contaminante debido al transporte pasivo en el campo de velocidades  $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$  (transporte advectivo),  $\mathbf{D}(\mathbf{x},t)$  es el tensor de difusión (Transporte difusivo) y  $S(\mathbf{x},t)$  corresponde al término fuente. El problema queda definido si se incluyen las condiciones iniciales  $c(\mathbf{x},t) = c_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  y las condiciones de borde tipo Dirichlet  $c = g^D(\mathbf{x},t)$  y Neumann  $D\nabla c \cdot \mathbf{n} = g^N(\mathbf{x},t)$  especificadas en la frontera  $\partial\Omega$ . Esta ecuación es altamente no lineal debido a los problemas de escala del tensor de difusión (Eymard *et al.*, 1997; Ewing *et al.*, 2000; Bertolazzi & Manzini 2004a,b; Mishev, 1996; Mishev, 1998; Eymard *et al.*, 2004). Generalmente, esta ecuación es discretizada aplicando técnicas de separación de las componentes advectiva y difusiva de la ecuación, ya que el frente de movimiento de polutos poseen fuertes gradientes que dificultan la aplicación de técnicas como diferencias finitas o elementos finitos.

El campo de velocidades necesario en (1), puede ser estimado resolviendo la ecuación de Richards que describe el flujo de agua en un medio poroso variablemente saturado (Richards, 1931; Clement *et al.*, 1994):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla[\mathbf{K}(\phi)] \cdot \nabla(\phi + z) = s, \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}^N \quad (2)$$

donde  $\Omega$  corresponde al dominio computacional,  $\phi(\mathbf{x},t)$  corresponde a la distribución espacio-temporal de la carga de presión,  $\theta(\mathbf{x},t)$  es el contenido de humedad del suelo,  $z$  es la coordenada vertical definida positiva hacia abajo,  $\mathbf{K}(\mathbf{x},t)$  es el tensor de conductividad hidráulica y  $s(\mathbf{x},t)$  corresponde al término fuente. El problema queda definido si se incluyen las condiciones iniciales  $\phi(\mathbf{x},t) = \phi_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  y las condiciones de borde tipo Dirichlet  $\phi = g_D(\mathbf{x},t)$  y Neumann  $\mathbf{K}\nabla(\phi + z) \cdot \mathbf{n} = g_N(\mathbf{x},t)$  especificadas en la frontera  $\partial\Omega$ .

Los modelos de agua subterránea resuelven de una u otra manera la ecuación (2), ya sea a través de métodos numéricos, analíticos o semi analíticos. Esta ecuación también es válida en el caso del estudio del movimiento del agua en la zona vadosa, que es el vínculo entre el agua superficial y el agua subterránea, y es determinante en la dinámica del agua subterránea.

### ***Solución numérica de la Ecuación ADR y de la Ecuación de Richards***

La principal dificultad en la solución numérica de la ecuación de Richards para flujo en medio variablemente saturado dice relación con las inestabilidades que se generan al resolver los sistemas no lineales de ecuaciones, dadas las características no-lineales de las ecuaciones constitutivas  $\mathbf{K}(\varphi)$  y  $\theta(\varphi)$ . Otra dificultad es definir la posición adecuada de las condiciones de borde móviles, como la posición del nivel freático en un problema de flujo vertical hacia un acuífero no confinado (Eralingga, 2004, Simpson & Clement, 2003). Celia *et al.* (1990) demuestran que la forma mixta de la ecuación de Richards, donde la derivada temporal es función de la humedad y las derivadas espaciales son función de la carga de presión, posee las ventajas de las formulaciones basadas en carga de presión y basadas en contenido de humedad. Actualmente, los métodos numéricos permiten obtener soluciones de la ecuación de Richards con relativa eficiencia, permitiendo solucionar sistemas de ecuaciones no lineales acoplados en tiempo y espacio. La forma de solucionar la ecuación de Richards, ya sea usando el método de los elementos finitos o de las Diferencias Finitas ha dado paso a esquemas de solución mixtos, con algoritmos de solución más eficientes y que aprovechan las ventajas de diferentes formulaciones para la ecuación de Richards y las condiciones de borde existentes dentro de un sistema hidrológico. Respeto a las discretizaciones espaciales, las mallas estructuradas se asocian generalmente al FDM, mientras que para dominios y mallas no-estructuradas se asocian el FEM

A partir del trabajo de Celia *et al.* (1990) se realizan investigaciones numéricas respecto al uso de MEF o FDM y las ventajas de utilizar una formulación mixta de la ecuación de Richards y un esquema iterativo de Picard para la solución de la derivada temporal, que disminuye el error del balance de masa. Este trabajo identifica dos problemas como principales en la solución de la ecuación de Richards: la forma de la ecuación que determina la discretización y el balance de masa, y el tratamiento de la derivada temporal. La elección de uno u otro método depende principalmente de las capacidades y elección del modelador, y variabilidad en el dominio espacio-temporal de los parámetros y condiciones de borde (Simpson & Clement, 2003).

Los trabajos de Bertolazzi & Manzini (2004a,b,c,d) son un ejemplo de aplicación del método de los volúmenes finitos a problemas de transporte de contaminantes dentro de un medio poroso, al igual que Eymard *et al.* (2004), Ewing *et al.* (2000), Morton *et al.* (1997) y Cai *et al.* (1991), entre otros. La aplicación del Método de los Volúmenes Finitos a problemas de flujo en medio poroso pueden encontrarse en Mishev (1996) con una formulación de la ecuación de Richards en dos fases (aire y agua), Eymard *et al.* (1997) con un detallado planteamiento matemático, VanderKwaak (1999) aplicando el método del elemento de volumen de control, Eralingga (2004) y Manzini & Ferraris (2004)b en mallas no estructuradas. Sin embargo, los trabajos sobre la aplicación de estos métodos en la ecuación de Richards y su comprobación con datos de terreno son recientes. Los trabajos de Joel VanderKwaak son pioneros en la comprobación de campo (e.g. Loague *et al.*, 2005; Loague & VanderKwaak, 2004; VanderKwaak & Loague, 2001; VanderKwaak & Sudicky, 2000).

## MODELACIÓN DE UN SISTEMA HIDROLÓGICO ACOPLADO MEDIANTE UN ENFOQUE 2,5-DIMENSIONAL

El enfoque 2,5-dimensional (rivera, 2006) integra conocimientos y técnicas de modelación que no han sido aplicadas en conjunto y, en lo esencial, incluye desde la conceptualización del problema las características de los sistemas agrícolas y de los sistemas de monitoreo. En lo numérico el uso del de una aproximación en volúmenes finitos de la ecuación de Richards en una serie de mallas triangulares ortogonales que consideran una serie de puntos de control, coincidentes con los puntos de monitoreo. Las condiciones de borde para el modelo numérico son calculadas usando un enfoque que utiliza variables medibles en terreno, que permite resolver el problema de flujo en suelos no homogéneos, ya que la función constitutiva aplicada en cada volumen de control de manera independiente; permite además utilizar diferentes funciones de contenido de humedad dentro del dominio, ya que la aproximación en volúmenes finitos es independiente de la forma de estas funciones.

Sea  $M$  el número de planos, no necesariamente equi-espaciados, en los ejes  $X$  e  $Y$  y considérese el plano  $X$  como principal de flujo. Para cada malla  $m$  se resuelve la formulación en volúmenes finitos de la ecuación de Richards (RFV), resultando el vector  $\mathbf{f}^X$ . Luego, los valores en los puntos de control se aplican como condiciones de borde Dirichlet y se resuelven cada una de las  $M$ -mallas en el plano  $Y$ . De esta manera, los valores obtenidos pueden considerarse como *interpoladores* entre cada uno de los planos  $X$ . El proceso se repite considerando como eje principal de flujo el eje  $Y$ , con lo que se construye el vector  $\mathbf{f}^Y$ . Este planteamiento tiene por objeto incluir la naturaleza 3-dimensional del sistema modelado usando ecuaciones 2-dimensionales. Debido a que el vector de flujo en campo no tiene una orientación sólo definida por uno de los ejes, es necesario reconstruir el vector  $\mathbf{f}(\mathbf{f}^X, \mathbf{f}^Y)$  mediante algún método o algoritmo.

Si se considera que los vectores  $\mathbf{f}^{X,Y}$  están orientados en un sistema ortogonal, puede asumirse que son correspondientes con la base del espacio, con lo cual el vector total puede calcularse como una combinación lineal de los vectores  $\mathbf{f}^{X,Y}$ , tal que  $\varphi = \sum_i w_i \cdot \varphi^i$ ,  $i = X, Y$ . Sin embargo, es necesario definir los pesos  $w_i$ , para lo cual se propone incluir series de datos obtenidas en terreno en los puntos de control. Para estimar estos pesos se aplica una función cuadrática que minimice la diferencia entre los datos simulados y los datos medidos  $\{\varphi_k^P\}$ . El conjunto de datos de campo no posee un valor de verdad absoluto, por lo cual debe aplicarse un proceso de comparación tal que se aplique una cota de error a la diferencia:

$$e_\beta = \|\varphi^P - \varphi^\beta\| \leq E_\beta \quad (3)$$

Las cotas de error  $E_\beta$   $\beta=X,Y$ , son contexto dependientes. Si  $e_\beta$  es mayor a la cota de error, entonces es necesario revisar el modelo numérico y/o revisar el sistema de monitoreo. Si los errores son menores que la cota de error, puede considerarse que la función de error para el sistema es aplicable.

Matemáticamente, en un dominio  $\Omega$ , 2-dimensional, se considera un sistema coordenado ortogonal, tal que el eje  $Z$  corresponda a una distancia vertical, positiva hacia arriba. En el



dominio  $\Omega$  del medio poroso, se considera aplicable la ecuación de Richards. Además, dentro del dominio  $\Omega$  son conocidas las propiedades hidráulicas del medio y las condiciones de borde, tal que pueden definirse las funciones:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla[\mathbf{K}(\varphi) + \nabla(\varphi + z)] = S \quad (4a)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = g_k(\mathbf{x}, t), \text{ en } \Omega, t > 0 \quad (4b)$$

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = g^D(\mathbf{x}, t), \text{ en } \Gamma^D, t > 0 \quad (4c)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla(\varphi + z) = g^N(\mathbf{x}, t), \text{ en } \Gamma^N, t > 0 \quad (4d)$$

donde  $g_k(\mathbf{x}, t)$  corresponde a la función que describe la variación espacial y temporal de la conductividad hidráulica,  $g^D(\mathbf{x}, t)$  es la función que describe la variación espacial y temporal de las condiciones de borde de Dirichlet) y  $g^N(\mathbf{x}, t)$  es la función que describe la variación espacial y temporal de las condiciones de borde de Neumann. Todas son funciones suaves, continuas por tramos dentro de un subdominio  $\Omega_i$ , donde  $\partial\Omega$  corresponde a la frontera de  $\Omega$ , tal que:

$$\Gamma^N \cup \Gamma^D = \partial\Omega \quad (5a)$$

$$\Gamma^N \cap \Gamma^D = \{ \} \quad (5b)$$

La primera condición implica que en la frontera pueden encontrarse tres tipos de condiciones de borde: flujo, tensión o ninguna, lo que implica que ambos conjuntos pueden existir nodos sin condiciones de borde. La segunda condición establece que para un nodo específico sólo se pueden encontrar condiciones de Dirichlet o Neumann.

Se considera un conjunto  $T = \{T_i\}; i = 1, \dots, N_T$  de triángulos cuasi-Delaunay, con coordenadas  $\mathbf{x}_i$  para su centroide, que forman una grilla 2-dimensional tal que  $\bigcup_{i=1}^N T_i \cong \Omega, T_i \cap T_j = e_{ij}, \forall i \neq j$ , donde  $e_{ij}$  corresponde al segmento compartido por los triángulos  $T_i$  y  $T_j$ . Considérese el conjunto  $V = \{V_i\}$  formado por los vértices de la grilla triangular y sea  $P = \{P_i\} = \{P(\mathbf{x}_{pl})\}$  un conjunto de puntos tal que  $P \subseteq V$ . Se definen los elementos de  $P$  como puntos de control  $N_C, N_C < N_T$  de mallado, en un arreglo rectangular tridimensional que restringe el mallado Delaunay, es decir, los puntos  $\mathbf{x}_{pl}$  deben corresponder a centroides de los elementos  $\{T_i\}$ . Se definen como  $T^\alpha = \{T_m^\alpha\}, \alpha = X, Y, Z$  las triangulaciones 2-dimensional en los planos Y-Z, X-Z y X-Y, respectivamente (figura 3), que para los planos verticales deben cumplir  $V^X \cap V^Y = P$ .

Si en cada  $T_i^\alpha$  se aplica una formulación en volúmenes finitos de la ecuación de Richards, se define una modelación en 2,5-dimensional al procedimiento en el cual se modela un dominio 3-dimensional utilizando ecuaciones discretas 2-dimensionales según:

**I.** Dado el vector de presiones en el suelo para el paso de tiempo  $n$ -ésimo paso de tiempo,  $j^n$ , se utiliza un esquema iterativo de Picard para estudiar el transiente. Este esquema considera una solución implícita en tiempo y una expansión en Serie de Taylor para la variación temporal del contenido de humedad en la Ecuación de Richards donde se resuelve el sistema de ecuaciones  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}^t = \mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(j^t)$  es una matriz de coeficientes que almacenan las características

geométricas, hidráulicas y la condición de tensión del suelo,  $\mathbf{j} = \{\varphi_i^{n+1,m+1}\}$  es el vector de presiones a encontrar y  $\mathbf{b} = \{b_i\}$  es el vector forzante determinado por las condiciones de borde. Además,  $n$  es el paso de tiempo y  $m$  es el  $m$ -ésimo nivel iterativo de Picard. Una alternativa es utilizar esquemas adaptativos, en los cuales el factor  $\omega$  controla el peso de las soluciones implícitas y explícitas. La ventaja de este método se basa en que las soluciones transientes cercanas al estado estacionario dependen en menor grado de los estados anteriores, aumentando la eficiencia en la solución. La formulación es:

$$\{\varphi_i\}^{n+1,m+1} = (1 - \omega) \cdot \{\varphi_i\}^n + \omega \cdot \{\varphi_i\}^{n+1,m+1} \quad (6)$$

**II.** Para cada  $T_m^X$ , considerando que el plano Y-Z es el principal de flujo, se resuelve el sistema de ecuaciones para el tiempo  $n$ , encontrándose los valores de  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{?}(\mathbf{f})$  en  $V^X \cup \mathbf{x}_i \in T_m^X$ , es decir, vértices y centroides.

**III.** Conocidos los valores de  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{?}(\mathbf{f})$  en  $T_m^X$ , se utilizan los valores de  $\varphi \in P$  que serán utilizados como condiciones de borde internas y externas para encontrar los valores de  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{?}(\mathbf{f})$  en  $V^Y \cup \mathbf{x}_i \in T_m^Y$ .

**IV.** Conocidos de  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{?}(\mathbf{f})$  en  $\forall T_m^Z$ , se resuelven las ecuaciones discretas para determinar los flujos verticales entre prismas.

**V.** Se siguen las etapas I, II y III para cada grilla  $T_m^Y$ , considerando el plano X-Z como principal de flujo.

**VI.** Una vez obtenidos los valores de  $\{\varphi_i\}^\beta$ ,  $\beta = X, Y$ , que corresponde a las cargas de presión resultantes de considerar el plano  $\beta$  como principal de flujo, se eligen los pesos  $W_1$  y  $W_2$  tal que  $F$  sea mínima:

$$F = \sum_{k \in P} (\varphi_k^P - W_1 \cdot \varphi_k^X - W_2 \cdot \varphi_k^Y)^2 \quad (7)$$

donde  $\{\varphi_k^P\}$  corresponde al conjunto de valores de carga de presión en puntos de control de mallado  $P_k$ . Además debe cumplirse que  $W_1 + W_2 = 1$ .

**VII.** Definidos  $W_1$  y  $W_2$  la solución para todo  $V \cup \mathbf{x}_i$  será:

$$\mathbf{j} = W_1 \cdot \mathbf{j}^X + W_2 \cdot \mathbf{j}^Y \quad (8)$$

## RESULTADOS PRELIMINARES Y APLICACIÓN AL VALLE DE PEUMO

Como primer paso en la aplicación del esquema de modelación propuesto, las ecuaciones que definen la aproximación en volúmenes finitos para la ecuación de Richards fueron programadas en ambiente MatLab. Los algoritmos desarrollados son originales y permiten utilizar malladores que al menos deben definir la matriz de índices (los índices de los elementos triangulares vecinos al elemento considerado) como EasyMesh, Triangle o Delaunay. Las mallas generadas deben cumplir con los requerimientos de ángulo mínimo. Los algoritmos desarrollados para aplicar este planteamiento se encuentran en etapa de verificación. La figura 1 muestra los resultados para una simulación de prueba para un problema de condiciones de borde fijas y constantes en un dominio rectangular. Este problema permite estudiar la respuesta en estado estacionario de los algoritmos.

La función de conductividad utilizada, considera que en un plano logarítmico a partir de un valor determinado de contenido de humedad, el valor de conductividad pasa de una función lineal a una función constante (i.e. curva de saturación). Como se observa en la figura 1, las isolíneas de presión son correctas, se mantiene la simetría del problema y los valores de las condiciones de borde. Se analizaron también las ecuaciones de balance globales y para cada elemento, mostrando que el algoritmo desarrollado conserva masa local y globalmente.

La discretización espacial, considera los principales características físicas y elementos del sistema de monitoreo del valle de Peumo. Como se observa en la figura 2, la geometría del dominio en el valle queda determinada por los canales de riego, la cadena de cerros y el valle. Se muestran además los sensores de nivel freático y las tasas lisimétricas. Los sensores corresponden al sistema de monitoreo que debe ser diseñado e instalado para verificar el funcionamiento del modelo respecto a datos medidos. La ubicación de los sensores es dependiente de los requerimientos del modelo, la disponibilidad tecnológica y la facilidad de acceso, de tal manera que exista coincidencia entre el punto simulado y el punto medido.

Los flujos modelados son el flujo saturado dentro del acuífero, que es controlado por el nivel del río Cachapoal y la recarga producto de las filtraciones desde los canales, y el flujo variablemente saturado desde los canales de distribución de agua de riego. El dominio espacial definido por la línea punteada es representado y discretizado por una triangulación Delaunay donde cada uno de los volúmenes de control puede tener características diferentes (e.g. conductividad hidráulica, tipo de suelo, condición de borde). La figura 3 muestra el dominio discretizado. Uno de los requisitos de la modelación propuesta considera que la ubicación de los sensores debe coincidir con los centroides del elemento cercano. Debido a que la aproximación en volúmenes finitos considera el valor en el centroide como representativo del volumen de control y que el proceso de ajuste de pesos depende de los valores medidos, es lógico que los puntos modelados y medidos coincidan. Como requisito opcional, estos puntos de control pueden pertenecer a más de un mallado  $T_m^\alpha$ . Los algoritmos de generación de mallas permiten definir puntos y restricciones específicas a la discretización de tal manera que un punto determinado corresponda a un vértice o volumen de control.

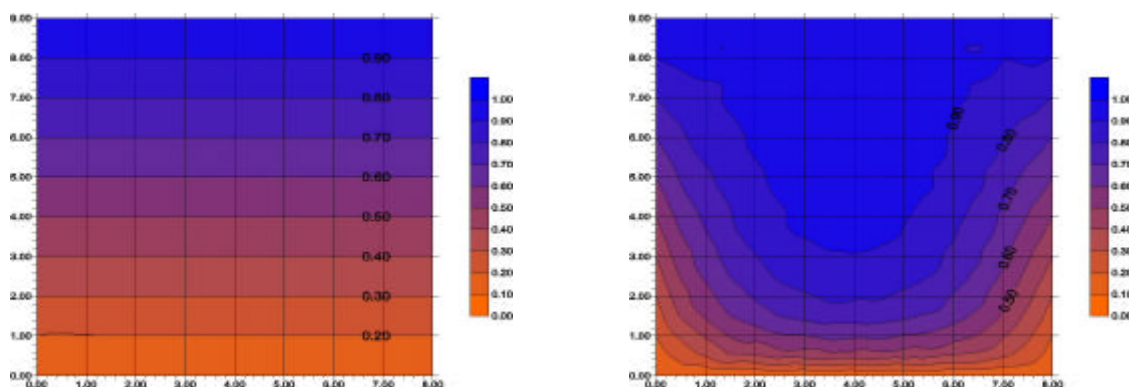


Figura 1. Resultados de verificación de los algoritmos desarrollados en esta tesis. La figura superior muestra la condición inicial para un problema de flujo vertical y simétrico con condiciones de borde Dirichlet fijas en  $\partial\Omega$ . La figura inferior muestra las isolíneas para  $t=8$ .

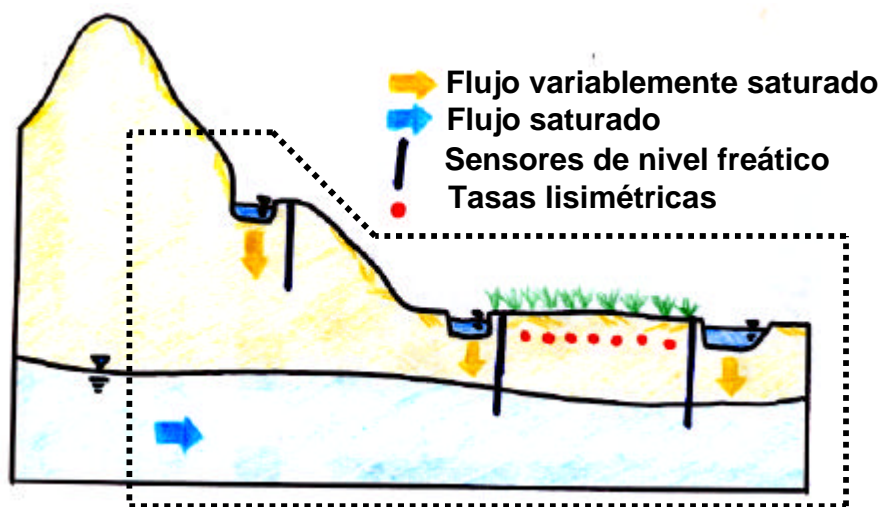


Figura 2. Definición conceptual del dominio y sensores en el valle de Peumo.

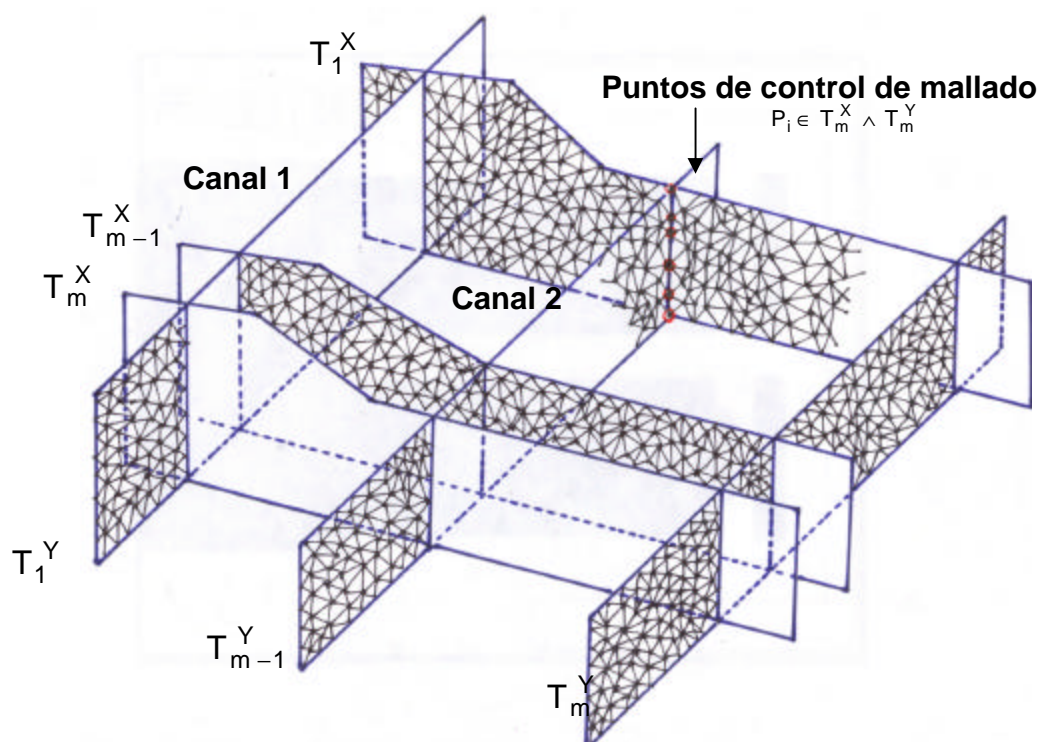


Figura 3. Esquema conceptual de la aplicación de modelación 2,5-dimensional en el valle de Peumo.

La geometría de los canales de riego es también importante en el proceso de recarga, ya que según la metodología propuesta, el flujo desde el fondo de canal es dependiente del perímetro mojado y puede ser incluida en la definición de las mallas. En el caso de los canales de riego, las funciones de borde dependen de la posición del nivel freático, por lo que es necesario instalar sensores en las cercanías del canal. En el caso de zonas de riego la condición de borde es dependiente de la tasa de riego y la evapotranspiración del cultivo. Debido a que el sistema

modelado es de escala intermedia, las condiciones de borde se supone afectan el dominio localmente en el elemento inmediatamente vecino. Esta hipótesis es equivalente a suponer que la propagación de condiciones de borde en pequeña escala es amortiguada en el elemento vecino.

Finalmente, la figura 3 muestra el esquema conceptual de aplicación de la modelación 2,5-dimensional en el valle de Peumo. Cada uno de los planos  $T_m^Y$  paralelos al eje Y se corresponde con los canales de distribución de agua de riego y otros planos que se consideren influyan en la modelación. Perpendicular a estos planos, se definen los mallados  $T_m^X$ . En las líneas de intersección de los planos, los puntos  $P_i$  o puntos de control de mallado deben coincidir.

## CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

Es posible modelar la interacción entre los continuos de agua superficiales, subterránea y de riego a través de ecuaciones de balance y definición de funciones de borde, que son resueltas simultáneamente. Las ecuaciones son resueltas aplicando el método de los volúmenes finitos a la ecuación de Richards. El modelo de acople entre continuos considera continuidad de condiciones de borde. Los flujos entre elementos son calculados de manera simultánea y reajustada las condiciones de borde.

El transporte de polutos de origen agrícola depende de la distribución espacio-temporal de los sistemas de riego. Los patrones de recarga son modificados por la presencia de los canales de riego, generando zonas de almacenamiento transitorio. En el caso de filtración desde los canales, la profundidad del nivel freático determina la condición de borde a considerar en el fondo del canal. Dado que la propagación de los contaminantes en un sistema es función del campo de velocidades, el conocimiento de la distribución espacio temporal de los patrones de flujo, permite también aproximarse a los fenómenos de transporte y almacenamiento de contaminantes y cómo las condiciones de borde impuestas por la actividad antropogénica afectan estos patrones.

La propuesta de modelación presentada busca, desde su conceptualización inicial, integrar los sistemas de monitoreos y las series de datos medidos generadas, con un modelo de simulación de tal manera que interactúen continua y dinámicamente. Los enfoques basados en sólo medir y en sólo modelar enfrentan los procesos de medir y representar, pero, la construcción de modelos no sólo es un herramienta útil en la simulación de eventos o fenómenos determinados, ya que las potencialidades en la retroalimentación permiten definir y evaluar de mejor manera acciones de gestión de los recursos hídricos y permiten además, basado en el conocimiento “real” y “simulado”, planificar de mejor manera.

En los ecosistemas agrícolas, los fenómenos se enmarcan en una mesoescala espacial y una menor escala temporal. Tomando como ejemplo el valle de Peumo, la interacción entre el sistema regional de flujo de las aguas subterráneas y las características locales de lo sistemas de distribución de aguas de riego y sistemas de riego son claras, como se observa en la estabilidad del nivel freático. Por otro lado, las variables y fenómenos climáticos afectan día a día las decisiones de manejo, con lo cual, la discretización en tiempo debe mayor. Por lo tanto, debe existir un compromiso entre los sistemas de monitoreo y simulación, de tal manera que además de mejorar el conocimiento de la disponibilidad y calidad de los recursos hídricos simulados, sea posible planificar su uso y predecir singularidades.

## REFERENCIAS

Abbott M, Bathurst J, Cunge J, O'connell P & J Rasmussen (1986) An introduction to the European Hydrological System-Système Hydrologique Européen "SHE" 2: Structure of a physically-based, distributed modeling system. *Journal of Hydrology* 87: 61-77.

Barth T & M Ohlberger (2004) Finite Volume Methods: foundation and analysis. In *Encyclopaedia of Computational Mechanics* (Ed. STEIN E, de BORST R AND HUGHES T) John Wiley & Sons Ltd.

Bertolazzi & G Manzini (2004a) A finite volume method for transport of contaminants in porous media. *Applied Numerical Mathematics* 49: 291-305.

Bertolazzi & G Manzini (2004b) A cell-centered second-order accurate finite volume method for convection-diffusion problems on unstructured meshes. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 14: 1235-1260.

Bertolazzi & G Manzini (2004c) Least squares-based finite volumes for solving the advection-diffusion of contaminants in porous media. *Applied Numerical Mathematics* 51: 451-461.

Bertolazzi & G Manzini (2004d) Limiting strategies for polynomial reconstructions in the finite volume approximation of the linear advection equation. *Applied Numerical Mathematics* 49: 277-289.

Beven K (2001) How far can we go in distributed hydrological modelling?. *Hydrology and Earth System Sciences* 5: 1-12.

Binning P (1994) Modeling unsaturated zone flow and contaminant transport in the air and water phases Ph.D. Thesis Department of Civil Engineering and Operations Research, Princeton University, USA.

Böhlke J (2002) Groundwater recharge and agricultural contamination. *Hydrogeology Journal* 10: 153-179.

Cai Z, Mandel J & S McCormick (1991) The finite volume element method for diffusion equations on general triangulations. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 28: 392-402.

Celia M, Bouloutas E & L Zarba (1990) A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resources Research* 26: 1483-1496.

Cey E, Rudolph D, Aravena R & G Parkin (1999) Role of the riparian zone in controlling the distribution and fate of agricultural nitrogen near a small stream in southern Ontario. *Journal of Contaminant Hydrology*, 37: 45-67.

Cirno C & J McDonnell (1997) Linking the hydrologic and biogeochemical controls of nitrogen transport in near-stream zone of temperate-forested catchments: a review. *Journal of Hydrology*, 199:88-120.

Clement T, Wise W & F Molz (1994) A physically based two-dimensional finite difference algorithm for modeling variably-saturated flow *Journal of Hydrology* 161: 71-90.

Eralingga V (2004) Computational upscaled modeling of heterogeneous porous media flow utilizing finite volume method. PhD Thesis Texas A&M University, USA.

Eymard R, Gallouët T & R Herbin (1997) Finite Volume Methods. In *Handbook of Numerical Analysis VII* (Ed. CIARLET P & LIONS J) Amsterdam North Holland: 713-1020.

Eymard R, Gallouët T & R Herbin (2004) A finite volume scheme for anisotropic diffusion problem. *Comptes Rendus Academie des Sciences I Mathématiques* 339: 299-302.

Eymard R, Gallouët T & R Herbin (2006) A cell-centred finite-volume approximation for anisotropic diffusion operators on unstructured meshes in any space dimension. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 26: 326-353.

Ewing R, Lazarov R & Y Lin (2000) Finite volume element approximations of nonlocal reactive flows in porous media. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 16: 285-311.

- Ewing R, Lin T & Y Lin (2002) on the accuracy of the finite volume element method based on piecewise linear polynomials. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 39: 1865-1888.
- Ewing R & H Wang (2001) A summary of numerical methods for time-dependent advection-dominated partial differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 128: 423-445.
- Farthing M, Kees C & C Miller (2002) Mixed finite elements methods and higher-order temporal approximations. *Advances in Water Resources* 25: 85-101.
- Farthing M & C Miller (2001) A comparison of high-resolution, finite volume, adaptativas stencil schemes for simulating advective-dispersive transport. *Advances in Water Resources* 24: 29-48.
- Gardener K (1999) The importance of surface water/ground water interaction. EPA Issue paper, Environmental Protection Agency.
- Hantush M & M Mariño (2001) Analytical modeling of the influence of denitrifying sediments on nitrate transport in aquifers with sloping beds. *Water Resources Research* 37: 3177-3192.
- Hussein M & F Schwartz (2003) Modeling of flow and contaminant transport in coupled stream-aquifer systems. *Journal of Contaminant Hydrology* 65: 41-64.
- Hydrogeologic (1998) MODFLOW-SURFACT, Overview: Installation, Registration and Running Procedures.
- Ivanov V, Vivoni E, Bras R & D Entekhabi (2004) Catchment Hydrologic Response with a Fully-distributed Triangulated Irregular Network Model. *Water Resources Research*. 40(11): W11102.
- Kang S & H Lin (2007) Wavelet analysis of hydrological and water quality signals in an agricultural watershed. *Journal of Hydrology* 338: 1-14.
- Kollet J & R Maxwell (2006) Integrated surface-groundwater flow modeling: A free-surface overland flow boundary condition in a parallel groundwater flow model, *Advances in Water Resources* 29(7): 945-958.
- Loague K, Heppner C, Abrams R, Carr A, Vanderkwaak J, Ebel B (2005) Further Testing of the Integrated Hydrology Model (InHM): Event-based Simulations for a Small Rangeland Catchment Located Near Chickasha, Oklahoma. *Hydrological Processes* 19: 1373-1398.
- Loague K & J Vanderkwaak (2004) Physics-based hydrologic response simulation: Platinum bridge, 1958 Edsel, or useful tool. *Hydrological Processes* 18: 2949-2956.
- Mac Donald M & A Harbaugh (1984) A modular three-dimensional finite-difference groundwater flow model. US Geological Survey Open File Report 83.
- Manzini G & S Ferraris (2004) Mass-conservative finite volume methods on 2-D unstructured grids for the Richards' equation. *Advances in Water Resources* 27: 1199-1215.
- Mazzia A, Bergamaschi L & M Putti (2000) A time-splitting technique for the advection-dispersion equation in groundwater *Journal of Computational Physics* 157: 181-198.
- Michev I (1996) Finite volume and finite volume element methods for nonsymmetric problems. Ph.D. Thesis Texas A&M University, USA.
- Mishev I (1998) Finite volume methods on Voronoï meshes. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 14: 193-212.
- Moench A (2003) Estimation of hectare-scale soil-moisture characteristics from aquifer-test data. *Journal of Hydrology* 281: 82-95.

- Morton K, Stynes M & E Süli (1997) Analysis of a cell-vertex finite volume method for convection-diffusion problems. *Mathematics of Computation* 66: 1389-1406.
- Niazi S (2000) Sensitivity analysis of time-step in modeling river and aquifer interaction. M.Sc. Thesis The University of Texas, USA.
- Osman Y & M Bruen (2002) Modeling stream-aquifer seepage in an alluvial aquifer: an improved loosing-stream package for MODFLOW. *Journal of Hydrology* 264: 69-86.
- Perkins S & A Koussis (1996) Stream-aquifer interaction model with diffusive wave routing. *Journal of Hydraulic Engineering* 122: 210-218.
- Richards L A (1931) Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics* 1: 318-333.
- Rivera D (2006) Influencia de la interacción entre agua superficial, subterránea y de riego en el transporte de Contaminantes de origen agrícola. DEng. Thesis, University of Concepción, Chile.
- Russo D, Zaidel J & A Laufer (2001) Numerical analysis of flow and transport in a combined heterogeneous vadose zone-groundwater system. *Advances in Water Resources* 24: 49-62.
- Schaffranek R (1987) Flow model for open-channel reach or network USGS Professional Paper 1384: 11 pp.
- Simpson M & Clement T (2003) Comparison of finite difference and finite element solutions to the variably saturated flow equation. *Journal of Hydrology* 270: 49-64.
- Simunek J, Sejna M & M Th Van Genuchten (1999) The HYDRUS-2D software package for simulating two-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably saturated media Version 2.0. IGWMC-TPS-53, International Ground Water Modeling Center, Colorado School of Mines, Golden, Colorado, 251pp.
- Sivapalan M (2005) Pattern, process and function: elements of a unified theory of hydrology at the catchment scale. In *Encyclopaedia of Hydrological Sciences* (ANDERSON M, ed). John Wiley & Sons.
- Sophocleous M (2002) Interactions between groundwater and surface water: the state of the science. *Hydrogeology Journal* 10: 52-67.
- Swain E & E Wexler (1996) A coupled surface-water and groundwater flow model (MODBRANCH) for simulation of stream-aquifer interaction. USGS Publications Techniques of Water-Resources Investigations, United States Geological Survey book 6, chapter A6.
- Thoms B (2003) Simulating fully coupled overland and variably saturated subsurface flow using MODFLOW. Master of Science Thesis, OGI School of Science and Engineering at Oregon Health and Science University, USA.
- Vanderkwaak J (1999) Numerical simulation of flow and chemical transport in integrated surface-subsurface hydrologic systems. PhD Thesis in Earth Sciences, University of Waterloo, Canada.
- Vanderkwaak J & K Loague (2001) Hydrologic-response simulations for the R-5 catchment with a comprehensive physics-based model. *Water Resources Research* 37: 999-1013.
- Vanderkwaak J & E Sudicky (2000) A comparison of observed and simulated hydrograph separations for a field-scale rainfall-runoff experiment. Proc. TraM'2000, IAHS Symposium on Tracers and Modelling in Hydrogeology, IAHS Pub. 262: 473-479.
- Winter T (1999) Relation of streams lakes and wetlands to groundwater flow systems. *Hydrogeology Journal* 7: 28-45.
- Wroblicky G, Campana M, Valet M & C Dahm (1998) Seasonal variation in surface-subsurface water exchange and lateral hyporheic area of two stream-aquifer systems. *Water Resources Research* 34: 317-328