



# **DISTRIBUCIÓN PROBABILÍSTICA DE LA PRECIPITACIÓN Y SU RELACIÓN CON LA EFICACIA DE OBRAS DE INFILTRACIÓN O TRATAMIENTO DE AGUAS LLUVIAS. APLICACIÓN EN SANTIAGO**

JOSÉ PEDRO MONTT M., PEDRO RIVERA I Y BONIFACIO FERNÁNDEZ L.

Centro de Aguas Urbanas. Depto. Ingeniería Hidráulica y Ambiental.  
Pontificia Universidad Católica de Chile.  
Av. Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile.  
Teléfono. 6864227. Fax 6865876. E-mail: [jmontt@ing.puc.cl](mailto:jmontt@ing.puc.cl)

## **RESUMEN**

A partir de datos de precipitación a nivel horario de Santiago se obtuvieron curvas de eficacia para obras de infiltración o tratamiento de aguas lluvias según su capacidad instantánea o bien según el volumen de captura de diseño. También se ajustó una distribución probabilística para la precipitación por tormentas y por intervalo de tiempo fijo. A partir de ella se obtuvo una expresión analítica para la eficacia de obras de infiltración o tratamiento basadas ya sea en el volumen de captura o en su capacidad instantánea. Esta expresión analítica permite obtener estas curvas de eficacia para otros lugares a partir de estadígrafos típicos como el promedio y desviación estándar de la precipitación ya sea por tormenta o por intervalo fijo.

## **ABSTRACT**

Effectiveness curves for stormwater infiltration or treatment facilities were produced for Santiago using hourly precipitation data. These curves depend on the design instant capacity or capture volume of the facilities. A probabilistic distribution for the rainfall depth, both for storm and for fixed time interval was calculated. From the precipitation probabilistic distribution, an analytical expression for this effectiveness curves was derived. Using this formula, it is possible to calculate the effectiveness curves for other places, using typical statistics such as the average and the standard deviation of the storm precipitation or a fixed time interval precipitation.



## **DISTRIBUCIÓN PROBABILÍSTICA DE LA PRECIPITACIÓN Y SU RELACIÓN CON LA EFICACIA DE OBRAS DE INFILTRACIÓN O TRATAMIENTO DE AGUAS LLUVIAS. APLICACIÓN EN SANTIAGO**

### **1 Introducción.**

Las obras de infiltración, control de la calidad y tratamiento de las aguas lluvias tienen en común que tienen como objetivo captar la mayor fracción posible del volumen total de precipitación anual. Las obras de infiltración para recargar el acuífero y las obras de tratamiento para reducir la carga contaminante en los cuerpos receptores. Por ello la eficacia de estas obras no es otra cosa que el porcentaje de la precipitación anual que infiltran o tratan.

Estas obras se pueden dividir en dos tipos, definidas por sus variables de diseño. El primer tipo son aquellas que captan una cantidad fija de precipitación por tormenta, que tienen por lo tanto como variable de diseño lo que se conoce como volumen de captura. El segundo tipo son aquellas que tienen una capacidad de captación constante en el tiempo, siendo esta capacidad la variable de diseño.

En obras de conducción o control de crecidas en que lo que interesa es la precipitación o caudal máximo a captar, se cuenta con las curvas IDF para el diseño., las que ya están bien establecidas para cada ciudad de Chile (Manual de Carreteras, 2001). En obras de infiltración o tratamiento de aguas lluvias, en cambio, en que lo que interesa es el volumen capturado anual, no existen curvas análogas a las IDF. Es decir no existen curvas que relacionen las variables de diseño como el volumen de captura o capacidad instantánea de las obras, con su eficacia, entendida como el porcentaje de la precipitación anual captada.

En el presente trabajo se presentan estas curvas de eficacia para el caso de Santiago. Ellas relacionan las variables de diseño de estas obras, ya sea el volumen de captura anual o la capacidad instantánea, con el porcentaje de la precipitación anual captada. Estas curvas se obtuvieron a partir del registro de 44 años (1917-1960) de precipitación cada 10 minutos de la Estación Quinta Normal.

También se presenta una expresión analítica para estas curvas, deducido del ajuste de un modelo de distribución a la precipitación, ya sea por tormentas o por intervalos fijos.

### **2 Distribución probabilística de las tormentas y obras basadas en el volumen de captura.**

#### **2.1 Frecuencia y magnitud de las tormentas.**

A partir de los datos de la Estación Quinta Normal agrupados a nivel horario, se obtuvo la distribución de probabilidades de las magnitudes de las tormentas que ocurren en Santiago. El criterio utilizado para separar una tormenta de la siguiente fue que ocurriera un intervalo de 24 horas consecutivas sin precipitación. Siguiendo este criterio hubo 908 tormentas en los 44 años de registro, lo que equivale a un promedio de 20,6 tormentas al año. La precipitación promedio anual del período fue de 301,1 mm.



La magnitud promedio de la tormentas en Santiago es por lo tanto de 14,6 mm/tormenta y la desviación estándar es de 20,6 mm. Estos estadígrafos se muestran en la Tabla 1.

**Tabla 1. Estadígrafos de tormentas en Santiago.**

Longitud período de registro (años)	44
N° de tormentas en el período (tor)	908
Precipitación promedio anual, $H_T$ (mm/año).	301,1
N° tormentas al año, $N_a$ (tor/año)	20,6
Promedio magnitud de tormentas, $m$ (mm/tor)	14,6
Desviación estándar magnitud de tormentas, $s$ (mm/tor)	20,6
Coeficiente de variación magnitud de tormentas $C_v = m/s$	1,41
Parámetro $a$ distribución Weibull	0,72
Parámetro $b$ distribución Weibull (mm/tor)	11,9

La Tabla 2 muestra el número total de ocasiones en que ocurrieron tormentas de distinta magnitud y la frecuencia promedio anual en que ellas ocurren. Se aprecia que más de un tercio de las tormentas son menores a 5 mm y un 70% son menores a 15 mm, esto es relevante para obras de regulación y control de la calidad como se verá más adelante.

**Tabla 2. Frecuencia de tormentas según su magnitud.**

Magnitud (mm)	N° tormentas en el período (tor)	Promedio anual (tor/año)	Fracción (%)
< 5mm	355	8,1	39,1%
5-10 mm	156	3,5	17,2%
10-15 mm	120	2,7	13,2%
15-20 mm	75	1,7	8,3%
20-30 mm	93	2,1	10,2%
30-40 mm	33	0,75	3,6%
40-50 mm	26	0,59	2,9%
50-60 mm	15	0,34	1,7%
60-70 mm	6	0,14	0,7%
70-80 mm	7	0,16	0,8%
80-90 mm	5	0,11	0,6%
90-100 mm	5	0,11	0,6%
>100 mm	12	0,27	1,3%
Total	908	20,6	100%

A partir de los datos es también posible obtener un modelo de distribución de las magnitudes de las tormentas. La **Figura 1** muestra la distribución observada de las tormentas según su magnitud (círculos). Se aprecia que es estrictamente decreciente con la magnitud y de concavidad muy acentuada. La distribución de probabilidades que reproduce mejor estas características es la distribución Weibull. La función de probabilidad de no excedencia  $F(x)$  (1) y la función densidad  $f(x)$  (2) de esta distribución se muestran a continuación en que  $a$  y  $b$  son los parámetros de la distribución.

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad (1)$$

$$f(x) = ab^{-a} x^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a} \quad (2)$$

La media (3) y la varianza (4) de la distribución Weibull son:



$$m = b\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \quad (3)$$

$$s^2 = b^2 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right) \right] \quad (4)$$

En que  $\Gamma(a)$  es la función gamma completa (5).

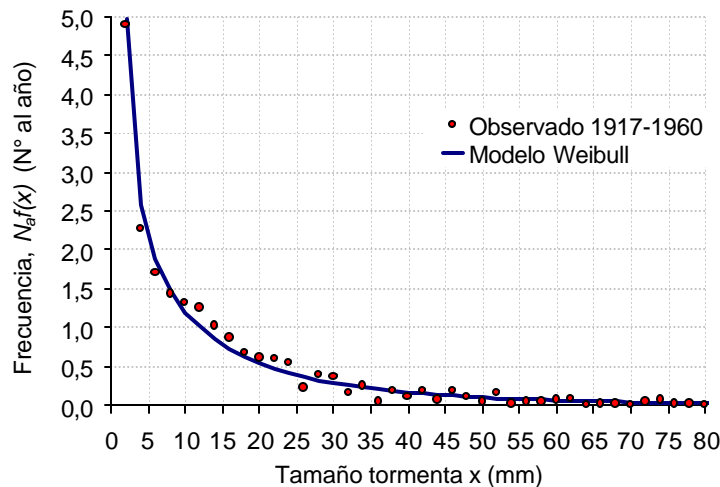
$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \quad (5)$$

El estimador del parámetro  $a$ , ( $\hat{a}$ ), por lo tanto, se puede obtener por el método de los momentos mediante la relación recursiva (6), en que  $C_v$  es el coeficiente de variación de la muestra. Una vez obtenido  $\hat{a}$ , el estimador de  $b$ ,  $\hat{b}$ , se obtiene explícitamente a partir de la ecuación (7).

$$\Gamma\left(1 + \frac{2}{\hat{a}}\right) = (C_v^2 + 1)\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\hat{a}}\right) \quad (6)$$

$$\hat{b} = \frac{\bar{x}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{a}}\right)} \quad (7)$$

En la **Tabla 1** se muestran los valores de  $a$  y  $b$  para Santiago. La **Figura 1** muestra la frecuencia anual,  $N_a f(x)$ , ( $N_a$  = número promedio de tormentas al año) de las tormentas observadas y modeladas según la distribución Weibull. La **Figura 2** muestra la distribución acumulada anual de la magnitud de las tormentas  $N_a F(x)$ .



**Figura 1.** Frecuencia anual observada y modelada de la magnitud de las tormentas,  $N_a f(x)$ .

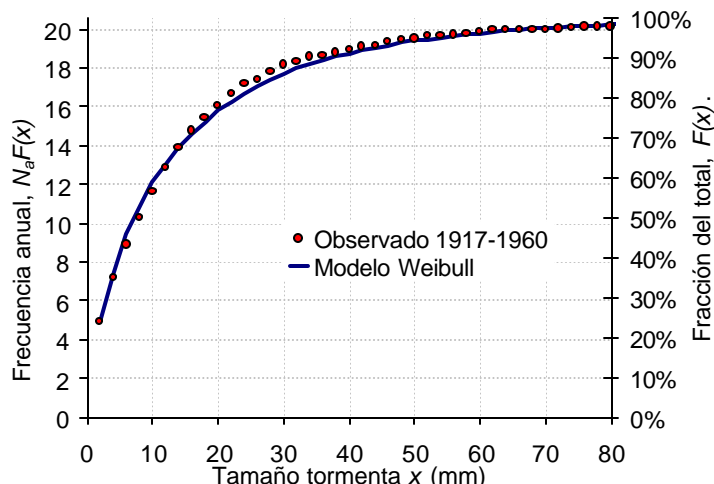


Figura 2. Frecuencia anual observada y modelada de tormentas de magnitud menores a  $x$ ,  $N_a F(x)$ .

## 2.2 Eficacia de obras de infiltración o tratamiento basadas en el volumen de captura.

Además de conocer la distribución del tamaño de las tormentas, en muchos problemas puede ser de mayor utilidad conocer la proporción del agua caída que aporta cada tamaño de tormenta. Existe una gran diferencia entre ambas proporciones. Por ejemplo, en el caso de Santiago, casi un 40% de las tormentas son menores a 5 mm, sin embargo estas tormentas sólo aportan con el 6% de la precipitación total.

Tabla 3. Aporte a la precipitación total según magnitud de las tormentas

Tamaño tormenta	Precipitación anual (mm/año)	Fracción de la precipitación total (%)
< 5mm	8,3	6%
< 10 mm	42,0	14%
< 15 mm	75,4	25%
< 20 mm	105,0	35%
< 30 mm	156,4	52%
< 40 mm	182,2	61%
< 50 mm	208,3	69%
< 60 mm	226,6	75%
< 70 mm	235,1	78%
< 80 mm	246,8	82%
< 90 mm	256,4	85%
< 100 mm	267,4	89%
Total	301,1	100%

A partir de la distribución de probabilidades de las tormentas (Weibull en este caso pero podría ser cualquier otra) se puede deducir una expresión analítica para la precipitación anual correspondiente a cada magnitud de tormenta.

Sea  $x$  la magnitud de la tormenta y  $f(x)$  su distribución, se define como  $h(x)$  (8) el agua caída anual correspondiente a cada magnitud de tormenta.

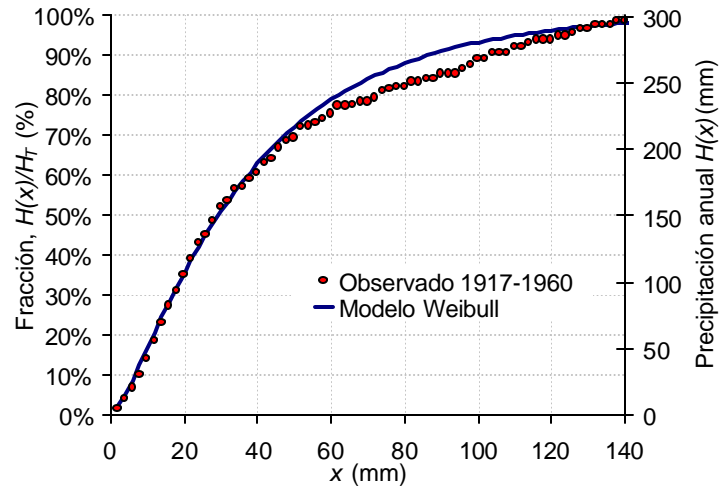
$$h(x) = N_a x f(x) \quad (8)$$



En que  $N_a$  es el número promedio de tormentas al año. La precipitación anual correspondiente a tormentas menores a  $x$  es por lo tanto la integral hasta  $x$  de  $h(x)$  (9).

$$H(x) = \int_0^x h(u) du = N_a \int_0^x u f(u) du = N_a (x F(x) - \int_0^x F(u) du) \quad (9)$$

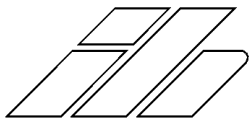
La **Figura 3** muestra la precipitación anual correspondiente a tormentas menores a  $x$ ,  $H(x)$ , y el respectivo porcentaje respecto a la precipitación total anual,  $H_T$ . Se muestran los valores observados y modelados considerando el modelo Weibull para la distribución de las tormentas ( $f(x)$ ).



**Figura 3.**  $H(x)$ , Fracción de la precipitación correspondiente a tormentas de  $x$  mm.

Para temas como la recarga de acuíferos o el control de la contaminación de cuerpos de agua debido al escurrimiento de aguas lluvias, la variable fundamental no es la precipitación máxima o la precipitación promedio, sino que es volumen total anual que es infiltrado y retenido respectivamente. La eficacia de ambos procesos depende del régimen de lluvias y de la cantidad de milímetros de lluvia que se infiltra o retiene por tormenta, lo que se conoce como volumen de captura.

Por ejemplo una obra de control de la calidad de las aguas lluvias puede ser diseñada para tratar los primeros 10 milímetros de cada tormenta. Si esta obra se instala en un lugar donde sólo ocurren tormentas menores a 10 milímetros su eficacia será del 100%. Sin embargo si esta obra se instala en un lugar con la misma pluviometría, pero en que ocurren pocas pero grandes tormentas, su eficacia podría ser insignificante. En el caso de Santiago la eficacia de determinado volumen de captura se muestra en la **Tabla 4**. Se aprecia que capturando los primeros 10 milímetros de cada tormenta se reduce en un 40 % el escurrimiento anual y con los primeros 20 mm se reduce en un 65%. Es decir con pequeñas obras de control que retengan los primeros milímetros de cada tormenta se puede tener un efecto significativo en la reducción de la contaminación de los cuerpos de agua receptores, considerando además que esta se concentra en la primera parte de la tormenta. Lo mismo se puede decir acerca de la recarga de acuíferos.



**Tabla 4. Precipitación anual retenida según volumen de captura. Quinta Normal.**

Volumen de captura por tormenta (mm)	Precipitación anual retenida (mm/año)	Fracción de la precipitación total (%)
5	44,1	22%
10	122,9	41%
15	163,1	54%
20	191,9	64%
30	228,0	76%
40	249,4	83%
50	263,8	88%
60	273,4	91%
70	280,5	93%
80	286,1	95%
90	290,7	97%
100	294,3	98%

El volumen capturado anual  $V(x)$  por una obra que captura los primeros  $x$  milímetros de cada tormenta, es la suma de las precipitaciones de todas las tormentas menores a  $x$ , más los primeros  $x$  milímetros de todas las tormentas mayores a  $x$ . Por lo tanto se tiene la siguiente expresión analítica para  $V(x)$ .

$$V(x) = H(x) + N_a x(1 - F(x)) = N_a \left( x - \int_0^x F(u) du \right) \quad (10)$$

Para el caso de Santiago y probablemente de muchos otros lugares en que la distribución Weibull reproduce bien la distribución de las tormentas, se tiene que:

$$V(x) = N_a \left( x - \int_0^x 1 - e^{-\left(\frac{u}{b}\right)^a} du \right) = N_a \int_0^x e^{-\left(\frac{u}{b}\right)^a} du = \frac{bN_a}{a} \left( \Gamma\left(\frac{1}{a}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{a}, \left(\frac{x}{b}\right)^a \right) \right) \quad (11)$$

En que  $\Gamma(a, x)$  es la función gamma incompleta y  $\Gamma(a)$  la función gamma completa.

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (12)$$

Una expresión analítica como esta es útil para obtener la función  $V(x)$  en otros lugares. Ya que basta con saber la precipitación anual ( $H_T$ ), la media ( $m$ ) y la desviación estándar ( $s$ ) de la precipitación por tormenta para obtener la función  $V(x)$ .

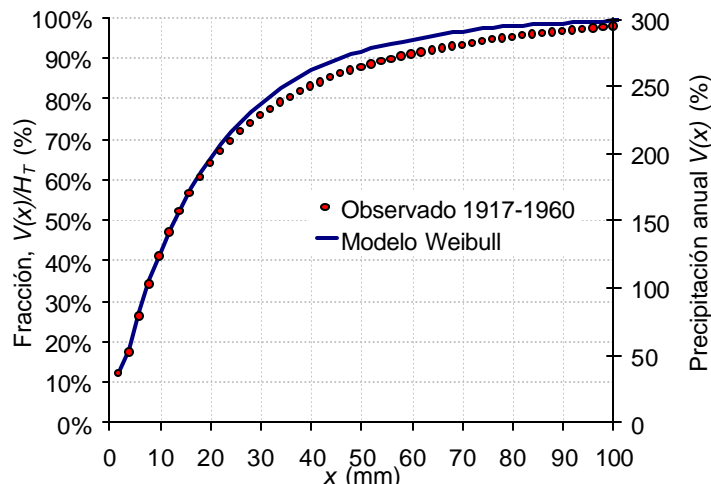


Figura 4. Precipitación anual retenida  $V(x)$  por un volumen de captura  $x$ .

### 3 Distribución probabilística de la precipitación y obras basadas en la capacidad instantánea.

#### 3.1 Probabilidad de ocurrencia y distribución probabilística de la precipitación.

En la sección anterior se obtuvo la distribución de probabilidades de la precipitación por tormenta, esta sección en cambio se refiere a la distribución de probabilidades de la precipitación en un intervalo de tiempo determinado. Esta información es útil por ejemplo para saber cuántas horas o días al año se supera determinada precipitación.

Tabla 5. Probabilidad de ocurrencia de lluvia.

Discretización del tiempo (h)	Nº total de intervalos al año	Nº promedio de intervalos con lluvia al año. $N_p$	Desviación Estándar nº intervalos con lluvia al año	Probabilidad de ocurrencia de lluvia	Probabilidad de no ocurrencia de lluvia
1	8760	223	79	0,025	0,975
2	4380	133	47	0,030	0,970
3	2920	101	35	0,035	0,965
4	2190	83	29	0,038	0,962
6	1460	66	22	0,045	0,955
8	1095	55	18	0,050	0,950
12	730	44	14	0,060	0,940
24	365	29	9	0,080	0,920

Para ello se utilizó también el registro horario de la Estación Quinta Normal: Se discretizó el tiempo en intervalos de 1,2 3, 4 6, 8 12 horas y un día.

En primer lugar, se obtuvo el número promedio de intervalos al año en que existe precipitación y su probabilidad respectiva, lo que se muestra en la Tabla 5.

Al igual que la precipitación por tormenta el mejor ajuste para la distribución de la precipitación en los intervalos con lluvia es la distribución Weibull. La Tabla 6 muestra los respectivos parámetros  $a$  y  $b$  de la distribución para la precipitación de cada intervalo de tiempo.

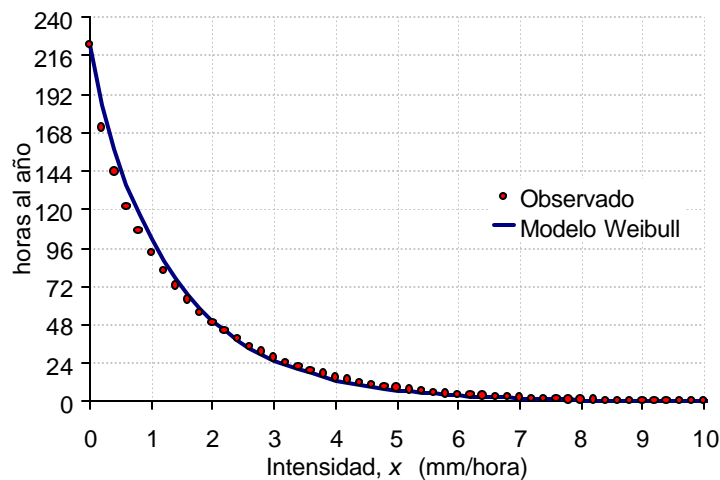




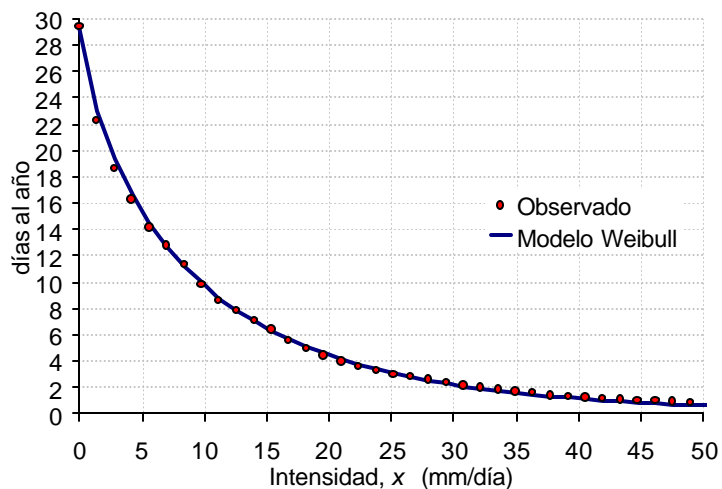
**Tabla 6. Parámetros de la distribución de probabilidades de las lluvias.**

Discretización del tiempo (h)	Probabilidad de ocurrencia de lluvia	Probabilidad de no ocurrencia de lluvia	Parámetros distribución Weibull para la precipitación en intervalos con lluvia	
			<i>a</i>	<i>b</i>
1	0,025	0,975	0,91	1,3
2	0,030	0,970	0,85	2,1
3	0,035	0,965	0,82	2,7
4	0,038	0,962	0,81	3,2
6	0,045	0,955	0,78	4,0
8	0,050	0,950	0,80	4,8
12	0,060	0,940	0,78	5,9
24	0,080	0,920	0,77	8,8

La **Figura 5** y la **Figura 6** muestran para los casos particulares de tiempo de 1 hora y 1 día respectivamente las horas y días al año en que se supera cierta precipitación,  $N_P(1-G(x))$ .



**Figura 5. Número de horas al año en que se supera cierta precipitación.**



**Figura 6. Número de días al año en que se supera cierta precipitación.**



### 3.2 Eficacia de obras de infiltración o tratamiento de capacidad constante

En ciertas obras, como por ejemplo para pozos de infiltración de aguas lluvias que tienen una capacidad limitada de infiltración, es útil saber que fracción de la precipitación total que reciben anualmente es efectivamente infiltrada. Por ejemplo a partir de la Figura 5, se obtiene directamente que un pozo de infiltración que tenga un capacidad de infiltrar 2 mm/hora de lluvia proveniente de cierta superficie, 48 horas al año se verá rebasada dicha capacidad. La precipitación anual que infiltra este ejemplo es la lluvia de todas las horas en que la intensidad es menor a 2 mm más una infiltración de 2 mm/h durante todas las horas en que la intensidad es mayor. En el caso de Santiago un pozo que tiene una capacidad de infiltración de 2 mm/h de lluvia sobre cierta superficie, infiltra casi el 70% de la precipitación anual. Esto se puede apreciar en la **Tabla 7**, en la que se muestra para cada porcentaje de captación de la precipitación total anual, cuántos milímetros son necesarios captar en cada intervalo de tiempo. Se muestran los casos en que se discretizó el tiempo en una hora y un día.

**Tabla 7. Precipitación que se debe captar en el intervalo (1 hora y 1 día) para cada porcentaje de reducción de la precipitación anual. Estación Quinta Normal.**

Fracción de la precipitación anual captada (%)	Precipitación anual captada (mm/año)	Precipitación a captar en el intervalo (mm)	
		1 hora	1 día
10%	30	0,25	1,8
20%	60	0,42	3,3
30%	91	0,64	5,0
40%	121	0,89	7,0
50%	151	1,2	9,5
60%	181	1,6	12,8
70%	211	2,1	17,1
80%	242	2,8	24,0
90%	272	4,0	36,8

La precipitación anual capturada  $I(x)$  para una obra de capacidad  $x$  en un intervalo de tiempo determinado también se puede obtener analíticamente a partir de la función de distribución de la precipitación en el intervalo  $g(u)$  y del número de intervalos con lluvia que ocurren en el año ( $N_p$ ). Esta ecuación es análoga a la ecuación del volumen de captura.

Si  $g(u)$  es la distribución de la intensidad en un intervalo y  $x$  es la capacidad de infiltración del pozo en el mismo intervalo, la precipitación que infiltra anualmente  $I(x)$  es:

$$I(x) = N_p \left( \int_0^x u g(u) du + x \int_x^\infty g(u) du \right) \quad (13)$$

Por lo tanto.

$$I(x) = N_p \left( x - \int_0^x G(u) du \right) \quad (14)$$

En que  $G(u)$  es la función de distribución acumulada. Dado que para todas las discretizaciones de tiempo el mejor ajuste para  $g(u)$  es Weibull, la expresión explícita para (14) es análoga a la ecuación (11).



La Figura 7 muestra la precipitación anual captada por una obra que tiene una capacidad de  $x$  milímetros por hora, observado y modelado considerando que  $g(u)$  es Weibull. La Figura 8 muestra lo mismo pero a nivel diario.

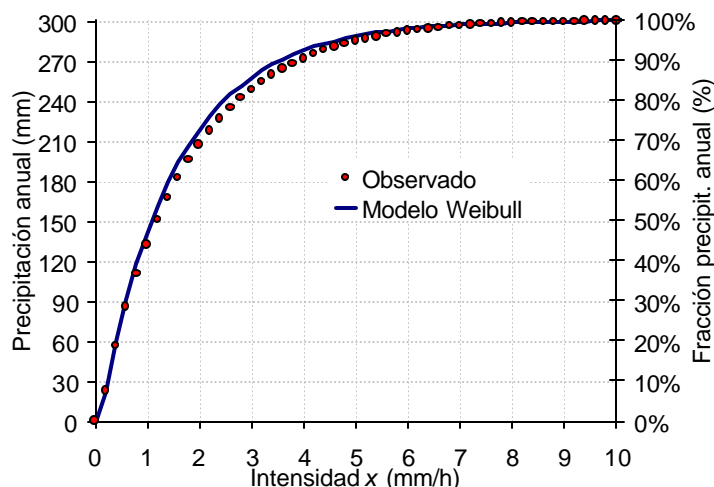


Figura 7. Precipitación anual captada por una obra de capacidad  $x$  mm/h en una hora.

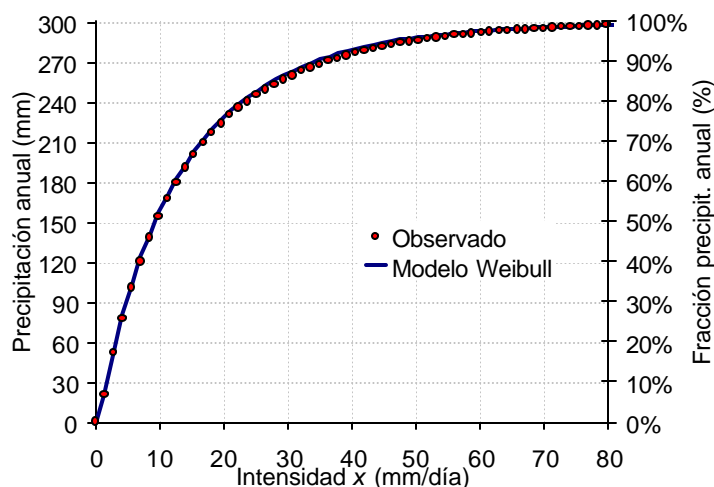


Figura 8. Precipitación anual captada por una obra de capacidad  $x$  mm/día en un día.

#### 4 Conclusiones

La eficacia de obras de tratamiento, control de la calidad y de infiltración de aguas lluvias depende sobremanera del régimen de tormentas. Para el caso de Santiago se obtuvieron curvas de eficacia de obras de infiltración o tratamiento de aguas lluvias según su capacidad instantánea o bien según el volumen de captura de diseño. También se obtuvo un modelo analítico general para la eficacia de estas obras que depende de la función de distribución de probabilidades de la precipitación del lugar. En el caso particular de Santiago el modelo que mejor reproduce la distribución de la magnitud de las tormentas y también la precipitación en intervalos de tiempo fijo, es la distribución Weibull. A partir de la distribución Weibull se evaluó el modelo analítico general, obteniendo una expresión explícita para las curvas de eficacia para el caso de Santiago. Asumiendo una distribución Weibull en otros lugares, se pueden



obtener estas curvas de eficacia analíticas a partir de de estadígrafos típicos, como el promedio y desviación estándar de la precipitación del lugar ya sea por tormenta o por intervalo fijo.

## **5 Referencias**

Dirección de Vialidad. Ministerio de Obras Públicas. Gobierno de Chile. Manual de Carreteras. 2001.

Korn, Granino A. y Korn, Theresa M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Dover Publications, Inc. New York, 2000. 1130 p.

Urban Drainage and Flood Control District. Urban Storm Drainage, Criteria Manual. 2001, Denver, Colorado.

Weisstein, Eric W. CRC Concise Encyclopedia of Mathematics. CRC Press, 2002. 3252 p.

## **6 Agradecimientos**

Esta investigación fue financiada con aportes del FONDEF de CONICYT, como parte del proyecto FONDEF D00I1011 "Sistemas Estandarizados de Drenaje de Aguas Lluvias en Urbanizaciones y Viviendas".