

Fig. 5: Comparación de los resultados de la simulación numérica con resultados experimentales de Baines y Knapp (1965).

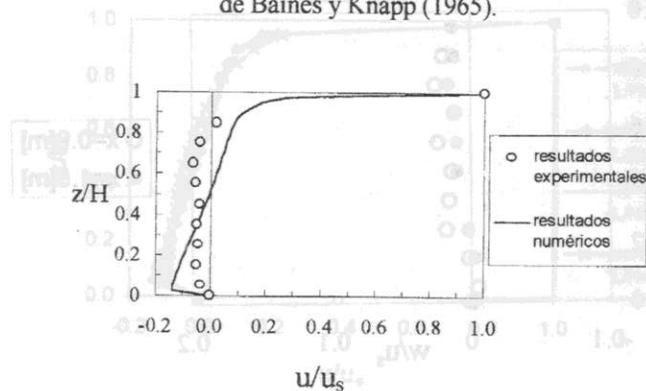


Fig. 6: Comparación entre los resultados para la velocidad horizontal de la simulación numérica y los resultados experimentales.

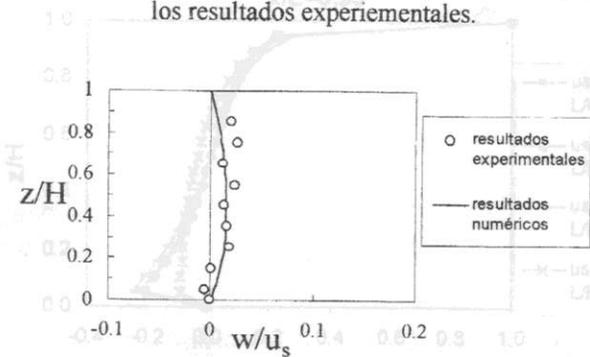


Fig. 7: Comparación entre los resultados para la velocidad vertical de la simulación numérica y los resultados experimentales.

DECAIMIENTO ESPACIAL DE LA TURBULENCIA ISOTROPICA MEDIANTE EL MODELO k-ε

ALDO TAMBURRINO¹
RICARDO OSPINO²

RESUMEN

En el presente trabajo se determina el decaimiento espacial de la energía cinética turbulenta en un campo de turbulencia isotrópica mediante el modelo k-ε de dos ecuaciones. Al considerar un coeficiente de viscosidad turbulenta constante, se obtiene que la energía cinética decae en forma proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, resultado que ha sido obtenido mediante otros enfoques por diversos investigadores, y que concuerda con datos experimentales.

El resultado obtenido se verifica para el caso de turbulencia generada por microchorros en un estanque, determinándose para esta situación el coeficiente de proporcionalidad a partir de información experimental obtenida recientemente.

¹ Profesor Asociado

² Ayudante de Investigación

División Recursos Hídricos y Medio Ambiente. Departamento de Ingeniería Civil. Universidad de Chile.

1.- INTRODUCCION Y OBJETIVOS

El decaimiento de la turbulencia, es decir la disminución de la energía cinética turbulenta mediante disipación viscosa cuando no hay una fuente de producción, es un problema que puede considerarse clásico en la teoría de la turbulencia y ha sido abordado por diversos autores, tanto desde el punto de vista analítico como experimental.

El objetivo del presente trabajo es determinar en forma analítica, usando un modelo k-ε de dos ecuaciones, la distribución de energía turbulenta y tasa de disipación de energía de un fluido con flujo neto nulo, en la región en la que se tiene turbulencia homogénea e isotrópica. Los resultados se comparan con datos obtenidos experimentalmente en un estanque agitado por microchorros. Previo al desarrollo analítico, se presenta una extensa revisión de las soluciones con base teórica que se han deducido para este problema.

2.- ANTECEDENTES BIBLIOGRAFICOS

Un campo de turbulencia isotrópica se caracteriza porque el valor medio temporal de cualquier función de las componentes de la velocidad es invariante frente a la rotación de ejes coordinados. En particular, se cumple que los momentos de primer orden de las fluctuaciones turbulentas de la velocidad son iguales: $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2} = u'^2$, donde u, v y w corresponden a las componentes del vector velocidad en las direcciones x, y, z , respectivamente. Como es usual, las barras indican promedios temporales y las primas la fluctuación turbulenta. El valor de la intensidad turbulenta está representada por u y la energía cinética turbulenta en un campo isotrópico es $k = \frac{3}{2}u^2$.

Taylor (1935) determinó que la tasa de disipación de energía por unidad de volumen para turbulencia isotrópica, \overline{W} , está dada por

$$\overline{W} = 15\mu \frac{u^2}{\lambda^2} \quad (1)$$

donde μ corresponde a la viscosidad dinámica y λ es la microescala de Taylor, definida a partir de $\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 \equiv \frac{u'^2}{\lambda^2}$. Llamando l a una dimensión lineal que define la escala del sistema, Taylor obtuvo que

$$\frac{\lambda^2}{l^2} = C \frac{v}{lu} \quad (2)$$

donde C es una constante que depende de la posición relativa de las fronteras del flujo y del elemento usado para caracterizar l . Para el caso del decaimiento de la energía cinética turbulenta en un túnel de viento, aguas abajo de una grilla, la tasa de pérdida de energía por unidad de

volumen es $-\rho U \frac{dk}{dx}$, siendo ρ la densidad del fluido y U la velocidad de convección de la estructura. Considerando que la escala de longitud l es constante y después de igualar la tasa de pérdida de energía turbulenta con la tasa de disipación, Taylor obtuvo:

$$\frac{U}{u} = C_1 x + C_2 \quad (3)$$

donde C_1 es una constante que depende del tipo de grilla utilizada para generar la turbulencia y C_2 es otra constante que depende de la ubicación del origen de coordenadas.

Información experimental adicional, llevó a Taylor a considerar que la escala de longitudes varía linealmente con la distancia (Dryden, 1943), obteniendo:

$$\frac{U}{u} - \frac{U}{u_0} = \frac{A}{c} \ln \left(1 + \frac{c}{l_0} (x - x_0) \right) \quad (4)$$

donde l_0 y u_0 corresponden al valor de la escala de longitud e intensidad turbulenta en la posición x_0 , respectivamente. A es una constante de proporcionalidad y c es la tasa de variación de l con x .

Estudios posteriores sugirieron otra ley de variación de l , dada por $\frac{U}{u} \frac{dl}{dx} = B$, siendo B una constante de proporcionalidad, similar a A , resultando:

$$\frac{u_0}{u} = \left(1 + \frac{(A+B)u_0}{l_0 U} (x - x_0) \right)^{\frac{A}{A+B}} \quad (5)$$

En su trabajo, Dryden reporta los valores $A = B = 0,2056$, con lo que $u^{-2} \sim x$. Este resultado también se obtiene mediante un análisis del transporte de las funciones de correlación de las fluctuaciones de velocidad (Dryden, 1943).

von Kármán y Howarth (1938) dedujeron una ecuación que ellos llamaron "la ecuación fundamental para la propagación" de la función de autocorrelación de u' , a partir de la cual puede obtenerse, como un caso particular, la expresión del decaimiento de la energía deducida por Taylor. Estos autores también deducen "una solución posible para números de Reynolds grandes" dada por:

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-p} \quad (6)$$

donde t indica el tiempo y u_0 corresponde al valor de u para $t = t_0$. El exponente $-p$ de la Ec. 6,

fue expresado por los autores en términos de otras constantes, que no fueron evaluadas en su artículo. El tiempo t puede ligarse con la coordenada x mediante la velocidad de convección U a través de $t = t_0 + x/U$.

Kolmogoroff (1941) a partir de un análisis de los momentos de segundo orden de las velocidades en un campo de turbulencia isotrópica, encontró el comportamiento del decaimiento de la intensidad turbulenta para el caso límite de números de Reynolds pequeños (o, equivalentemente, para el estado final de decaimiento de la turbulencia):

$$u = A_1 t^{-5/4} \quad (7)$$

Para números de Reynolds grandes dedujo:

$$u = A_2 (t - t_0)^{-5/7} \quad (8)$$

donde A_1 y A_2 son constantes.

Lin (1948), mediante consideraciones de autopreservación de las funciones que definen las correlaciones doble y triple de las fluctuaciones de velocidad obtuvo:

$$u^2 = A_3 (t - t_0)^{-1} + A_4 \quad (9)$$

donde A_3 y A_4 son constantes.

Muchas de las relaciones anteriores fueron cotejadas por sus propios autores con datos experimentales proveniente de turbulencia generada por el flujo a través de grillas en túneles de viento. A mediados de siglo comenzó a experimentarse en estanques con agua agitada por grillas oscilantes, principalmente con el objeto de estudiar fenómenos de mezcla (Rouse y Dodu, 1955). Una de las características de este tipo de instalación es que no existe flujo medio en ella.

Bouvard y Dumas (1967), basados en información experimental obtenidas por ellos en un estanque agitado con una grilla, encuentran que en la región de turbulencia isotrópica, el producto $k\lambda^2$ se mantiene constante. Utilizando este antecedente, deducen la siguiente ecuación para la difusión de la energía turbulenta:

$$\frac{d^2 k}{dz^2} = A_5 k^2 \quad (10)$$

siendo A_5 una constante que debe ser determinada experimentalmente. Se utiliza el eje z como eje de coordenadas debido a que en los estanques agitados la distancia a la fuente donde se genera la turbulencia se mide en la vertical. La solución de la Ec. 10 involucra integrales elípticas y aunque los autores no presentan explícitamente la solución, la grafican junto a sus datos experimentales. El coeficiente A_5 fue determinado de tal manera que la curva presente el mejor ajuste a las mediciones.

Usando la ecuación de transporte de la energía cinética turbulenta, y considerando una dependencia lineal entre la escala l y la distancia z , $l = \beta z$, Thompson y Turner (1975) obtuvieron una relación que puede considerarse equivalente a la de von Kármán y Howarth (1938):

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{z}{z_0} \right)^{-r} \quad (11)$$

donde z_0 es la ubicación a la que se tiene una intensidad turbulenta u_0 . La turbulencia en las experiencias de Thompson y Turner se generaba mediante la oscilación de una grilla en el fondo del estanque, proponiendo estos autores un valor $r = 3/2$. Posteriormente, Hopfinger y Toly (1976) cuestionan este valor del exponente, y usando sus propios valores experimentales junto a los de Thompson y Turner proponen $r = 1$. Este valor del exponente también ha sido verificado por Grisenti y George (1991) para turbulencia generada por microchorros que salen desde el fondo del estanque.

Sonin et al. (1986) mediante la aplicación de un modelo $k-\epsilon$ de una ecuación y suponiendo que la escala de longitud en la zona de turbulencia isotrópica es constante, obtuvo que el decaimiento de la energía cinética generada por un chorro que sale desde el fondo de un estanque cilíndrico está dado por

$$\frac{k^{1/2}}{k_0^{1/2}} = \exp(-A_6 (z - z_0)) \quad (12)$$

donde A_6 es una constante que depende del diámetro del estanque, la escala de longitud y ciertas constantes inherentes al modelo $k-\epsilon$. Puede elegirse $z_0 = 0$ al valor de la coordenada donde la energía cinética turbulenta toma un valor k_0 .

3.- APLICACION DEL METODO $k-\epsilon$ DE DOS ECUACIONES AL PROBLEMA DEL DECAIMIENTO DE LA TURBULENCIA

Manipulando las ecuaciones de Navier-Stokes es posible obtener ecuaciones de transporte tanto para la energía cinética turbulenta, k , como para la tasa de disipación de energía por efectos viscosos, ϵ , ambas por unidad de masa. En el modelo $k-\epsilon$ de dos ecuaciones, estas ecuaciones están dadas por (Rodi, 1984):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \epsilon \quad (13)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (14)$$

En las ecuaciones anteriores v_t corresponde a un coeficiente de viscosidad turbulenta, definido como

$$v_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (15)$$

Los parámetros σ_k , σ_ε , $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$ y C_μ son constantes empíricas.

Considerar el flujo en un estanque agitado, con efecto de paredes despreciable es equivalente a considerar un flujo estacionario con velocidades medias nulas y la existencia de homogeneidad de la turbulencia en planos horizontales. Si z es el eje normal al fondo del estanque, las Ecs. 15 y 16 se reducen a:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) - \varepsilon = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} = 0 \quad (17)$$

Luego, el sistema a resolver es el dado por las Ecs. 15, 16 y 17, siendo las incógnitas k , ε y v_t .

Si L , k_0 y ε_0 son valores característicos de referencia para la longitud, la energía cinética turbulenta y la tasa de disipación de energía, respectivamente, pueden definirse las siguientes variables adimensionales:

$$z^* = \frac{z}{L} \quad k^* = \frac{k}{k_0} \quad \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad (18)$$

Definiendo una viscosidad turbulenta característica de referencia como $v_{t0} = C_\mu \frac{k_0^2}{\varepsilon_0}$, una

expresión para la viscosidad turbulenta adimensional es:

$$v_t^* = \frac{v_t}{v_{t0}} = \frac{k^{*2}}{\varepsilon^*} \quad (19)$$

Eliminando el supra asterisco para designar a las variables adimensionales, las Ecs. 15, 16 y 17 se transforman en:

$$v_t = \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (20)$$

$$A \frac{\partial}{\partial z} \left(v_t \frac{\partial k}{\partial z} \right) - \varepsilon = 0 \quad (21)$$

$$B \frac{\partial}{\partial z} \left(v_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) - \frac{\varepsilon^2}{k} = 0 \quad (22)$$

donde $A = \frac{C_\mu}{\sigma_k} P$, $B = \frac{C_\mu}{\sigma_\varepsilon C_{2\varepsilon}} P$, $P = \frac{k_0^3}{L^2 \varepsilon_0^2}$.

Considerando una región suficientemente alejada del fondo, en la que pueda considerarse que la viscosidad turbulenta se mantiene aproximadamente constante, derivando dos veces la Ec. 21 con respecto a z y reemplazándola en la Ec. 22, esta última se reduce a:

$$ABv_t^4 \frac{d^4 k}{dz^4} - k^3 = 0 \quad (23)$$

Una solución que satisface la condición de borde $z \rightarrow \infty$, $k \rightarrow 0$ es:

$$k = \sqrt{120AB} v_t^2 z^{-2} \quad (24)$$

Todos los parámetros involucrados en la Ec. 24 son de naturaleza empírica, por lo que pueden reemplazarse por uno solo, a , el que será determinado a partir de los datos experimentales. De este modo,

$$k = az^{-2} \quad (25)$$

Por lo tanto, de acuerdo a la Ec. 20:

$$\varepsilon = bz^{-4} \quad (26)$$

siendo b otro parámetro que debe determinarse experimentalmente.

4.- ANTECEDENTES EXPERIMENTALES

Con el objeto de determinar la constante de proporcionalidad de la Ec. 25 para el caso de un estanque agitado por microchorros, se utilizará la información experimental obtenida por Pujol (1999). Detalles de la instalación, así como de las condiciones experimentales, se dan en otro artículo presentado a este Congreso (Pujol y Tamburrino, 1999). Para adimensionalizar la energía cinética turbulenta y la coordenada, se consideró $k_0 = \frac{1}{2} U_C^2$ y $L = \frac{\sqrt{x}}{2} D$, respectivamente, donde U_C corresponde a la velocidad media de salida de los microchorros y D

al diámetro de ellos. El valor de L utilizado corresponde a una longitud que surge en forma natural al caracterizar a los microchorros, si se considera que ellos quedan completamente definidos a partir de un flujo volumétrico inicial y un momentum específico inicial.

Los datos de Pujol (1999) se presentan en la Fig. 1, junto a la curva definida por la Ec. 25. El mejor ajuste de los datos experimentales da un valor para el coeficiente $a = 5,07$. Claramente los datos siguen la proporcionalidad $k \sim z^{-2}$, como lo establece la Ec. 25. Hay que tener presente que esta relación es sólo una solución particular de la Ec. 23 y no la solución general. Es interesante notar que esta solución particular también lo es de la ecuación diferencial propuesta por Bouvard y Dumas (1967).

5.- CONCLUSION

En el presente trabajo se ha utilizado un modelo k- ϵ de dos ecuaciones para determinar el decaimiento espacial de la energía cinética turbulenta en un campo de turbulencia isotrópica, con flujo neto igual a cero. El sistema de ecuaciones diferenciales al que se llega admite una solución analítica si se supone que el coeficiente de viscosidad turbulenta puede considerarse constante, resultando que la energía cinética turbulenta decae de una manera proporcional al inverso del cuadrado de la distancia ($k = a z^{-2}$). Este resultado ha sido obtenido por otros autores y se ha corroborado experimentalmente en estanques agitados con grillas o microchorros. Datos experimentales obtenidos recientemente y que se presentan en otro trabajo de este Congreso también confirman esta dependencia de k con z. El coeficiente de proporcionalidad, a, se determinó para una configuración particular de los microchorros, siendo necesario experimentación adicional para confirmar su universalidad o su dependencia con alguna otra variable, en particular la distribución de los eyectores.

REFERENCIAS

DRYDEN, H.L. (1943) "A review of the statistical theory of turbulence", Quart. Appl. Math., vol. 1, pp. 7-42. Reimpreso en *Turbulence. Classic papers on statistical theory.*, Edts. S.K. Friedlander y L. Topper, Interscience Pub., Inc., New York, 1961.

GRISENTI and GEORGE (1991) "Hydrodynamics and mass transfer in a jet-agitated vessel", en *Air-Water Mass Transfer*, S.C. Wilhelms and J.S. Gulliver, A.S.C.E., pp. 94-105.

HOPFINGER, E.J. and J.-A. TOLLY (1976), "Spatially decaying turbulence and its relation to mixing across density interfaces", *J. Fluid Mech.*, vol 78, part 1, pp. 155-175.

KOLMOGOROFF, A.N. (1941) "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers", *Comptes Rendus de l'Academie des sciences de l'U.R.S.S.*, vol 30, pp.301-305. Reimpreso en *Turbulence. Classic papers on statistical theory.*, Edts. S.K. Friedlander y L. Topper, Interscience Pub., Inc., New York, 1961.

LIN, C.C. (1948) "Note on the law of decay of isotropic turbulence", *Proc. Nat. Acad. Science*, vol 34, pp.540-543. Reimpreso en *Turbulence. Classic papers on statistical theory.*, Edts. S.K. Friedlander y L. Topper, Interscience Pub., Inc., New York, 1961.

PUJOL, J. (1999), "Estructura Turbulenta de un Chorro Generado por Microchorros", Memoria para optar al Título de Ingeniero Civil. Universidad de Chile.

PUJOL, J. y A. TAMBURRINO (1999), "Estructura Turbulenta de un Chorro Generado por Microchorros", XIV Congreso Chileno de Hidráulica, Santiago, 3-5 Noviembre.

RODI, W. (1984), *Turbulence Models and their Application in Hydraulics*, State-of-the-Art Paper, I.A.H.R., Second Edition.

ROUSE, H. et J. DODU (1955) "Diffusion turbulente à travers une discontinuité de densité", *La Houille Blanche*, No. 4, pp. 522-532.

SONIN, A.A.; M.A. SHIMKO and H.-H. CHUN (1986) "Vapor condensation onto a turbulent liquid - I. The steady condensation rate as a function of liquid-side turbulence", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol 29, No. 9, pp. 1319-1332.

TAYLOR, G.I. (1935) "Statistical theory of turbulence. Parts I-IV", *Proc. Royal Soc.* vol A151, pp.421-478. Reimpreso en *Turbulence. Classic papers on statistical theory.*, Edts. S.K. Friedlander y L. Topper, Interscience Pub., Inc., New York, 1961.

THOMPSON, S.M. and J.S. TURNER (1975) "Mixing across an interface due to turbulence generated by an oscillating grid", *J. Fluid Mech.*, vol 67, part 2, pp. 349-368.

VON KARMAN, T. and L. HOWARTH (1938) "On the statistical theory of isotropic turbulence", *Proc. Royal Soc.*, vol A164, pp. 192-215. Reimpreso en *Turbulence. Classic papers on statistical theory.*, Edts. S.K. Friedlander y L. Topper, Interscience Pub., Inc., New York, 1961.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo brindado por CONICYT a través de los proyectos de investigación FONDECYT No. 1990025 y FONDAP de Mecánica Matemática.

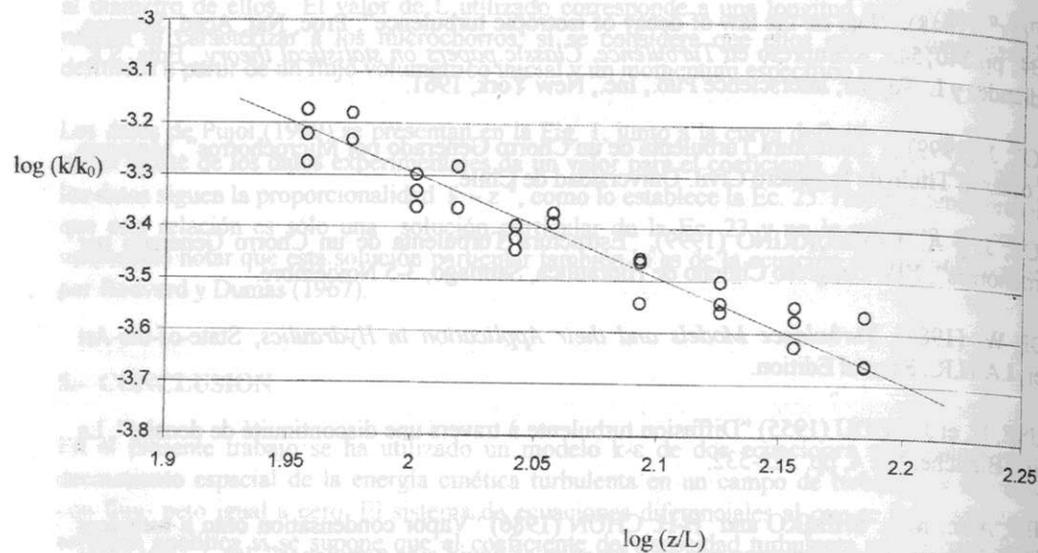


Fig. 1.- DECAIMIENTO DE LA ENERGIA CINETICA TURBULENTA EN UN ESTANQUE AGITADO POR MICROCHORROS.
Datos de Pujol (1999)

MODELACION k-ε DE LA RESUSPENSION DE SEDIMENTOS INDUCIDA POR EL VIENTO

INGRID HILLMER¹
YARKO NIÑO²

RESUMEN

Se presentan resultados de una modelación numérica del proceso de resuspensión de sedimentos desde el lecho de un cuerpo de agua, inducido por la acción del viento soplando sobre la superficie libre. El fenómeno es modelado utilizando una versión cuasi-bidimensional de las ecuaciones de Reynolds, acopladas con un modelo de cierre de la turbulencia de tipo k-ε, y la ecuación de continuidad de sedimento. El modelo matemático es resuelto numéricamente usando el método de los volúmenes de control. Los resultados de la simulación respecto de las corrientes de circulación generadas por el viento en el cuerpo de agua son validados a partir de datos experimentales. Estos resultados predicen la existencia de seiches, durante los cuales el esfuerzo de corte sobre el fondo oscila hasta alcanzar un valor constante, asintóticamente en el tiempo. Este esfuerzo de corte es capaz de generar la resuspensión de sedimento desde el lecho. El modelo permite determinar la distribución vertical de concentración de sedimento en suspensión en el cuerpo de agua, la que depende del esfuerzo de corte inducido por el viento en la superficie libre, la profundidad del flujo y el tamaño de las partículas de sedimento del lecho. Para ciertas condiciones de flujo y tamaño de partículas, que implican una concentración extremadamente alta de sedimento en las cercanías del lecho, las simulaciones muestran la formación de una estratificación del flujo con la presencia de una interfaz de densidad, conocida como lutoclina. Los resultados de las simulaciones son utilizados para determinar una expresión que permite estimar la concentración de sedimento en las cercanías del lecho, basada en el esfuerzo de corte ejercido por el viento, la profundidad del flujo y el tamaño de las partículas de sedimento del lecho.

¹Instructor, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile

²Profesor Asistente, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile