

Fig. 6. Comparación entre alturas modeladas y observadas para la sección $x=10.20$ m.

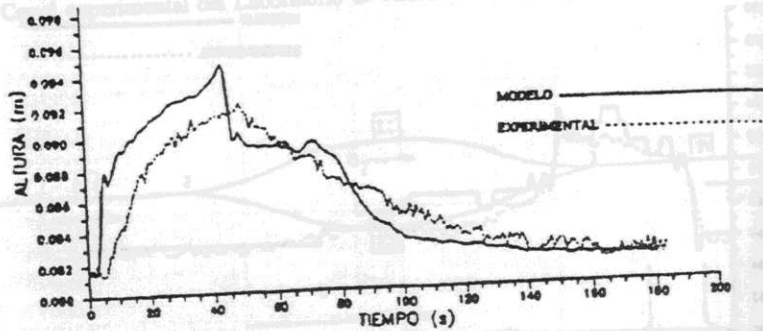


Fig. 7. Comparación entre alturas modeladas y observadas para la sección $x=0.85$ m, (Tram

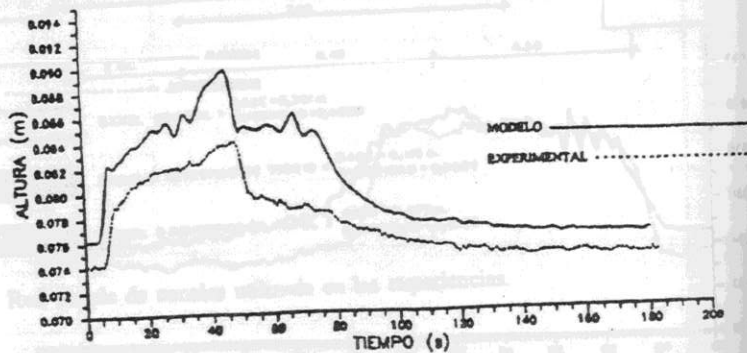


Fig. 8. Comparación entre alturas modeladas y observadas para la sección $x=3.65$ m, (Tram

1.4.- PERFIL DE CONCENTRACIONES EN LA CERCANÍA DE LA SUPERFICIE LIBRE EN CANALES

ALDO TAMBURRINO T.¹
FRANCISCO SANDOVAL A.²

RESUMEN

El perfil de concentraciones de un gas disuelto en una corriente de agua se determina en forma analítica al modificar un análisis efectuado anteriormente por Schulz y Schulz (1991). La modificación consiste en el uso de un coeficiente de difusión turbulenta que varía cuadráticamente con la distancia a la superficie libre en vez de una variación lineal, como se hizo en el análisis original. Esta modificación se debe a que el comportamiento lineal es válido para fenómenos de transferencia en la cercanía de fronteras sólidas, pudiendo demostrarse que muy cerca de la superficie libre la variación es cuadrática, lo que hace que el proceso de transporte turbulento sea más efectivo que el obtenido por Schulz y Schulz.

¹Ingeniero Civil, Ph.D., Profesor Asistente
²Ayudante de Investigación
División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.

1.- INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

La cantidad de oxígeno disuelto en un cauce puede verse disminuído por diversos factores, tales como la descarga de aguas servidas, residuos industriales, etc., muchas veces entrando en conflicto con la preservación de la biota, la que requiere de ciertos niveles mínimos de oxígeno disuelto en el agua. Este oxígeno es obtenido desde la atmósfera mediante un proceso de transferencia gas que se conoce con el nombre de reaeración. La determinación del flujo de gas a través de la interfase es prácticamente imposible en forma analítica e involucra las ecuaciones de difusión y de momentum. La complejidad se ve aumentada al considerar la naturaleza turbulenta del escurrimiento. Es por esto que para la solución práctica se ha optado por la modelación de la tasa de reaeración en término de algunas cantidades globales del flujo. Estas relaciones generalmente se expresan en término de la concentración de saturación del oxígeno, de la concentración de oxígeno en el seno del fluido y un coeficiente de transferencia de transporte, el que en general depende de las características del flujo, del fluido y del gas. Debido a la eficiente capacidad de mezcla de los flujos turbulentos, la concentración del gas disuelto puede considerarse uniforme en prácticamente todo el seno del fluido, excepto de una delgada zona muy cerca de la superficie libre, la que constituye una capa límite de concentración y que ensambla la concentración desde su valor de saturación en la superficie libre al valor de existente en el seno del fluido (ver Fig. 1).

La modelación del transporte turbulento de masa tiene las mismas dificultades que la modelación del flujo turbulento en cuanto a que al trabajar con valores medios temporales, de alguna manera deben ser modelados los términos que se derivan de las fluctuaciones turbulentas. La modelación más simple corresponde a una del tipo de Boussinesq, la que se realiza mediante la definición de un coeficiente de difusión turbulenta, en analogía al transporte de origen molecular, en la que el flujo de masa es proporcional al gradiente de concentración.

En una corriente turbulenta, el coeficiente de difusión turbulenta domina sobre el molecular prácticamente en todo el dominio espacial del flujo, por lo que a menudo se desprecian los efectos moleculares. Sin embargo, muy cerca de la superficie libre existe un amortiguamiento de las fluctuaciones turbulentas de velocidad y una disminución de las escalas del flujo, decreciendo el dominio de los efectos turbulentos sobre los moleculares, los que se hacen cada vez más importantes a medida que se alcanza la superficie libre. Schulz y Schulz (1991), modelaron el perfil medio de concentración en la cercanía de la superficie libre así como la intensidad de las fluctuaciones de concentración mediante un coeficiente de difusión global compuesto por el coeficiente de difusión molecular más el turbulento. Este último es expandido en series, la que es truncada en el término de orden 1 para su posterior análisis. Esta aproximación, sin embargo, es válida para una condición de borde impuesta por la cercanía de una frontera fija, pero es errónea para una condición definida por una superficie libre, la que requiere que el coeficiente de difusión turbulenta varíe cuadráticamente con la distancia a la superficie libre.

El objetivo de este trabajo es corregir el análisis realizado por Schulz y Schulz al rederivar la distribución de la concentración media y su intensidad de fluctuación turbulenta considerando el adecuado comportamiento del coeficiente de difusión turbulenta en la cercanía de la superficie libre.

2.- ECUACIONES QUE RIGEN EL PROBLEMA

La ecuación (sin términos advectivos) para transferencia de masa en un flujo turbulento en una dimensión está dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\epsilon(x) \frac{\partial C}{\partial x} \right] \quad (1)$$

donde C es la concentración media de oxígeno disuelto en el agua a una distancia x de la superficie libre, t es el tiempo y $\epsilon(x)$ es el coeficiente global de difusión. La exclusión de los términos advectivos se justifica al tomar un sistema de referencia solidario a la superficie libre y considerar que el espesor de la capa límite de concentración es pequeño, por lo que allí la velocidad puede considerarse constante en la dirección normal a la superficie.

Considerando que la concentración en la región donde dominan los efectos turbulentos es constante e igual a C_B , y que el espesor de la capa límite de concentración es e , el problema matemático consiste en resolver la ecuación anterior con las siguientes condiciones de borde e inicial:

$$\begin{aligned} x=0, \quad C &= C_s, \quad \forall t \\ x=e, \quad C &= C_B, \quad \forall t \\ t=0, \quad C &= C(x), \quad 0 < x < e \end{aligned} \quad (2)$$

donde C_s es la concentración de saturación del oxígeno en el agua. La Ec. (1) con las condiciones de borde e inicial dadas por (2) puede resolverse mediante la técnica de separación de variables. De este modo, definiendo $C^* = C - C_s$ y considerando $C^* = X(x)T(t)$, la ecuación de transferencia de masa se reduce a dos ecuaciones diferenciales a derivadas totales:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \sigma \quad (3)$$

$$\epsilon \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{d\epsilon}{dx} \frac{dX}{dx} - \sigma X = 0 \quad (4)$$

La constante σ en las Ecs. (3) y (4) puede conocerse al considerar que la variación de concentración en la masa turbulenta de fluido, C_B , está dada por la ecuación de reaeración:

$$\frac{dC_B}{dt} = K(C_s - C_B) \quad (5)$$

donde K es el coeficiente de reoxigenación. La solución de la Ec. (5) es inmediata:

$$\frac{C_B - C_s}{C_0 - C_s} = e^{-Kt} \quad (6)$$

donde C_0 es la concentración inicial de oxígeno. Schulz y Schulz proponen también que para un instante de tiempo dado, el perfil de concentración puede escribirse como

$$\frac{C - C_B}{C_s - C_B} = f \quad (7)$$

donde f es una función de la distancia a la superficie libre, x . Despejando C_B de la Ec. (6) reemplazando en la Ec. (7) resulta la siguiente distribución de concentración:

$$\frac{C - C_s}{C_0 - C_s} (1 - f) e^{-\kappa x} \quad (8)$$

La integración de la Ec. (3) conduce a

$$T = T_0 e^{\sigma x} \quad (9)$$

De este modo, identificando términos se concluye que:

$$\begin{aligned} T_0 &= C_0 - C_s \\ \sigma &= -K \\ X &= 1 - f \end{aligned} \quad (10)$$

Para resolver la ecuación anterior debe conocerse el coeficiente de difusión global. Schulz y Schulz lo expresan como:

$$\epsilon \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d \epsilon}{dx} \frac{df}{dx} + K(f - 1) = 0 \quad (11)$$

Hay que notar que la variación de la concentración con la distancia x continúa sin conocerse ya que f no se conoce y debe ser determinada a partir de la Ec. 4, la que en términos de f se escribe como:

$$\epsilon = D + ax \quad (12)$$

donde D es el coeficiente de difusión molecular y el producto ax corresponde al coeficiente de difusión turbulenta. Las condiciones requeridas para resolver la Ec. 11 son:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad C &= C_s, \quad f = 1 \\ x = e, \quad C &= C_B, \quad f = 0 \\ x = e, \quad \frac{\partial C}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Las dos primeras condiciones corresponden a las condiciones de borde de la ecuación diferencial, en tanto que la tercera condición permite definir el valor del coeficiente a del término de la difusión turbulenta. La Ec. (11) con ϵ definido por la Ec. 12 y las condiciones dadas por (13) tiene una solución analítica, la que puede expresarse en términos de series de potencias de x .

Finalmente, considerando que las fluctuaciones de concentración en la capa límite de concentración pueden modelarse como una onda cuadrada de frecuencia aleatoria de amplitud $(C_s - C_B)$ y despreciando el efecto amortiguador de la difusión molecular, Schulz y Schulz demuestran que la intensidad de las fluctuaciones turbulentas de concentración, c' , está dada por

$$\frac{c'}{C_s - C_B} = \sqrt{(1 - f)f} \quad (14)$$

Modificación del término de difusión global

Sin perder generalidad, el coeficiente de difusión turbulenta, D_T , puede modelarse como el producto de una velocidad y una escala características, $\overline{U} \overline{L}$, respectivamente:

$$D_T = \overline{U} \overline{L} \quad (15)$$

Como velocidad característica puede tomarse el valor cuadrático medio de las fluctuaciones turbulentas de velocidad en la dirección x (u'). La escala de longitudes puede modelarse mediante el concepto de longitud de mezcla, el que puede suponerse proporcional a la distancia de la superficie libre. Expandiendo las componentes de velocidad instantánea en potencias de x , imponiendo la condición que u' es cero en la superficie libre (considerando un sistema de referencia ligado a la superficie) así como las condiciones dinámicas en la superficie, puede demostrarse que muy cerca de la superficie libre se cumple

$$\begin{aligned} u' &= \alpha x \\ v' &= \beta \\ w' &= \gamma \end{aligned} \quad (16)$$

donde α, β y γ son funciones de (y, z) . De este modo, resulta la siguiente proporcionalidad para el coeficiente de difusión turbulenta: $D_T \propto x^2$. Introduciendo un coeficiente de proporcionalidad a , se tiene que el coeficiente de difusión global puede escribirse como

$$\epsilon = D + ax^2 \quad (19)$$

Reemplazando la relación anterior en la Ec. (11), se tiene la ecuación que permite determinar el perfil de concentraciones:

$$(D + ax^2) \frac{d^2 f}{dx^2} + 2ax \frac{df}{dx} + K(f - 1) = 0 \quad (20)$$

Se definen las variables adimensionales:

$$\begin{aligned} x^+ &= \sqrt{\frac{K(D + ax^2)}{Da}} \\ x_{\min}^+ &= \sqrt{\frac{K}{a}} \\ x_{\max}^+ &= \sqrt{\frac{K(D + ae^2)}{Da}} \\ e^+ &= x_{\max}^+ - x_{\min}^+ \end{aligned} \quad (21)$$

La Ec. (20) en término de las variables adimensionales queda:

$$\left(\left(\frac{x^+}{x_{\min}^+} \right)^2 - 1 \right) \frac{d^2 f}{dx^{+2}} + \frac{1}{x^+} \left(2 \left(\frac{x^+}{x_{\min}^+} \right)^2 - 1 \right) \frac{df}{dx^+} + (f - 1) = 0 \quad (22)$$

3.- RESULTADOS

La Ec. (22) se resolvió mediante el método de Runge-Kutta, y el resultado se muestra en las Figs. 2 y 3. En la primera, f está dado como una función de la diferencia $(x_{\max}^+ - x_{\min}^+)$ y con x_{\max}^+ como parámetro. En la Fig. 3, la abscisa se ha normalizado con e^+ , resultando un colapso de las curvas para los distintos valores de x_{\max}^+ .

Una comparación con los resultados obtenidos al considerar una variación lineal del coeficiente de difusión global se presenta en las Figs. 4a y 4b. En ellas se ve el incremento en la efectividad del proceso de transporte turbulento como resultado de una variación cuadrática de la difusión turbulenta. La distribución de concentración rápidamente tiende al valor de la concentración existente en el seno del fluido, C_B , teniendo una diferencia del 5% dentro del primer 10% de capa límite de concentración.

El valor de x_{min}^* es despreciable frente a x_{max}^* , por lo que e^* está prácticamente definido sólo por x_{max}^* . Un resumen de la relación existente entre x_{min}^* , x_{max}^* y e^* se presenta en la Tabla 1. Se observa que el factor a del coeficiente de difusión turbulenta puede llegar a ser varios órdenes de magnitud mayor que el coeficiente de reeración K . Esto también indica que la región en la que los efectos moleculares dominan sobre los turbulentos es realmente despreciable. En efecto, la distancia x_0^* a la cual la difusión turbulenta es igual a la difusión molecular está dada por

$$x_0^* = \sqrt{2}x_{min}^* \quad (23)$$

TABLA 1.- VALORES DE x_{min}^* , x_{max}^* Y e^*

x_{max}^*	x_{min}^*	e^*
0.1	10^{-7}	0,1000
1	10^{-5}	1,0000
10	10^{-4}	9,9999
100	10^{-3}	99,999
1000	10^{-2}	999,99
10000	10^{-1}	9999,9

La intensidad relativa de las fluctuaciones turbulentas de concentración se presenta en Fig. 5 como función de la diferencia $(x^* - x_{min}^*)$ y en la Fig. 6 la abscisa se ha normalizado colapsando las curvas para los distintos valores de x_{max}^* en una sola. Se aprecia independientemente del valor del parámetro x_{max}^* , la intensidad relativa de las fluctuaciones de concentración alcanza un valor máximo aproximadamente igual a 0,5, el que se ubica muy cerca de la superficie libre. Debido a que en la derivación de la expresión para la fluctuación de concentración no se consideró el efecto molecular, en la práctica este máximo debería encontrarse algo más alejado de la superficie. Del mismo modo, efectos moleculares harán que el máximo sea menor que el acá determinado. Es interesante notar que considerando la Ec. (12) en lugar de la (19), Schulz y Schulz también obtienen un valor máximo de alrededor 0,5 para la intensidad normalizada.

Es interesante notar que la variación de la intensidad de las fluctuaciones turbulentas comporta de una manera similar a como lo hace la intensidad de las fluctuaciones de la componente longitudinal de la velocidad en la cercanía de una pared rígida, vale decir, la intensidad de las fluctuaciones es nula en la pared, aumenta bruscamente hasta alcanzar un máximo (entre 0,1 y 0,3 veces la velocidad media del escurrimiento, dependiendo del número de Reynolds del flujo) para luego decaer exponencialmente.

4.- CONCLUSIÓN

Este trabajo se basa en el análisis de Schulz y Schulz (1991) para determinar el perfil de las concentraciones e intensidad de las fluctuaciones turbulentas de concentración, en la cercanía de la superficie libre. El flujo turbulento de masa se modela mediante un coeficiente de difusión turbulenta, el que Schulz y Schulz consideran que varía linealmente con la distancia a la superficie libre. Esta suposición, sin embargo es errónea ya que puede demostrarse que la variación es cuadrática (una variación lineal corresponde al caso de flujo de gas a través de una frontera rígida, la que amortigua las fluctuaciones de velocidad). Un reanálisis considerando la variación cuadrática permite concluir que el proceso de transporte turbulento es aún más efectivo que el obtenido por Schulz y Schulz por cuanto el perfil de concentración se acerca más rápidamente al valor de la concentración existente en el seno del flujo. La intensidad de las fluctuaciones también presenta un comportamiento similar, con un valor máximo prácticamente idéntico, el que se alcanza muy cerca de la superficie libre.

Agradecimientos

El autor agradece el financiamiento otorgado por FONDECYT mediante el Proyecto de Investigación No. 1960987.

REFERENCIAS

- SCHULZ, H.E. y S.A.G. SCHULZ (1991) «Modelling Below-Surface Characteristics in Water Reaeration», en Water Pollution: Modelling, Measuring and Prediction, L.C. Wrobel y C.A. Brebbia (Eds.), CMP y Elsevier Applied Science, pp.441-454.

Fig. 1 Definición del Problema

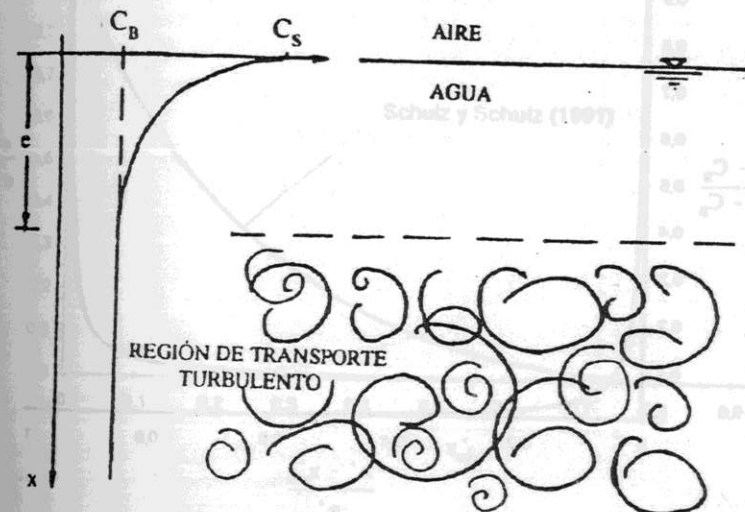


Fig. 2 Variación de la Concentración con la Profundidad

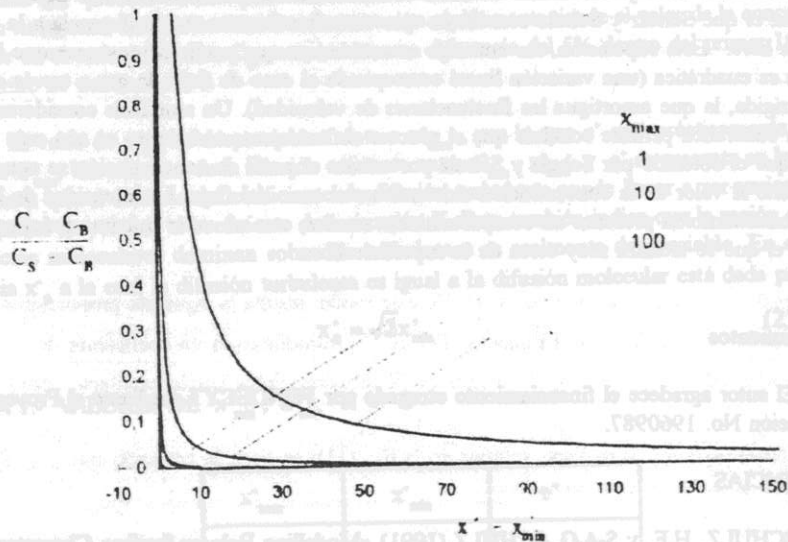


Fig. 3 Variación de la Concentración con la Profundidad Normalizada

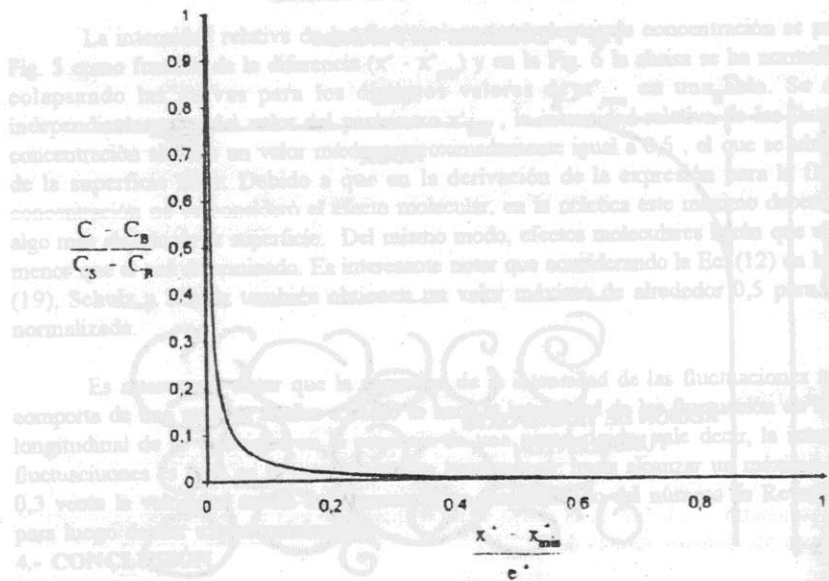


Fig. 4 Comparación de la Distribución de Concentración obtenida en este trabajo con la de Schulz y Schulz (1991)

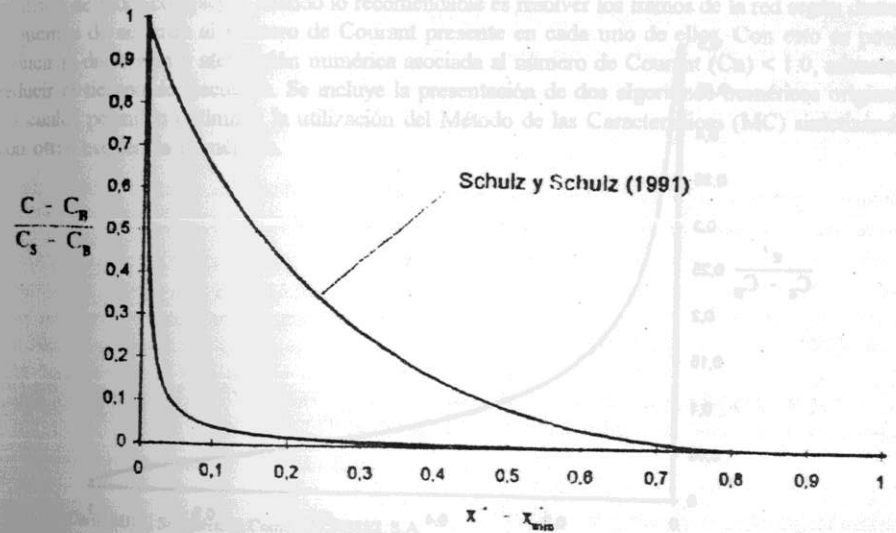
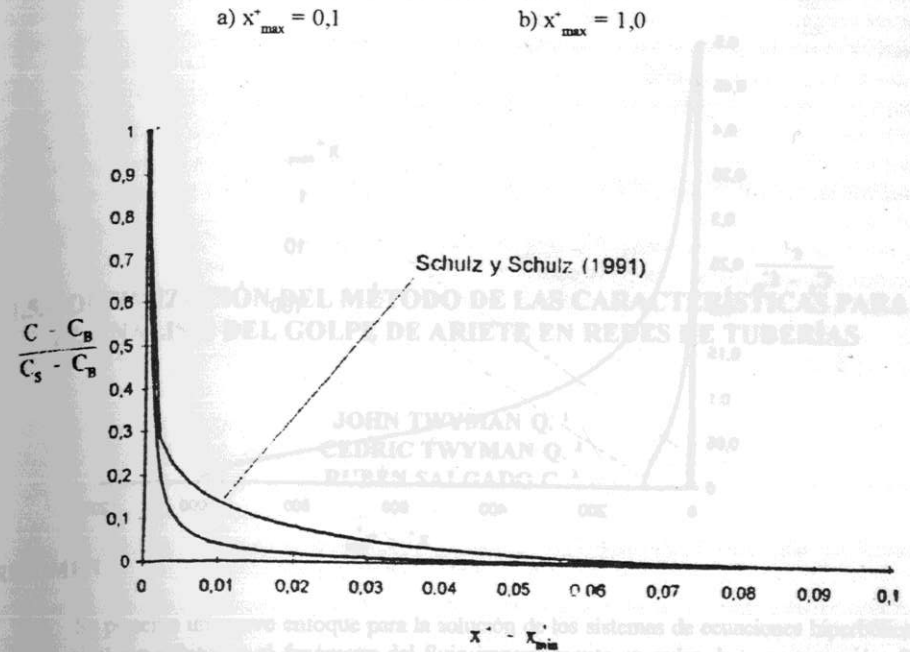


Fig. 5 Variación de la Intensidad de las Fluctuaciones Turbulentas de Concentración con la Profundidad

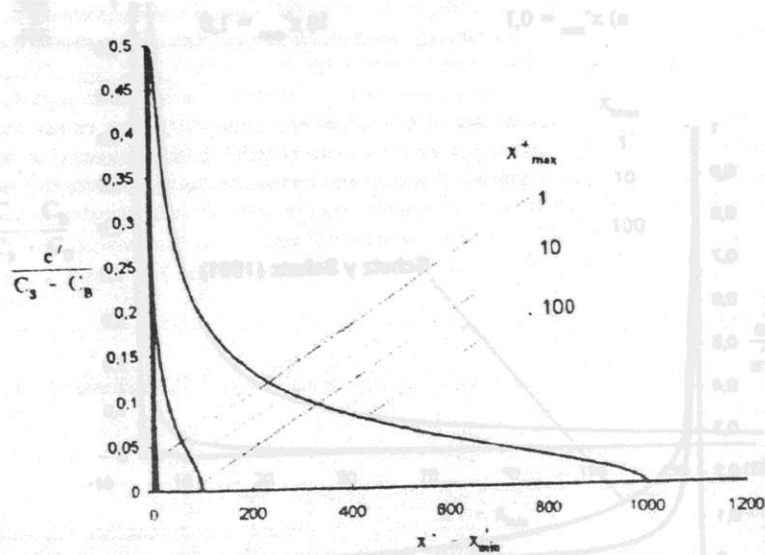
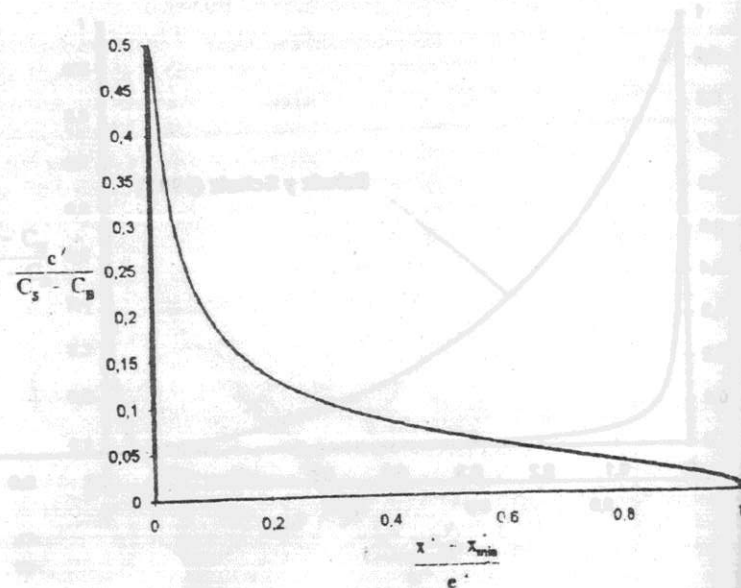


Fig. 6 Variación de la Intensidad de las Fluctuaciones Turbulentas de Concentración con la Profundidad Normalizada



1.5.- OPTIMIZACIÓN DEL MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS PARA EL ANÁLISIS DEL GOLPE DE ARIETE EN REDES DE TUBERÍAS

JOHN TWYMAN Q. ¹

CEDRIC TWYMAN Q. ²

RUBÉN SALGADO C. ³

RESUMEN

Se presenta un nuevo enfoque para la solución de los sistemas de ecuaciones hiperbólicas cuasi-lineales que gobiernan el fenómeno del flujo impermanente en redes de agua a presión. Se demostrará lo ineficiente que resulta en algunos casos aplicar un único esquema numérico para la solución de redes complejas, cuando lo recomendable es resolver los tramos de la red según distintos esquemas de acuerdo al número de Courant presente en cada uno de ellos. Con esto es posible reducir la dispersión y atenuación numérica asociada al número de Courant ($C_n < 1.0$), además de reducir el tiempo de ejecución. Se incluye la presentación de dos algoritmos numéricos originales, los cuales permiten optimizar la utilización del Método de las Características (MC) sintetizándolo con otros esquemas numéricos.

¹ Ingeniero Civil, MBA, Subgerencia Comercial, ESSEL S.A.

² Ingeniero Civil, MBA, Gerencia de Operaciones, ESSEL S.A.

³ Ingeniero Civil, MBA, Gerente de Operaciones, ESSEL S.A.