

**SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA
XI CONGRESO CHILENO**

**GOLPE DE ARIETE EN ESTACIONES DE BOMBEO
UNA METODOLOGIA ALTERNATIVA**

Fernando Monsalve Contreras

RESUMEN

Este artículo propone un método alternativo, desarrollado por el autor, para resolver la condición de borde constituida por las bombas en una impulsión al aplicar el Método de las Características en el problema de golpe de ariete, considerada más simple que las expuestas en textos especializados sobre el tema. Tiene también la ventaja de operar con las curvas de la bomba suministrada por el fabricante a través de catálogos y no con valores paramétricos obtenidos de ensayo en modelo de bombas, los cuales son escasos.

**Ingeniero Civil. Universidad de Chile.
CADE - IDEPE Consultores en Ingeniería**

1.- INTRODUCCION

Este artículo tiene por finalidad hacer un análisis del fenómeno de golpe de ariete con las condiciones de contorno referente a bombas cuando el problema es resuelto mediante el Método de las Características empleando la forma homóloga de la curva de la(s) bomba(s).

Esta forma de resolver el problema es una alternativa de la metodología presentada en los libros especializados de transientes hidráulicos (Ref 1,2,3) que consiste en trabajar con parámetros adimensionales de las curvas características de las bombas obtenidas de ensayos en modelo.

Ambos métodos dan resultados prácticamente iguales según se verá en un ejemplo de aplicación. Sin embargo, en la opinión del autor, la metodología aquí propuesta presenta una ventaja adicional, además de la forma más simple de resolver el problema.

La ventaja adicional es que se trabaja con la propia curva de la(s) bomba(s) que se emplearán en el proyecto en vez de una tabla con parámetros adimensionales obtenidos de las curvas homólogas para una determinada rotación específica que casi nunca corresponde a la de las bombas que se han proyectado, ya que se cuenta con tablas, solamente para tres rotaciones específicas: $N_s=35$, $N_s=147$ y $N_s=261$ en el sistema SI.

En este artículo, primeramente se hace una breve introducción al Método de las Características con la única finalidad de poder comprender el ecuacionamiento de la condición de contorno. Para una exposición más detallada de este método se remite al lector a la bibliografía (Ref 1 y 2). Se expone resumidamente la metodología empleada por Streater y por Chaudhry basada en datos obtenidos de ensayos en modelos de bombas.

Luego, se presenta la metodología propuesta con aplicación a una impulsión sin elementos protectores en la línea contra los efectos del golpe de ariete, con la finalidad de una mejor visualización del tema de este artículo. Es decir, que el ejemplo supone una línea de impulsión con un trazado muy favorable en que las presiones mínimas no cortan el trazado de la tubería en ningún punto. Cuando se verifica que se producirán presiones negativas por el corte de la envolvente mínima de la línea piezométrica con la tubería, es necesario colocar dispositivos de protección. Estos pueden ser, estanque hidroneumático, estanque "one way" o unidireccional, chimenea de equilibrio, etc, o simplemente aumentar el momento de inercia del motor de la bomba mediante un volante. Esta última alternativa puede ser aplicable cuando las presiones negativas en la tubería, sin protección, son pequeñas, subsanando el problema y economizando un elemento protector.

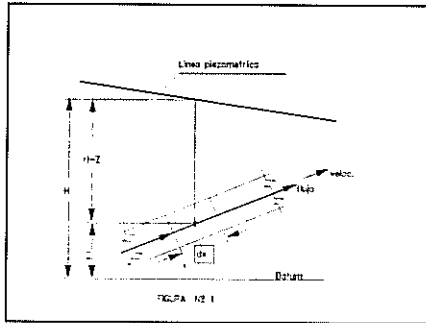
El ejemplo supone la existencia de una válvula de retención inmediatamente agua abajo de la bomba. También por simplicidad se ha escogido un ejemplo con una unidad. En el caso de varias bombas en paralelo, el procedimiento es el mismo al desarrollado, sólo que el gasto unitario debe ser multiplicado por el número de bombas.

Finalmente se presentan los resultados obtenidos y comparados con el método clásico de resolución de este problema. Al final del artículo se detalla un cuadro con la simbología empleada.

2.- METODO DE LAS CARACTERISTICAS

2.1 Ecuacionamiento (Ver Simbología al final del artículo)

Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento aplicadas al líquido dentro de un elemento "dx" de una tubería (ver Figura N° 1), son respectivamente:



$$\frac{\partial h}{\partial t} + a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{f|V|}{2D} = 0 \quad (2)$$

Estas dos ecuaciones de derivadas parciales son transformadas a cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias por el Método de las Características, resultando:

$$-g \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{f|V|}{2D} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dx}{dt} = -a \quad (4)$$

$$\frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{f|V|V}{2D} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{dx}{dt} = +a \quad (6)$$

Puesto que "a" es prácticamente constante, las derivadas dx/dt son rectas y llamadas "características". En estas rectas, las ecuaciones (3) y (5) son válidas.

Es interesante ver que la solución de estas ecuaciones se desarrolla en un plano x-t (largo de la tubería en abcisa y tiempo en ordenadas). En este plano las ecuaciones (4) y (6) son rectas. La Figura N° 2 muestra el plano x-t con la tubería dividida en N tramos de largos iguales $\Delta x = L/N$

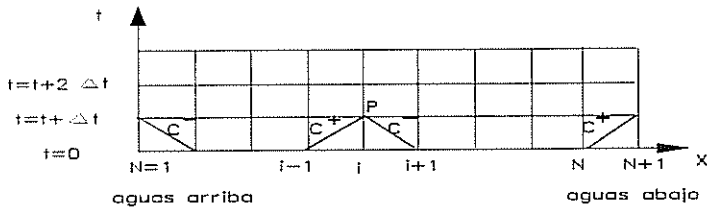


FIGURA N° 2

La solución del problema consiste en dividir la(s) tubería(s) en N tramos de longitud Δx . La integración de las ecuaciones (3) y (5) a lo largo de las rectas características permite conocer las variables H y V en el punto P. Este punto P corresponde a un punto interior "i" cualquiera en un instante $t=t+\Delta t$, siendo que se conocen todas las variables (H y V) en el Δt anterior.

Se efectúa una aproximación de primer orden que es satisfactoria en los problemas donde la pérdida de carga por frotamiento no es importante frente a la altura geométrica. Para casos donde esta pérdida de carga es importante en relación a la altura geométrica, hay que hacer una aproximación de 2º orden (ver bibliografía).

Con la aproximación de primer orden la integración

$$\int_{H_A}^{H_P} dH \quad \int_{Q_A}^{Q_P} dQ$$

en las ecuaciones (3) y (5) conduce al siguiente par

$$H_P = H_B + B(Q_P - Q_B) + RQ_B | Q_B| \quad (7)$$

$$H_P = H_A - B(Q_P - Q_A) - RQ_A | Q_A| \quad (8)$$

donde

$$B = \frac{a}{gs} \quad R = \frac{f \Delta x}{2gDS^2}$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (7) y (8) para un nudo interno "i" de la tubería, la línea piezométrica viene dada por

$$H_{P_i} = C_P - BQ_{P_i} \quad \text{Recta } C^+ \quad (9)$$

$$H_{P_i} = C_M + BQ_{P_i} \quad \text{Recta } C^- \quad (10)$$

donde

$$C_P = H_{i-1} + Q_{i-1}(B - R | Q_{i-1}|)$$

$$C_M = H_{i-1} - Q_{i-1}(B - R | Q_{i-1}|)$$

Eliminando Q_{P_i} de las ecuaciones (9) y (10)

$$H_{P_i} = \frac{C_P + C_M}{2}$$

Q_{P_i} es determinado entonces por (9) ó (10)

Por lo tanto, las variables H y Q en un punto interno cualquiera de la tubería depende solamente de estas variables en los puntos adyacentes en el instante Δt anterior.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{a} = \frac{L}{aN}$$

2.2 Condiciones de Contorno

Para determinar las variables H y Q en los extremos de la tubería, son utilizadas las ecuaciones (9) y (10) con las ecuaciones de contorno del elemento situado en el extremo (bomba, estanque de nivel constante, turbina, válvula, estanque hidroneumático, etc). Cada uno de estos elementos tiene sus propias características expresadas por una o más ecuaciones. Algunas de éstas son muy simples, como es el caso de estanques de nivel constante, tuberías ciegas o válvula. Otras son más complejas, como es el caso de bombas, estanques hidroneumáticos, turbinas de reacción, ventosas, chimineas de equilibrio, estanques "One way", etc.

En el caso que nos preocupa, estamos analizando un sistema simple, con bomba aguas arriba y válvula de retención inmediatamente aguas abajo de ella y estanque de nivel constante en el extremo de aguas abajo.

2.2.1 Estanque de Nivel Constante Aguas Abajo

La solución en este caso es inmediata, pues $H_p = Z$, en todo instante, siendo Z, es el nivel del estanque.

$$H_{p_i} = H_{p_{n+1}} = Z,$$

$$Z_r = C_p - BQ_{p_i}$$

$$Q_{p_i} = Q_{p_{n+1}} = \frac{C_p - Z_r}{B}$$

2.2.2 Bomba Aguas Arriba

a) Método de Curvas Homólogas Adimensionales (Streeter y Chaudhry)

Marshall, Flish y Suter elaboraron curvas paramétricas en base a ensayos de modelo de bombas de igual rotación específica para $N_s = 35$, $N_s = 147$ y $N_s = 261$ en el sistema SI; es decir, bombas centrífugas, de flujo mixto y axiales respectivamente. Obsérvese que si la bomba centrífuga tiene doble succión, entonces $N_s = 25$

Estas curvas tienen expresiones según las siguientes relaciones:

$$WH(x) = \frac{h}{\alpha^2 + v^2} \quad \text{donde} \quad x = [\pi + \tan^{-1} \frac{v}{\alpha}]$$

$$WB(x) = \frac{\beta}{\alpha^2 + v^2}$$

donde:

$$\alpha = N/N_R \quad (\text{rotación})$$

$$v = V/V_R = Q/Q_R \quad (\text{velocidad o gasto})$$

$$h = H/H_R \quad (\text{carga hidráulica})$$

$$\beta = M/M_R \quad (\text{torque})$$

donde el subíndice R indica las condiciones en régimen permanente.

Las curvas adimensionales publicadas por los autores tienen 89 pares de valores correspondientes a WH y WB, los cuales cubren los cuatro cuadrantes de trabajo de una bomba. Estos valores están igualmente espaciados en $\Delta x = \pi/44$. La zona de funcionamiento normal de una bomba corresponde al caso en que $v \geq 0$ y $\alpha > 0$; la zona de rotación reversa está dada por $v > 0$ y $\alpha < 0$; la zona de disipación de energía por $v < 0$ y $\alpha \geq 0$ y finalmente la zona de funcionamiento como turbina $v < 0$ y $\alpha < 0$. En el caso de bomba y válvula de retención, que es la situación existente en la práctica, hay que trabajar con los primeros 45 pares de valores de las tablas.

La carga hidráulica y torque en la bomba en un instante dado del transiente vienen dados por las expresiones:

$$H = H_R h = H_R (\alpha^2 + v^2) WH(x) \quad (14)$$

$$M = M_R \beta = M_R (\alpha^2 + v^2) WB(x) \quad (15)$$

donde $x = \pi + \tan^{-1}(v/\alpha)$

Las incógnitas son $h - v - \alpha - \beta$

Para resolver el sistema son necesarias dos ecuaciones adicionales que son las ecuaciones de la inercia y la Recta Característica C

Ecuación de Inercia

$$M = -\frac{WR^2}{g} \frac{d\omega}{dt}$$

donde WR^2 es el momento de inercia del conjunto motor-bomba y ω es la velocidad angular en radianes/seg. Para un intervalo de tiempo Δt se adopta la media de los valores.

$$\frac{M_o + M}{2} = \frac{WR^2}{g} \frac{2\pi N_R}{60} \frac{(\alpha - \alpha_o)}{\Delta t}$$

de aqui resulta

$$\beta + \beta_o - \frac{WR^2 N_R}{g M_R} \frac{\pi}{15\Delta t} (\alpha - \alpha_o) = 0 \quad (16)$$

Recta Característica C'

$$H_p = C_{M_2} + BQ_p$$

que aplicada al 2º punto interno de la tubería, resulta:

$$H_p = C_{M_2} - Q_2(B - R | Q_2) \quad (17)$$

donde

$$C_{M_2} = H_2 - Q_2(B - R | Q_2)$$

denotando el subíndice 2 las condiciones ya conocidas en el 2º punto de la tubería en el Δt anterior.

La solución de las ecuaciones (14), (15), (16) y (17) se efectúa por métodos iterativos obteniéndose los valores h , v , α , β en todo instante del transiente. En cada una de estas iteraciones se trabaja con los valores tabulados $WH(x)$ y $WB(x)$ a que se hizo referencia. Para mayores detalles de este método ver la bibliografía citada.

Obsérvese que a partir del cierre de la válvula de retención por inversión del flujo en el inicio de la tubería, estas ecuaciones no son más válidas, convirtiéndose la condición de borde en un tubo ciego aguas arriba, la cual se resuelve imponiendo $Q=0$ en la ecuación (10).

b) METODO PROPUESTO

La metodología propuesta trabaja con las curvas de la bomba dadas por el fabricante y siempre disponibles en sus catálogos. Está basada en las relaciones de semejanza de la bomba y supuestas válidas en el transcurso del fenómeno del transiente hasta que se cierra la válvula de retención,

Las cuatro ecuaciones utilizadas son:

- Ecuación H-Q (dada por el fabricante)
- Ecuación M-Q (obtenida de la curva Potencia-Q dada por el fabricante)
- Ecuación de Inercia
- Ecuación de la Recta Característica C'

La forma de las curvas H-Q y M-Q dadas por el fabricante en sus catálogos, siempre se pueden expresar con mucha aproximación en su forma homóloga:

$$H = a_0 Q^2 + b_0 Q \alpha + c_0 \alpha^2$$

y recordando que el torque es

$$M = \frac{75 \cdot 60 \cdot P_{HP}}{2\pi N}$$

con la curva de potencia de la bomba se puede escribir

$$M = u_0 Q^2 + v_0 Q \alpha + w_0 \alpha^2$$

donde a_0 , b_0 , c_0 , u_0 , v_0 , w_0 son constantes determinadas por el ajuste hecho a las curvas dadas por el fabricante de la bomba.

Las ecuaciones de inercia y de la Recta Característica C' son aquellas descritas en el método anterior.

Resumiendo, las cuatro ecuaciones disponibles son:

$$H - Z_0 = a_0 Q^2 + b_0 Q \alpha + c_0 \alpha^2 \quad (18)$$

$$M = u_0 Q^2 + v_0 Q \alpha + w_0 \alpha^2 \quad (19)$$

$$\beta = (\alpha_0 - \alpha) K - \beta_0 \quad (20)$$

$$H = CM_2 + BQ \quad (21)$$

donde

$$K = \frac{WR^2 N_R \pi}{g M_R 15 \Delta t}$$

y donde α_o , β_o son las relaciones de rotación y torque en el Δt anterior y por lo tanto conocidos.
 Z_o = Nivel de agua en la aspiración de la bomba.

El momento de inercia WR^2 se puede evaluar mediante la fórmula de Donsky, la cual da valores aproximados. Con la técnica actual los momentos de inercia son algo inferiores.

$$WR^2 = 150 \left(\frac{P_{HP}}{N_R} \right)^{1.436} \quad [Kg-m^2]$$

Las incógnitas del sistema de ecuaciones son H, Q, α , β

$$\beta = \frac{M}{M_R} \quad \alpha = \frac{N}{N_R}$$

De (18) y (21)

$$CM_2 + BQ - Z_o = a_o Q^2 + b_o \alpha Q + c_o \alpha^2$$

De (19) y (20)

$$\frac{1}{M_R} (u_o Q^2 + v_o \alpha Q + w_o \alpha^2) = (\alpha_o - \alpha) K - \beta_o$$

Se tiene así dos funciones:

$$F1 = a_o Q^2 + (b_o \alpha - B) Q + c_o \alpha^2 - CM_2 + Z_o = 0$$

$$F2 = u_o Q^2 + v_o \alpha Q + w_o \alpha^2 - M_R [(\alpha_o - \alpha) K - \beta_o] = 0$$

La solución de este par de ecuaciones se puede hacer mediante el método numérico iterativo de Newton-Raphson

$$F1 + \frac{\partial F1}{\partial Q} \Delta Q + \frac{\partial F1}{\partial \alpha} \Delta \alpha = 0$$

$$F2 + \frac{\partial F2}{\partial Q} \Delta Q + \frac{\partial F2}{\partial \alpha} \Delta \alpha = 0$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones:

$$\Delta \alpha = \left(\frac{F2}{\frac{\partial F2}{\partial Q}} - \frac{F1}{\frac{\partial F1}{\partial Q}} \right) \left(\frac{\frac{\partial F1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial F1}{\partial Q}} - \frac{\frac{\partial F2}{\partial \alpha}}{\frac{\partial F2}{\partial Q}} \right)$$

$$\Delta Q = -\frac{F1}{\frac{\partial F1}{\partial Q}} - \Delta \alpha \frac{\frac{\partial F1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial F1}{\partial Q}}$$

obteniendo las derivadas parciales

$$\frac{\partial F1}{\partial Q} = 2a_0 Q + b_0 \alpha - B$$

$$\frac{\partial F1}{\partial \alpha} = b_0 Q + 2c_0 \alpha$$

$$\frac{\partial F2}{\partial Q} = 2u_0 Q + v_0 \alpha$$

$$\frac{\partial F2}{\partial \alpha} = v_0 Q + 2w_0 \alpha + M_H K$$

Las incógnitas son Q y α

A cada iteración las incógnitas se evalúan con los incrementos respectivos;

$$\alpha = \alpha + \Delta \alpha$$

$$Q = Q + \Delta Q$$

El procedimiento se repite hasta que

$$|\Delta \alpha| + |\Delta Q| \leq \epsilon$$

donde ϵ = tolerancia. Normalmente $\epsilon = 0.0002$ es suficiente.

Una vez obtenido los valores α y Q , se calculan las otras variables. Mediante (21) se obtiene H y luego mediante (19) ó (20) se obtiene M . Se recuerda que una vez que la válvula de retención se ha cerrado, la condición de borde se transforma en un tubo ciego aguas arriba ($Q=0$) y que según la ecuación (10) se tiene $H_{p1} = CM_2$

3.- CASO SIMULADO

Se presenta un ejemplo con la finalidad de comparar los resultados obtenidos por las dos metodologías expuestas. Se escogió un caso en que la rotación específica de la bomba es $Ns=35$ (SI) de tal manera que la comparación sea válida al emplear la metodología propuesta, y por otro, la metodología presentada por Streeter y Chaudhry utilizando las tablas correspondientes a esa rotación específica.

En el ejemplo presentado, la pérdida de carga por frotamiento es importante frente a la altura geométrica. Por esta razón el modelo aplicado considera una aproximación de 2º orden en el cálculo de los puntos internos de la tubería, permaneciendo, por simplicidad, una aproximación de 1º orden para las condiciones de contorno.

Los resultados del ejemplo se presentan en la Figura N° 3

DATOS DEL PROBLEMA

Una impulsión está equipada con una bomba cuyas características están dadas en la figura N° 3. (obsérvese que la rotación específica de esta bomba es $Ns=35$ SI). Los datos del problema son los siguientes:

TUBERIA

$$Q = 1.10 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$L = 1200 \text{ m.}$$

$$D = 0.80 \text{ m}$$

$$a = 960 \text{ m/s}$$

$$f = 0.020 \text{ (coef. Darcy-W). (f equiv. considera pérdidas de carga singulares)}$$

ESTANQUES

$$N.A. \text{ en succión} = 50.0 \text{ m.s.n.m.}$$

$$N.A. \text{ estanque de impulsión} = 155.82 \text{ m.s.n.m.}$$

BOMBA

Coefficientes de las curvas:

$$a_o = -20.349 \quad u_o = -274.65$$

$$b_o = 0.694 \quad v_o = 1064.53$$

$$c_o = 137.0 \quad w_o = 335.55$$

$$WR^2 = 305 \text{ Kg-m}^2$$

$$N_R = 1160 \text{ r.p.m.}$$

$$P = 1902 \text{ HP}$$

La tubería se dividió en 10 tramos iguales, es decir, que el Δt de cálculo es de 0.125 seg.

4.-RESULTADOS

Los resultados del ejemplo se encuentran en la figura N° 4, y se presentan en forma adimensional las variables carga hidráulica, gasto y rotación.

En la Figura N° 4 también se han incorporado los resultados del mismo problema resuelto por la metodología presentada por Streeter y también por Chaudhry, pudiéndose verificar la gran similitud de los resultados. Hay que recordar que la expresión $h=H/H$, es la relación de las presiones, pues al valor H de la línea piezométrica se le ha descontado la cota en el eje de la bomba.

Se puede apreciar una pequeña diferencia en los máximos y mínimos de las presiones en la bomba entre ambos métodos. Esto se debe a que en la metodología que ha empleado los valores adimensionales de los parámetros de la bomba hay una caída brusca de la presión poco antes de producirse el cierre de la válvula de retención. Esto se debe, probablemente, a un error de impresión en un valor de las tablas publicadas (Streeter, Mc Graw Hill). Por otra parte, el método propuesto muestra un comportamiento de la presión en esos instantes, más regular.

5.-CONCLUSIONES

La metodología desarrollada en este artículo para la condición de contorno de caída de tensión en las bombas de una impulsión, suministra los mismos resultados que la metodología presentada por Streeter y por Chaudry. El manejo del ecuacionamiento de la metodología aquí propuesta es más simple, permitiendo una más fácil implementación en la elaboración de un programa para computador. Además el método opera con las curvas de la(s) bomba(s) que se utilizará en el proyecto.

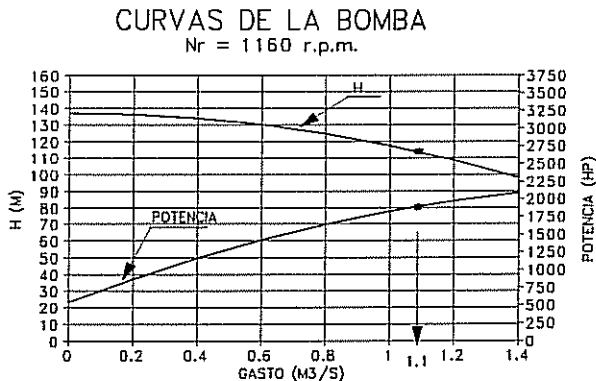
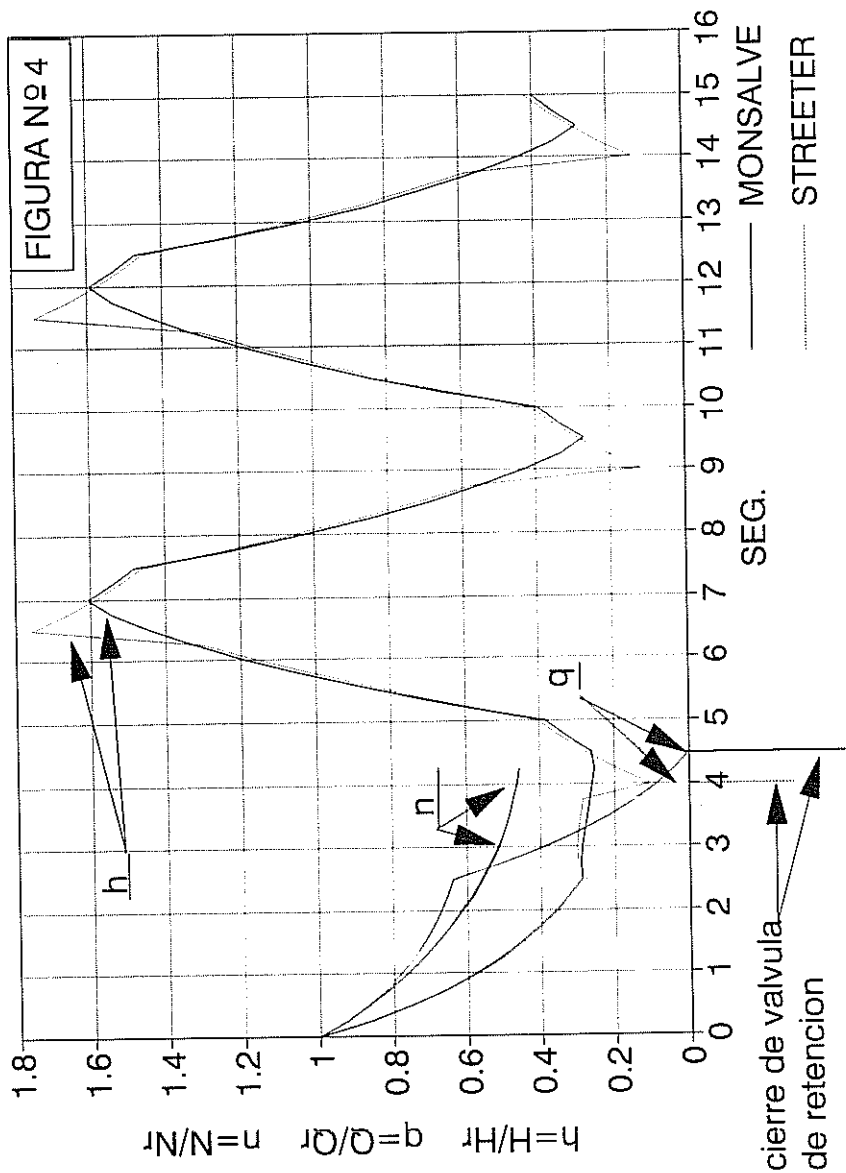


FIGURA N° 3

TRANSIENTE EN LA BOMBA



5.- SIMBOLOGIA

B=Constante de la tubería
D=Díámetro de la tubería
H=Cota piezométrica en un instante t cualquiera
H_t=Cota piezométrica en la sección "I" en el instante t (conocido)
H_{t+Δt}=Cota piezométrica en la sección "I" en el instante t+Δt
H_R=Altura piezométrica en régimen permanente
h=H/H_R
L=Largo de la tubería
M=Torque en un instante t cualquiera
M_R=Torque en régimen permanente
N=Rotación de la bomba (rpm) en un instante t cualquiera
N_R=Rotación Nominal de la bomba
N= Número de tramos en que es dividida la tubería
P=Potencia de la bomba
Q= Gasto en un instante t cualquiera
Q_t=Gasto en la sección "I" en el instante t (conocido)
Q_{t+Δt}=Gasto instantáneo en el instante t+Δt
Q_o=Q_R=Gasto en régimen permanente
q=Q/Q_R
R=Constante que expresa la pérdida de carga en la tubería
S=Sección de la tubería
t=Tiempo (seg)
V_R=Velocidad de régimen permanente en la tubería
v=V/V_R
WH= $h/(\alpha^2 + v^2)$
WB= $\beta/(\alpha^2 + v^2)$
WR²=Momento de inercia del conjunto motor-bomba [Kg-m²]
Z_o=Nivel de agua en la succión de la bomba
Z_i=Nivel de agua en el estanque de impulsión
a=Celeridad de la onda de presión
a_o=Constante de la regresión H-Q de la bomba
b_o=
c_o=
u_o=Constante de la regresión M-Q de la bomba
v_o=
w_o=
α=N/N_R
β=M/M_R
Δt=Intervalo de tiempo
ω=Velocidad angular de la bomba

6.- BIBLIOGRAFIA

- (1) E. Benjamin Wylie & Victor L. Streeter. Fluid Transients. Mc Graw Hill
- (2) M. Hanif Chaudhry. Applied Hydraulic Transients. Van Nostrand Reinhold Company
- (3) Edmundo Koelle. Transitorios Hidráulicos. Universidade de Sao Paulo.

