

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

XI CONGRESO CHILENO

**ESTABILIDAD NUMERICA DE UN METODO HIBRIDO PARA EL ANALISIS DEL  
ESCURRIMIENTO IMPERMANENTE EN REDES DE TUBERIAS A PRESION**

RUBEN SALGADO C. (1)

JUAN C. ZENTENO S. (2)

RESUMEN

Se analiza la estabilidad del Método Híbrido (MH), algoritmo numérico que combina el Método de las Características y el de Diferencias Finitas Implícitas, para simular el escurrimiento impermanente en redes de tuberías a presión. Se utiliza el método de los valores propios y se experimenta numéricamente con el algoritmo, estableciéndose las principales propiedades del Método Híbrido desde el punto de vista de su estabilidad numérica.

- (1) Ingeniero Civil, Ph.D., Profesor Asociado, Departamento de Ingeniería en Obras Civiles, Facultad de Ingeniería, Universidad de La Serena.
- (2) Egresado de Ingeniería Civil, Departamento de Ingeniería en Obras Civiles, Facultad de Ingeniería, Universidad de La Serena.

## 1. FORMULACION GENERAL DEL PROBLEMA.

El escurrimiento impermanente en un sistema de tuberías a presión queda descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, que representan a las ecuaciones de la dinámica y continuidad (Chaudhry, 1987). Si se desprecian los términos advectivos el sistema es [Salgado (1992a y b)]

$$\begin{pmatrix} Q \\ \dots \\ H \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 : gA \\ : \\ \dots \\ a^2 : \\ -- : 0 \\ gA : \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} Q \\ \dots \\ H \end{pmatrix}_s + \begin{pmatrix} f \\ --- |Q| Q \\ 2DA \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde

Q : caudal (m<sup>3</sup>/s)

H : cota piezométrica (m)

g : constante de gravedad (m/s<sup>2</sup>)

a : velocidad de propagación de la onda de presión (m/s)

f : factor de fricción de Darcy-Weisbach (adimensional)

D : diámetro (m)

A : sección transversal (m<sup>2</sup>)

t y s : indican derivada parcial con respecto al tiempo y espacio, respectivamente

Además, se debe dar cumplimiento a alguna relación constitutiva, como por ejemplo la ecuación politrópica, que describe el comportamiento de un gas a presión en una cámara hidroneumática.

En los tramos formados por válvulas, bombas o singularidades, la ecuación de la dinámica es reemplazada por la ecuación de pérdida (o ganancia) de carga versus caudal, mientras que la de continuidad establece constancia de caudal en el tramo.

El problema matemático representado por el sistema (1) no tiene solución analítica directa, debiendo resolverse numéricamente.

## 2. METODO HIBRIDO.

El Método Híbrido (MH) se describe en Salgado et al. (1992a y b) y, con mayores detalles, en Twyman y Twyman (1993).

El MH discretiza cada tubería de la red en un número variable de sub-tramos. Los dos sub-tramos vecinos a nudos (inicial y final) son analizados utilizando al Método de las Características (MC), el que, suponiendo que no hay pérdida de carga singular ni almacenamiento en el nudo [Karney (1984), Karney y McInnis (1992)], permite obtener la ecuación de compatibilidad

$$H_i = C_C - B_C Q_{ext} \quad (2)$$

donde  $C_C$ ,  $B_C$  son constantes conocidas que dependen de las propiedades físicas y de las variables de estado, correspondientes a los tramos conectados al nudo.  $Q_{ext}$  es el caudal externo que entra/sale del nudo, el que puede ser constante, función del tiempo o de una relación constitutiva (p.e. ecuación politrópica). La ecuación (2) se resuelve para cada nudo en forma independiente, permitiendo "desarticular" la red a nivel de cada nudo, simplificando el tratamiento de redes complejas [Wylie (1986)].

Los sub-tramos interiores de la discretización de cada tramo se analizan mediante el Método de Diferencias Finitas Implícitas (MDFI), utilizando el esquema de los cuatro puntos (Preissmann). Las ecuaciones de la dinámica y de continuidad discretizadas para el sub-tramo  $i/i+1$ , conducen [Chaudhry (1987), Zenteno (1993)] a

$$d1 Q_i^{j+1} - d2 H_i^{j+1} + d3 Q_{i+1}^{j+1} + d2 H_{i+1}^{j+1} = d4 Q_i^j + d5 H_i^j + d6 Q_{i+1}^j - d5 H_{i+1}^j \quad (3)$$

y

$$-c1 Q_i^{j+1} + c2 H_i^{j+1} + c1 Q_{i+1}^{j+1} + c3 H_{i+1}^{j+1} = c4 Q_i^j + c2 H_i^j - c4 Q_{i+1}^j + c3 H_{i+1}^j \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} d1 &= (1-\theta1)+f\delta t/(8DA) |Q_i^j+Q_{i+1}^j| & c1 &= r2 \theta2 \\ d2 &= r1 \theta2 & c2 &= (1 - \theta1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d3 &= \theta1 + f \delta t / (8DA) |Q_i^j + Q_{i+1}^j| & c3 &= \theta1 \\
 d4 &= (1 - \theta1) & c4 &= r2(1 - \theta2) \\
 d5 &= r1(1 - \theta2) & r1 &= gA \delta t / \delta s \\
 d6 &= \theta1 & r2 &= a^2 \delta t / (gA \delta s)
 \end{aligned}$$

$\theta1$  = coeficiente de ponderación del esquema implícito, en la dirección t

$\theta2$  = coeficiente de ponderación del esquema implícito, en la dirección s

$\delta s$  y  $\delta t$  : intervalo espacial y temporal, respectivamente.

Todos los coeficientes anteriores son, en general, diferentes de un tramo a otro e inclusive dentro de un mismo tramo.

En la ecuación de la dinámica (3) el término cuadrático en Q no aparece explícitamente, ya que se ha linealizado con el valor del caudal previo como  $0.25 |Q_i^j + Q_{i+1}^j| (Q_i^{j+1} + Q_{i+1}^{j+1})$ . Esta linealización es incondicionalmente estable [Wylie (1983a y b)].

El sistema de ecuaciones formado por (3) y (4) constituye un sistema de dos ecuaciones en cuatro incógnitas:  $Q_i^{j+1}$ ,  $Q_{i+1}^{j+1}$ ,  $H_i^{j+1}$  y  $H_{i+1}^{j+1}$ , las que deben acoplarse a las de los restantes sub-tramos y ser resueltas en conjunto con las ecuaciones de compatibilidad (ec. 2) de los sub-tramos inicial y final de la discretización, generándose el sistema de ecuaciones lineales .

$$\begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 d1 & -d2 & d3 & d2 & & & & & & & & \\
 -c1 & c2 & c1 & c3 & & & & & & & & \\
 & & d1 & -d2 & d3 & d2 & & & & & & \\
 & & -c1 & c2 & c1 & c3 & & & & & & \\
 & & & & d1 & -d2 & d3 & d2 & & & & \\
 & & & & -c1 & c2 & c1 & c3 & & & & \\
 & & & & & & d1 & -d2 & d3 & d2 & & \\
 & & & & & & -c1 & c2 & c1 & c3 & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 Q1 \\
 H1 \\
 Q2 \\
 H2 \\
 Q3 \\
 H3 \\
 Q4 \\
 H4 \\
 Q5 \\
 H5 \\
 Q6 \\
 H6
 \end{pmatrix}^{j+1} =$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccccccccccc}
 0 & 0 & e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 d_4 & d_5 & d_6 & -d_5 & & & & & & & & \\
 c_4 & c_2 & -c_4 & c_3 & & & & & & & & \\
 & & & & d_4 & d_5 & d_6 & -d_5 & & & & \\
 & & & & c_4 & c_2 & -c_4 & c_3 & & & & \\
 & & & & & & & & d_4 & d_5 & d_6 & -d_5 \\
 & & & & & & & & c_4 & c_2 & -c_4 & c_3 \\
 & & & & & & & & & & & & d_4 & d_5 & d_6 & -d_5 \\
 & & & & & & & & & & & & c_4 & c_2 & -c_4 & c_3 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ H_1 \\ Q_2 \\ H_2 \\ Q_3 \\ H_3 \\ Q_4 \\ H_4 \\ Q_5 \\ H_5 \\ Q_6 \\ H_6 \end{bmatrix}^j + \begin{bmatrix} e_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_6 \end{bmatrix} \quad (5)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 e_1 &= -B_C^j [1 - f \delta s / (2gDA^2)]_k |Q_{i+1,k}^j| & e_4 &= B_C^j / B_k \\
 e_2 &= B_C^j / B_k & e_5 &= C_C' - B_C^j Q_{ext}^{j+1} \\
 e_3 &= B_C^j [1 - f \delta s / (2gDA^2)]_k |Q_{i+1,k}^j| & e_6 &= C_C'' - B_C^j Q_{ext}^{j+1}
 \end{aligned}$$

en que las constantes  $e_i$  provienen de las ecuaciones de compatibilidad (2) y son, en general, diferentes para cada nudo. Nótese que, sólo para fines ilustrativos, la ecuación (5) representa dos condiciones de borde simples, con estanques de nivel constante, donde  $H_1 = 100$  y  $H_6 = 0$ .

El sistema (5) se ensambla y resuelve para cada tramo (uno a la vez). La Fig. 1 muestra un tramo de la red, la discretización usada y las ecuaciones involucradas

Dado que las condiciones de borde externas (primera y última ecuaciones) son conocidas, se puede eliminar (en forma Gaussiana) la segunda y última columna de (5) y, por consiguiente, su primera y última filas. Con lo anterior se llega al sistema

$$\begin{bmatrix}
 d1 & d3 & d2 & & & & & & & & & \\
 -c1 & c1 & c3 & & & & & & & & & \\
 & d1 & -d2 & d3 & d2 & & & & & & & \\
 & -c1 & c2 & c1 & c3 & & & & & & & \\
 & & & d1 & -d2 & d3 & d2 & & & & & \\
 & & & -c1 & c2 & c1 & c3 & & & & & \\
 & & & & & d1 & -d2 & d3 & d2 & & & \\
 & & & & & -c1 & c2 & c1 & c3 & & & \\
 & & & & & & & d1 & -d2 & d3 & & \\
 & & & & & & & -c1 & c2 & c1 & & \\
 \end{bmatrix}
 *
 \begin{bmatrix}
 Q1 \\
 Q2 \\
 H2 \\
 Q3 \\
 H3 \\
 Q4 \\
 H4 \\
 Q5 \\
 H5 \\
 Q6
 \end{bmatrix}^{j+1}
 =$$

$$=
 \begin{bmatrix}
 d4 & d6 & -d5 & & & & & & & & & \\
 c4 & -c4 & c3 & & & & & & & & & \\
 & d4 & d5 & d6 & -d5 & & & & & & & \\
 & c4 & c2 & -c4 & c3 & & & & & & & \\
 & & & d4 & d5 & d6 & -d5 & & & & & \\
 & & & c4 & c2 & -c4 & c3 & & & & & \\
 & & & & & d4 & d5 & d6 & -d5 & & & \\
 & & & & & c4 & c2 & -c4 & c3 & & & \\
 & & & & & & & d4 & d5 & d6 & & \\
 & & & & & & & c4 & c2 & -c4 & & \\
 \end{bmatrix}
 *
 \begin{bmatrix}
 Q1 \\
 Q2 \\
 H2 \\
 Q3 \\
 H3 \\
 Q4 \\
 H4 \\
 Q5 \\
 H5 \\
 Q6
 \end{bmatrix}^j
 +
 \begin{bmatrix}
 R1 \\
 R2 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 R3 \\
 R4
 \end{bmatrix}
 \quad (6)$$

donde

$$\begin{aligned}
 R1 &= d2 H1^{j+1} + d5 H1^j \\
 R2 &= -c2 H1^{j+1} + c2 H1^j \\
 R3 &= -d2 H6^{j+1} - d5 H6^j \\
 R4 &= -c3 H6^{j+1} + c3 H6^j
 \end{aligned}$$

El lado derecho de (6) es un vector y el sistema se transforma en un problema lineal estandar cuya matriz de coeficientes es fácilmente tri-diagonalizable de manera que puede ser resuelto por un método directo eficiente como es el algoritmo de Thomas o de "barrido doble" [Press et al. (1986)].

### 3. ESTUDIO DE ESTABILIDAD.

La estabilidad de un algoritmo numérico está asociada a la propagación descontrolada de errores numéricos, mientras que la convergencia está relacionada con la discretización adoptada.

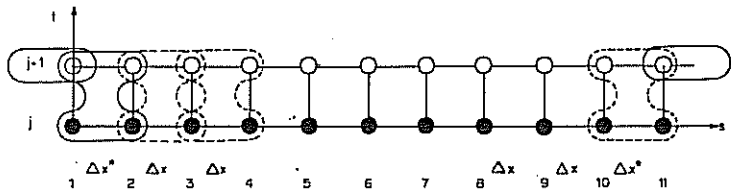


Fig. 1. Esquema del Método Híbrido (MH).

Se sabe [Smith (1975)] que los errores de estabilidad (diferencia entre la solución exacta de la ecuación que representa al esquema numérico y su solución numérica) se propagan siguiendo la misma estructura del esquema numérico (en este caso, la ecuación 6).

La estabilidad de un esquema numérico puede estudiarse por varios métodos alternativos: valores propios (método matricial), series de Fourier (método de von Neumann) o numéricamente [Smith (1975)]. Se sigue aquí el camino del método matricial, sin embargo la búsqueda de los valores propios se hace numéricamente, mediante el procedimiento de iteración directa o "power method" [Barnett (1979)].

Dada la descomposición que realiza el MH, permitiendo el análisis tramo a tramo, el estudio de la estabilidad puede realizarse sólo para un tramo, simplificándose notablemente.

Para realizar el presente análisis se considerará un ejemplo simple, formado por una tubería con un estanque de nivel constante y una válvula, en los extremos de aguas arriba y de

aguas abajo, respectivamente. La Fig. 2 indica un esquema del sistema y resume sus características físicas.

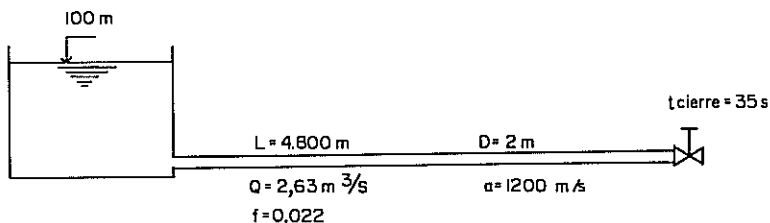


Fig. 2. Esquema de red para el análisis de estabilidad.

### 3.1. Análisis de estabilidad mediante valores propios.

El sistema (6) puede ser expresado en forma compacta como

$$M1 U^{j+1} = M2 U^j + R \quad (7)$$

donde

$M1$  y  $M2$  son las matrices del lado izquierdo y derecho de (6), respectivamente

$U$  es un vector columna que representa el estado del sistema, previa eliminación de las cotas piezométricas de las secciones extremas.

$R$  es un vector columna que contiene los residuos de la eliminación de las cotas piezométricas.

$j$  se refiere al intervalo de tiempo considerado.

La ecuación (7) representa al Método Híbrido (MH) en la forma más compacta posible, estableciendo una relación de recurrencia para calcular el estado del sistema en el intervalo de tiempo " $j+1$ " a partir del instante previo " $j$ ", iniciándose el proceso en una situación inicial ( $j=0$ ) conocida.

Despreciando los errores introducidos por el vector  $R$  de residuos, el que está formado principalmente de ceros, los



errores de estabilidad (s) se propagarían de la forma

$$M1 s^{j+1} = M2 s^j \quad (8)$$

Pre-multiplicando por la inversa de M1, se obtiene

$$s^{j+1} = [M1^{-1} M2] s^j \quad (9)$$

La condición de estabilidad se asocia [Smith (1975)] a la magnitud del radio espectral de la matriz  $[M1^{-1} M2]$ . Para que el esquema numérico sea estable, se debe verificar que el máximo valor propio, en valor absoluto (L) cumpla la condición

$$L \leq 1 \quad (10)$$

### 3.2. Análisis cualitativo de la estabilidad.

Del sistema (9) se puede inferir que la estabilidad del MH depende de los coeficientes de las matrices M1 y M2 y de la estructura de la matriz  $[M1^{-1} M2]$ , la que es una matriz llena (no dispersa ni bandeda).

De lo anterior, y recordando la definición de cada uno de los coeficientes de M1 y M2, se puede inferir que la estabilidad del MH dependerá de los siguientes factores:

- a)  $\theta 1$  y  $\theta 2$ : factores de ponderación temporal y espacial del MDFI.
- b) A través de  $r2$ , depende de la velocidad de propagación de la onda (a) y de los intervalos de la discretización  $\delta s$  y  $\delta t$ , con una directa relación con el número de Courant, el que tradicionalmente se ha usado como criterio para la estabilidad.
- c) El factor de fricción "f", a través de los coeficientes  $d1$  y  $d3$ , lo que introduciría un criterio adicional, tal como lo han reconocido Chaudhry (1987) y Holloway y Chaudhry (1985).
- d) En el caso del MH la estabilidad también depende de la velocidad de propagación de la onda y de las secciones de las tuberías que se conectan al nudo inicial y final del tramo en estudio, lo que viene del uso del MC, sin embargo, esta dependencia es débil, ya que estos términos aparecen en el vector residuo R, el que está constituido casi exclusivamente de ceros. Además, el uso del MC se hace en las mejores condiciones posibles obligando a que la discretización de los tramos extremos cumpla exactamente con la condición de estabilidad de Courant.

A continuación se experimenta numéricamente para establecer la importancia relativa de cada uno de estos factores en la estabilidad numérica del MH.

### 3.3. Análisis numérico de los valores propios de $[M_1^{-1} M_2]$ .

Para verificar y cuantificar las conclusiones anteriores, se escribió un programa de computación que ensambla las matrices  $M_1$  y  $M_2$  para un tramo de la red, calcula la inversa de  $M_1$  y luego la matriz  $[M_1^{-1} M_2]$ , para, finalmente, calcular el máximo valor propio (valor absoluto) mediante el método de iteración directa.

Se ha podido comprobar que los factores de ponderación  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los más influyentes, pudiendo hacer que el algoritmo sea inestable. La Figura 3 muestra la variación del radio espectral  $L$  con  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ .

De la Fig. 3 se puede observar que el MH es inestable para valores de  $\theta$  inferiores que 0,47, lo que fue corroborado experimentando con el programa del MH. La Fig. 3 insinúa un valor mínimo bien acentuado cerca de 0,48, sin embargo se pudo establecer con el programa del MH que esto sólo se debe a cierta inestabilidad local entre 0,47 y 0,48, la que se manifiesta en la Fig. 3 como una oscilación cerca del mínimo. Los valores de  $L$  son siempre menores que 1 a partir de  $\theta=0,48$  (o sea hay estabilidad), aunque para los valores más altos de  $\theta$  el radio espectral es prácticamente igual a 1,0.

Tradicionalmente se acostumbra en el método de Preissmann tomar ambos factores de ponderación iguales a 0,5. En el presente trabajo se ha determinado que esto es correcto para transientes lentos. En el caso de transientes rápidos (golpes de ariete) se han adoptado valores óptimos  $\theta_1 = 0,5$  y  $\theta_2 = 0,505$ . Algo similar concluyen Arfaie y Anderson (1991), en el contexto de otro esquema implícito, quienes proponen  $\theta_1 = 0,5$  y  $\theta_2 = 0,515$ .

De acuerdo a lo señalado en la sección 3.2 precedente, un segundo parámetro que intervendría en la estabilidad es el factor de fricción, lo que unido a su escaso conocimiento en condiciones impermanentes turbulentas [Salgado (1993)], hace suponer que su impacto en la estabilidad pudiera ser fuerte. La Figura 4 muestra la influencia del factor de fricción ( $f$ ) en el radio espectral,

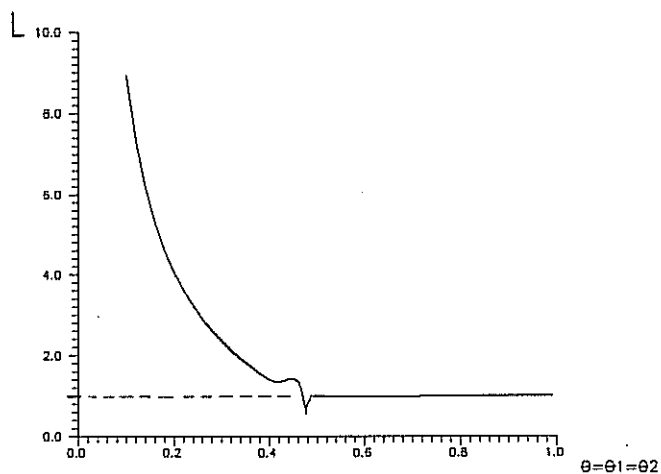


Fig. 3. Influencia de los coeficientes de ponderación del esquema implícito  $\theta$  sobre el radio espectral  $L$ .

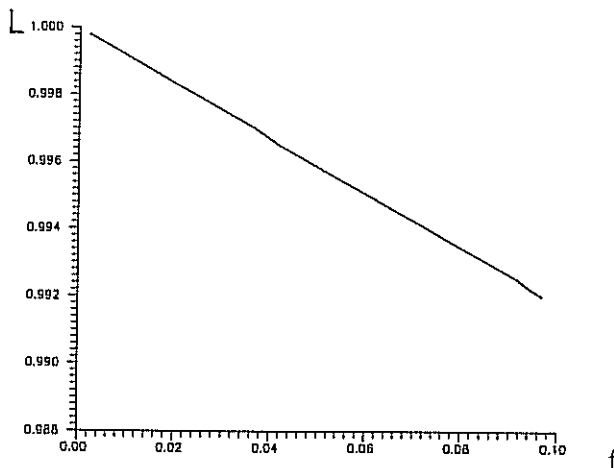


Fig. 4. Influencia del factor de fricción " $f$ " en el radio espectral  $L$ .

observándose que "f" no compromete la estabilidad. Por el contrario, se observa que mayores "f" (tuberías más rugosas) producen menores radios espectrales, es decir, ayudan a la estabilidad del sistema. Esto último tiene también un sentido físico, ya que precisamente la fricción amortigua (estabiliza) más rápidamente los transientes.

El comportamiento del MH ante diferentes discretizaciones ha sido estudiado por Salgado et al. (1992) y por Twyman y Twyman (1993), concluyéndose que el MH es estable aún para números de Courant mucho mayores que 1, lo que es propio de su naturaleza implícita. El presente estudio ha corroborado lo anterior, aunque se ha observado ocasionalmente inestabilidad (spikes) cuando se trabaja con números de Courant menores que 1. Sin embargo, debe tenerse presente que uno de los objetivos fundamentales del MH es permitir trabajar con números de Courant lo más altos posibles.

## **5. CONCLUSIONES.**

Se ha completado el estudio de las características de estabilidad del MH, tanto mediante la ayuda de un programa ad hoc que calcula los valores propios de la matriz de transformación que caracteriza al MH, como mediante experimentación numérica con el algoritmo mismo. Lo anterior ha permitido encontrar los valores óptimos de los coeficientes de ponderación  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , tanto para transientes lentos como rápidos, confirmado la estabilidad del MH aún en casos con números de Courant mucho mayores que 1. Finalmente, se ha clarificado el rol del factor de fricción en la estabilidad del MH.

El Método Híbrido desarrollado ha demostrado ser estable y útil para analizar escurrimientos impermanentes en sistemas complejos de tuberías a presión, tales como los encontrados en sistemas de agua potable, riego tecnificado, alcantarillado, plantas hidroeléctricas, instalaciones contra incendio y otras.

## **Reconocimientos.**

Los autores reconocen y agradecen el apoyo financiero otorgado por el Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT), a través del Proyecto No. 0487-91.

## 6. LISTADO DE REFERENCIAS.

- ARFAIE M. y ANDERSON A. (1991), "Implicit finite differences for unsteady pipe flow", Math. Engng. Ind., Vol. 3, No. 2, pp. 133-151.
- BARNETT S. (1979), "Matrix Methods for Engineers and Scientists", McGraw-Hill, Londres, Inglaterra.
- CHAUDHRY M. H.: (1987), "Applied Hydraulic Transients", Van Nostrand Reinhold Co., Nueva York, USA.
- HOLLOWAY M.B. y CHAUDHRY M.H. (1985), "Stability and accuracy of waterhammer analysis", Adv. Water Resources, Vol. 8, September, pp. 121-128.
- KARNEY B. W. (1984), "Analysis of fluid transients in large distribution networks", Ph. D. Thesis, Universidad de British Columbia, Canada, Septiembre 1984.
- KARNEY B. Y McINNIS D. (1992), "Efficient calculation of transient flow in simple pipe networks", J. Hydraulics Engineering, ASCE, Vol. 118, No. 7, pp. 1014-1030.
- PRESS W.H., FLANNERY B.P., TEUKOLSKY S.A. Y VETTERLING W.T. (1986), "Numerical Recipes: The art of scientific computing", Cambridge University Press, New York.
- SALGADO R. (1992a), "Revisión de los métodos numéricos para el análisis del escurrimiento impermanente en redes de tuberías a presión", XV Congreso Latinoamericano de Hidráulica, I.A.H.R., Cartagena, Colombia, 7-12 Septiembre.
- SALGADO R.(1992b), "Modelación computacional de redes de tuberías en presión. Flujo permanente e impermanente", Segundas Jornadas de Hidráulica Francisco Javier Domínguez, Universidad Católica de Chile, Santiago, 4-5 Noviembre 1992, pp. 243-254.
- SALGADO R., TWYMAN C. y TWYMAN J. (1992a), "Desarrollo de un algoritmo híbrido para el análisis del escurrimiento impermanente en redes de tuberías a presión", XV Congreso Latinoamericano de Hidráulica, I.A.H.R., Cartagena, Colombia, 7-12 Septiembre.
- SALGADO R., TWYMAN J. and TWYMAN C.(1992b), "A hybrid method for unsteady flow analysis in pipe networks and its comparison with characteristics and finite difference methods ",

International Congress on Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences, Concepción, Chile, 16-20 Noviembre.

- SALGADO R. (1993), "Modelación de las pérdidas friccionales en tuberías a presión. Esgurrimiento permanente e impermanente", (en preparación).
- SMITH G.D. (1985), "Numerical solution of partial differencial equations: Finite difference methods", 3a edición, Oxford University Press.
- TWYMAN C. y TWYMAN J. (1993), "Desarrollo de un esquema híbrido para el análisis del flujo transiente rápido en redes complejas para conducción de agua a presión", Memoria para optar al título de Ingeniero Civil, Departamento de Ing. en Obras Civiles, Universidad de La Serena.
- WYLIE E. B. : (1983a), " Advances in the use of MOC in unsteady pipeline flow", Paper A3, Fourth Int. Conf. on Pressure Surges, BHRA, U. de Bath, Inglaterra.
- WYLIE E. B. : (1983b), " The microcomputer and pipeline transients", J. Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 109, No. 12, pp. 1723-1739.
- WYLIE E. B. (1986), "Liquid transient flow in piping systems", en Arndt R. E., Stefan H. G. Farrell C. y Peterson S. M. (1986), "Advancements in aerodynamics, fluid mechanics and hydraulics", ASCE, pp. 50-57.
- ZENTENO J.C. (1993), "Verificación experimental de un algoritmo numérico híbrido para el análisis del flujo impermanente rápido en redes de tuberías a presión", Memoria para optar al título de Ing. Civil, Depto de Ing. en Obras Civiles, Universidad de La Serena (en preparación).