

**SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA**

**XX CONGRESO CHILENO DE HIDRAULICA**

**TRANSPORTE INCIPIENTE EN FLUJOS DE  
FLUIDOS PSEUDOPLÁSTICOS**

**DANIELA CARRILLO P.<sup>1</sup>  
ALDO TAMBURRINO T.<sup>2,3</sup>  
CHRISTIAN IHLE B.<sup>4,5</sup>**

**RESUMEN**

En este artículo se presentan resultados de un estudio relativo al transporte incipiente de partículas no cohesivas (arenas) debido al flujo laminar de fluidos pseudoplásticos, los que fueron generados por soluciones en agua de carboximetilcelulosa y de carbopol. Los experimentos contemplaron tanto flujos subcríticos como supercríticos. Se concluye que si se utiliza un número de Reynolds de la partícula ( $Re_{*p}$ ) de tal manera que incorpore la reología, como una primera aproximación la relación de Shields es un buen predictor de la condición incipiente para  $Re_{*p} > 1$ . Para valores de este parámetro inferiores a la unidad, resulta más adecuada la extensión de Mantz al diagrama de Shields.

---

<sup>1</sup> Memorista, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile. dcarrill@ing.uchile.cl

<sup>2</sup> Profesor Asociado, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile. atamburr@ing.uchile.cl

<sup>3</sup> Investigador Asociado, Advanced Mining Technology Center, Universidad de Chile.

<sup>4</sup> Instructor Adjunto, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile. cihle@ing.uchile.cl

<sup>5</sup> Investigador Adjunto, Advanced Mining Technology Center, Universidad de Chile.

## 1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

El movimiento de partículas no cohesivas debido al escurrimiento de un fluido no newtoniano se encuentra tanto en flujos naturales como industriales. En el primer caso, lo más frecuente es que el medio no newtoniano se genere debido a la mezcla de agua con partículas finas de sólidos susceptibles de ser transportados por el flujo. Esta mezcla puede modelarse como un fluido no newtoniano cuya reología queda definida por las características físico-químicas y concentración de los finos así como las características del fluido, usualmente agua. En la naturaleza, ejemplos son los flujos de barro, aluviones, etc. mientras que el transporte de pulpas y relaves se encuentran entre los ejemplos más comunes en la industria chilena. El estudio del transporte incipiente debido a fluidos no newtonianos es limitado, y relaciones de cálculo parecen ser más bien la excepción, pudiendo mencionarse los trabajos de Daido (1971) y Wan (1982).

En este artículo se hace una contribución al tema presentando los resultados obtenidos de un estudio actualmente en desarrollo respecto a la condición para la cual se genera el movimiento de partículas sólidas no cohesivas ubicadas en el lecho de un canal por el que escurre un fluido pseudoplástico en régimen laminar, para flujos tanto subcríticos como supercríticos.

## 2. MARCO TEÓRICO

### 2.1 Esgurrimiento uniforme

La ley constitutiva de un fluido pseudoplástico está definida por una relación de potencia entre el esfuerzo de corte,  $\tau$ , y la tasa de deformación angular,  $\dot{\gamma}$ :

$$\tau = K\dot{\gamma}^n \quad (1)$$

donde  $K$  es el coeficiente de consistencia y  $n$  es el índice de flujo. Para el caso de un escurrimiento uniforme bidimensional, con el eje  $x$  en la dirección del flujo y el eje  $y$  perpendicular al fondo la ecuación anterior se reduce a:

$$\tau = K \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^n \quad (2)$$

donde  $u$  es la velocidad del flujo en la dirección  $x$ .

Para un flujo, laminar, permanente y uniforme, existe un equilibrio entre la fuerza motriz debido a la componente del peso en la dirección del flujo y la fuerza de resistencia de origen viscoso que actúa sobre el lecho del canal, equilibrio que para un flujo con superficie libre sobre la que no existe un esfuerzo de corte se cumple:

$$\tau_{0U} = \rho g H \sin \theta \quad (3)$$

donde  $\tau_{0U}$  es el esfuerzo de corte actuando en el fondo debido a un flujo de altura  $H$  de un fluido con densidad  $\rho$  que se mueve sobre un plano inclinado un ángulo  $\theta$  respecto a la horizontal.  $g$  es la aceleración de gravedad.

Para un flujo laminar, el equilibrio de fuerzas actuando sobre un volumen de fluido limitado por la superficie libre y un plano paralelo a una distancia  $y$  del fondo establece que:

$$\rho g \sin \theta (H - y) = K \left( \frac{du}{dy} \right)^n \quad (4)$$

Al integrar la Ec. 4 con las condiciones de no deslizamiento en el fondo del canal y esfuerzo de corte nulo en la superficie libre se obtiene la distribución de velocidades:

$$u = \frac{n}{n+1} H^{\frac{n+1}{n}} \left( \frac{\rho g}{K} \sin \theta \right)^{\frac{1}{n}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{y}{H} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (5)$$

La velocidad media está dada por:

$$\bar{u} = \frac{n}{2n+1} H^{\frac{n+1}{n}} \left( \frac{\rho g}{K} \sin \theta \right)^{\frac{1}{n}} \quad (6)$$

de donde resulta que la ley friccional está dada por:

$$Fr^2 = \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n Re_K \sin \theta \quad (7)$$

siendo

$$Fr^2 = \frac{\bar{u}^2}{gH} \quad , \quad Re_K = \frac{\rho \bar{u}^{2-n} H^n}{K} \quad (8)$$

El perfil de velocidades en términos de la velocidad media del flujo está dado por:

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{2n+1}{n+1} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{y}{H} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (9)$$

Como se indicó, el uso de la Ec. 4 demanda un régimen laminar del flujo, condición bajo la cual la distribución de velocidades (Ec. 9) es válida. Para definir el régimen de flujo se ha utilizado la relación de Haldenwang et al. (2010), expresada en términos de un número de Reynolds modificado,  $Re$ , según la cual el escurrimiento es laminar para  $Re < Re_C$ , donde

$$Re = \frac{8\rho\bar{u}^2}{K \left(\frac{8\bar{u}}{D_h}\right)^n} \quad (10)$$

$$Re_c = 853,1 \left(\frac{\mu|_{\dot{\gamma}100 s^{-1}}}{\mu_w}\right)^{-0,21} Fr + 1,263 \times 10^4 \left(\frac{\mu|_{\dot{\gamma}100 s^{-1}}}{\mu_w}\right)^{-0,75} \quad (11)$$

En las ecuaciones anteriores,  $D_h$  el diámetro hidráulico, definido como cuatro veces el área de escurrimiento sobre el perímetro mojado,  $\mu|_{\dot{\gamma}100 s^{-1}}$  es la viscosidad dinámica equivalente a una tasa de deformación de  $100 s^{-1}$  y  $\mu_w$  es la viscosidad dinámica del agua.

Para un flujo turbulento con pared hidrodinámicamente lisa, se tiene un perfil de velocidades logarítmico, dado por Dodge y Metzner (1959)

$$\frac{u}{u_*} = A_n \log\left(\frac{y^n u_*^{2-n} \rho}{K}\right) + B_n \quad (12)$$

donde  $A_n$  y  $B_n$  son constantes que dependen del índice del flujo  $n$ .

$$A_n = \frac{5,66}{n^{0,75}} \quad , \quad B_n = -\frac{0,4}{n^{1,2}} + \frac{2,458}{n^{0,75}} \left[1,96 + 1,255n - 1,628n \log\left(3 + \frac{1}{n}\right)\right] \quad (13)$$

Este perfil es válido en la región turbulenta del flujo y debe ensamblar con el existente en la subcapa viscosa, el que queda definido por

$$\frac{u}{u_*} = \left(\frac{\rho u_*^{2-n} y^n}{K}\right)^{1/n} \quad (14)$$

La distribución de velocidades dada por la Ec. 14 es válida desde la pared hasta una distancia  $\delta_V$  definida por  $\delta_V^+ = \frac{\rho u_*^{2-n} \delta_V^n}{K}$ , que satisface:

$$A_n \log(\delta_V^+) + B_n = (\delta_V^+)^{1/n} \quad (15)$$

## 2.2 Escurrimiento gradualmente variado

Para un flujo en el que la altura de escurrimiento varía en la dirección del flujo, la tasa de deformación está dada por  $\dot{\gamma} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ . Al imponer la condición de escurrimiento gradualmente variado es posible despreciar  $\frac{\partial v}{\partial x}$  frente a  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , reduciéndose el esfuerzo de corte a la misma expresión que para escurrimiento uniforme (Ec. 2). Para evaluar el esfuerzo de corte es necesario conocer la distribución de velocidades. Para ello se considera que los perfiles de velocidad son autosimilares, de tal manera que

$$\frac{u(x, y)}{U(x)} = f\left(\frac{y}{H}\right) \quad (16)$$

donde  $U$  es la velocidad media en una sección cualquiera, dada por

$$U = \frac{q}{H} \quad (17)$$

siendo  $q$  el caudal por unidad de ancho. Para el escurrimiento uniforme se cumple que  $\bar{u} = U$  y la Ec. 16 debe ser igual a la Ec. 9, lo que permite considerar que la función  $f$  está dada por:

$$f = \frac{2n + 1}{n + 1} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{y}{H} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (18)$$

De este modo, es posible determinar el esfuerzo de corte actuando sobre el fondo:

$$\tau_0 = K \left( \frac{du}{dy} \right)^n \Big|_{y=0} = K \frac{U^n}{H^n} \left( \frac{df}{d\left(\frac{y}{H}\right)} \right)^n \Big|_{y/H=0} \quad (19)$$

Remplazando la función  $f$  se obtiene:

$$\tau_0 = K \left( \frac{2n + 1}{n} \right)^n \left( \frac{q}{H^2} \right)^n \quad (20)$$

de donde resulta la relación entre el esfuerzo de corte para el escurrimiento gradualmente variado y el correspondiente al escurrimiento uniforme (Ecs. 20 y 3):

$$\frac{\tau_0}{\tau_{0U}} = \left( \frac{2n + 1}{n} \right)^n \frac{Fr^2}{Re_K \sin \theta} \quad (21)$$

La Ec. 21 permite determinar fácilmente el esfuerzo de corte actuando sobre el lecho en un escurrimiento gradualmente variado a partir de las características del flujo y del esfuerzo para el flujo uniforme con una altura igual a la altura local del escurrimiento gradualmente variado.

### 2.2.1 Condición de equilibrio de una partícula no cohesiva en el lecho

El análisis considera una partícula ubicada en el lecho, la que puede ser desestabilizada debido a la acción de las fuerzas hidrodinámicas. Referida a la Fig. 1, las fuerzas que actúan sobre la partícula son el peso  $W$ , el empuje  $E$ , la fuerza de roce coulóbico  $F_R$ , la fuerza de arrastre  $F_D$  y la de sustentación hidrodinámica  $F_L$ .

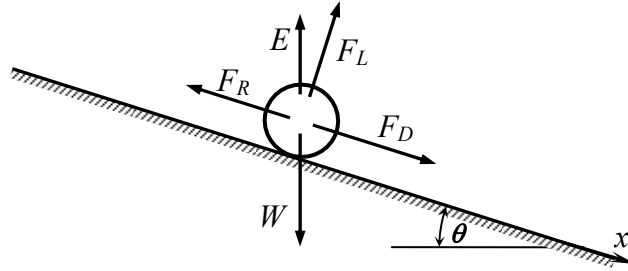


Fig. 1.- Fuerzas actuando sobre una partícula

Haciendo el equilibrio de fuerzas y considerando que las fuerzas hidrodinámicas dependen de una velocidad característica  $u_f$ , en la cercanía de la partícula, la condición de movimiento incipiente está dado por (Graf, 1971, p.85):

$$\frac{u_f^2}{g \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) d} = 2k_3 \frac{\mu \cos \theta - \text{sen} \theta}{k_1 C_D + k_2 \mu C_L} \quad (22)$$

donde  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  son factores de forma de la partícula,  $\mu$  es el coeficiente de fricción coulombica entre la partícula y el lecho,  $C_D$  y  $C_L$  son los coeficientes de arrastre y sustentación hidrodinámica, respectivamente. El coeficiente de arrastre y el de sustentación depende de un número de Reynolds,  $Re_p$ , modificado de tal manera que considere la reología del fluido. Para un fluido pseudoplástico este adimensional se define como:

$$Re_p = \frac{\rho u_s^{2-n} d^n}{K} \quad (23)$$

donde  $u_s$  es la velocidad de aproximación del flujo. Aunque es posible encontrar en la literatura variadas expresiones para  $C_D$  (por ej, Kelbaliyev, 2011), no sucede lo mismo para  $C_L$ . Sin entrar en detalles de las distintas fórmulas existentes, basta mencionar que ambos coeficientes dependen de  $Re_p$ .

Independientemente del régimen de flujo, es posible ligar la velocidad  $u_f$  con la velocidad media  $\bar{u}$ , la que a su vez puede ser relacionada con el esfuerzo de corte  $\tau_0$ , o la velocidad friccional  $u_*$ . De este modo, reconociendo el esfuerzo de Shields:

$$\tau_* = \frac{u_*^2}{g \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) d} \quad (24)$$

y el Reynolds de la partícula basado en la velocidad friccional:

$$Re_{*p} = \frac{\rho u_*^{2-n} d^n}{K} \quad (25)$$

es posible escribir la Ec. 22 como:

$$\tau_{*C} = F(Re_{*p}) \quad (26)$$

### 3. DISEÑO EXPERIMENTAL Y METODOLOGÍA

La instalación experimental se esquematiza en la Fig. 2 y consiste en un canal rectangular de acrílico, de 1,5 m de largo, 0,15 m de ancho y 0,12 m de alto cuya pendiente puede variar entre 0 y 100%. El canal es alimentado por una bomba centrífuga de acero inoxidable la que recircula el fluido, llevándolo desde un estanque ubicado en el extremo aguas abajo del canal al estanque de carga situado en la cabecera. Para controlar la temperatura del fluido existe un intercambiador de calor a lo largo de la tubería que une el estanque de aguas abajo con la bomba. La altura de escurrimiento puede ser controlada por una compuerta ubicada a la salida del estanque de carga o por una clapeta situada en el extremo aguas abajo del canal. La instalación está construida de tal manera que pueda ser desmontada fácilmente para permitir su lavado y secado cuando se cambia el fluido de trabajo.

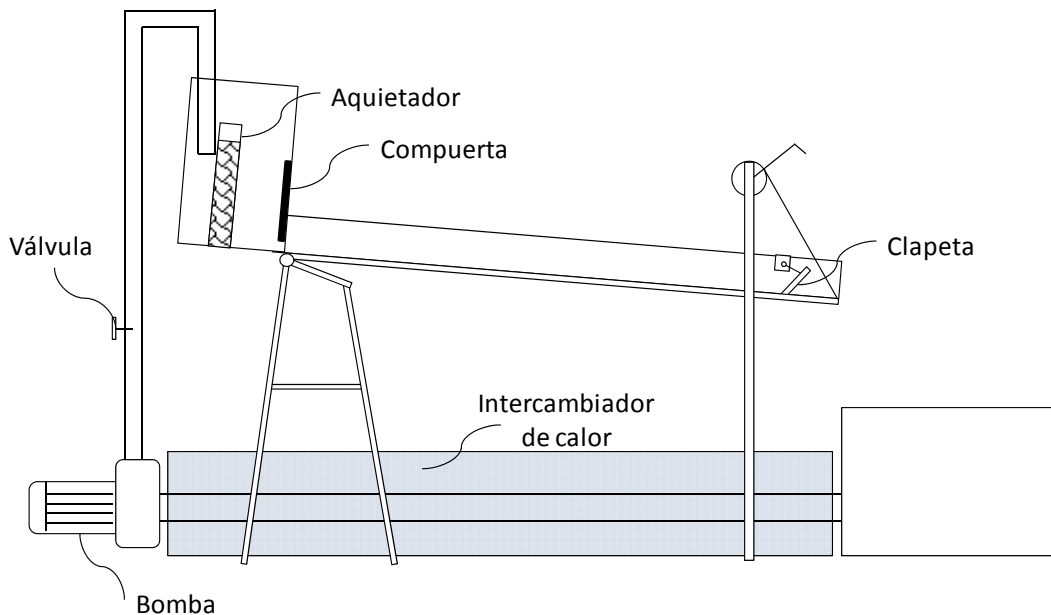


Fig. 2.- Esquema de la instalación experimental

Los fluidos utilizados corresponden a soluciones de agua con carboximetilcelulosa (CMC) o carbopol en distintas concentraciones, las cuales poseen una transparencia tal que permiten la visualización de las partículas a través de ellas. La reología de las soluciones fue caracterizada mediante un reómetro de cilindros concéntricos Rheolab Anton Par. La densidad se determinó mediante un densímetro Gamma R.T.M Dr J. Ambrus, con un rango de densidad relativa entre 1,00 y 1,05 respecto a la densidad de agua destilada a 1 atm y 15°C. Las soluciones ensayadas presentan un comportamiento pseudoplástico, como se

muestra en la Fig.3 a modo de ejemplo. El reograma de la figura corresponde a una solución de CMC. En la Tabla 1 se muestra la reología y la densidad de las soluciones utilizadas en cada experimento.

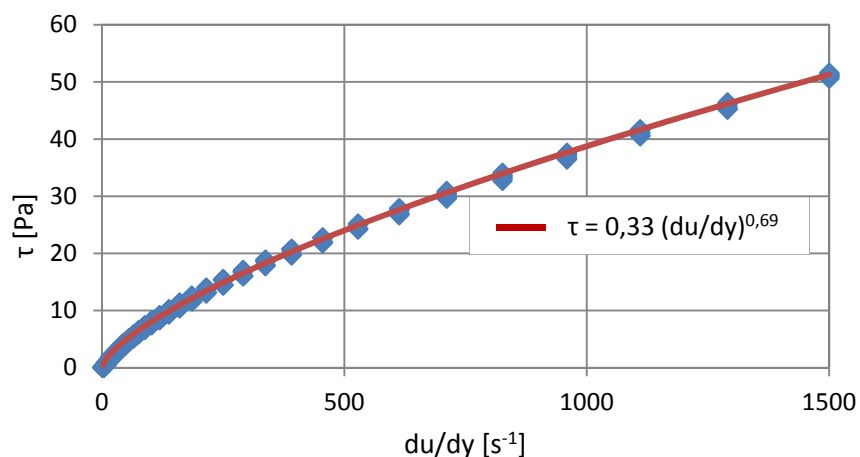


Fig. 3.- Reograma para una solución de CMC

Tabla 1.- Reología, densidad de la solución y tipo de arena para cada condición

Condición fluido-partícula	Tipo de solución	K [Pa s <sup>n</sup> ]	n [ ]	ρ [kg/m <sup>3</sup> ]	Tipo arena
1	CMC	0,020	0,940	1005,8	1
2	CMC	1,300	0,690	1007,9	1
3	CMC	0,030	0,850	1003,6	1
4	CMC	0,040	0,820	1005,0	1
5	CMC	0,016	0,930	1005,0	2
6	CMC	0,018	0,900	1005,0	3
7	CMC	0,060	0,830	1007,0	3
8	CMC	0,026	0,930	1007,0	1
9	CMC	0,028	0,920	1007,0	2
10	CMC	0,330	0,690	1012,2	2
11	CMC	0,240	0,730	1012,2	3
12	CMC	0,200	0,760	1010,0	3
13	CMC	0,059	0,900	1010,0	2
14	Carbopol	0,420	0,600	1003,0	1
15	Carbopol	0,420	0,600	1003,0	2
16	Carbopol	0,410	0,610	1003,0	3
17	Carbopol	0,600	0,520	1005,0	3
18	Carbopol	0,410	0,640	1005,0	2
19	Carbopol	0,37	0,65	1005,0	1



Las partículas utilizadas en la serie de experimentos corresponden a arenas de tres graduaciones. Para cada tipo de arena se determinó la densidad mediante el principio de Arquímedes y el ángulo de fricción interna utilizando el método del cono.

Tabla 2.- Características de las partículas utilizadas

Tipo arena	d [mm]	d <sub>s</sub> [mm]	ρ <sub>s</sub> [kg/m <sup>3</sup> ]	μ
1	1,0 – 2,0	1,5	2600	0,62
2	2,0 – 3,5	2,8	2610	0,66
3	3,0 – 5,0	4,0	2630	0,66

Para llevar a cabo los experimentos se prepara el fondo del canal, sobre el cual se dispone una capa uniforme de arena de un 1 cm de espesor. Posterior a esto se activa el sistema de recirculación permitiendo el aumento de caudal paulatinamente, de manera de evitar el transporte excesivo de partículas.

Las condiciones experimentales de flujo varían en un rango acotado: las pendientes utilizadas van desde 0,5 a 5,6%, los caudales de 78 a 1500 cm<sup>3</sup>/s y las alturas de escurrimiento obtenidas varían entre 0,8 y 7,0 cm. Por otro lado, las variables que definen el tipo de flujo, como el número de Froude y el de Reynolds varían entre 0,2 y 1,25; y 0,5 y 770 respectivamente. En tanto, el número de Reynolds crítico,  $Re_C$ , toma valores que van desde 183 a 2965.

Para cada condición fluido - partícula, se realizaron al menos doce experimentos en régimen permanente para distintas condiciones de flujo, las que incluyen tres condiciones de transporte: sin arrastre, arrastre incipiente y arrastre generalizado de partículas. La determinación del arrastre incipiente de las partículas es más bien subjetiva y se define como el leve movimiento de una o unas pocas partículas, ya sea en su mismo lugar sin trasladarse o desplazándose levemente. En la Tabla 3 se resume el número de experimentos realizados y tipo de flujo para cada una de las condiciones de transporte.

Tabla 3.- Número de experimentos realizados para las distintas condiciones de flujo

	SIN ARRASTRE	ARRASTRE INCIPIENTE	ARRASTRE GENERALIZADO
$Fr < 1$	76	53	42
$Fr > 1$	0	25	35

#### 4. RESULTADOS Y CONCLUSIÓN

Los resultados, en términos de los parámetros adimensionales deducidos anteriormente se presentan en la Fig. 4. Los símbolos vacíos corresponden a la condición sin arrastre, los símbolos llenos sin contorno indican un arrastre incipiente y los símbolos llenos con contorno corresponden a un movimiento generalizado del lecho. No se incluyen en el

gráfico todos los datos experimentales para la condición sin arrastre, dejando fuera aquellos flujos con valores del esfuerzo adimensional de Shields menores que 0,01.

Lo primero que se observa es la disposición en líneas inclinadas, casi paralelas, que muestran los datos experimentales en el diagrama de Shields. Esto se da para partículas de las mismas características y fluido con la misma reología, independientemente de las condiciones de flujo. En efecto, despejando  $u_*$  de la Ec. 25 y reemplazándola en Ec. 24, resulta:

$$\tau_{*c} = \frac{d^{\frac{n+2}{n-2}}}{g \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)} \left( \frac{K}{\rho} \right)^{\frac{2}{2-n}} Re_{*p}^{\frac{2}{2-n}} \quad (27)$$

La Ec. 27 indica que para un fluido y una partícula dada, en un gráfico log-log, los datos se ubican a lo largo de una recta de pendiente  $2/(2 - n)$  la que es mayor que la unidad y menor que 2 para un fluido pseudoplástico.

Respecto al movimiento incipiente, se ha trazado a modo referencial en el gráfico la curva de Shields, según la relación de Brownlie (1981), para  $Re_{*p} > 1$  y según la extensión hecha por Mantz (1977) para  $Re_{*p} < 1$ . Los resultados obtenidos en este estudio que se encuentra en desarrollo permiten concluir que, como una primera aproximación, la relación de Shields-Mantz es un buen predictor de la condición incipiente para flujos laminares de fluidos pseudoplásticos.



## REFERENCIAS

Brownlie, W. R. (1981). "Prediction of flow depth and sediment discharge in open channels". *Report* No. KH-R-43A, W. M. Keck Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA, p. 232.

Daido, A. (1971). "On the occurrence of mud-debris flows", *Bull. Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University*, Vol. 21, Part 2.

Dodge, D.W y Metzner, A.B. (1959). "Turbulent flow of non-Newtonian system". *A.I.Ch.E Journal*, Vol. 5, No. 2, pp. 189-204.

Graf, W.H. (1971) *Hydraulics of Sediment Transport*, McGraw-Hill, Inc.

Haldenwang, R., Slatter, P.T. y Chhabra, R.P. (2010). "An experimental study of non-Newtonian fluid flow in rectangular flumes in laminar, transition and turbulent flow regimes", *Journal of the South African Institution of Civil Engineering*, Vol. 52, No. 1, pp. 11-19.

Kelbaliyeb, G.I. (2011). "Drag Coefficients of Variously Shaped Solid Particles, Drops, and Bubbles", *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, Vol. 45, No. 3, pp. 248–266.

Mantz, P. A. (1977) "Incipient transport of fine grains and flakes by fluids – extended Shields diagram" *J. Hydr. Div.* Vol. 103, No.HY6.

Wan, Z. (1982). "Bed material movement in hyperconcentrated flow", *Sr. Paper 31, Inst. Hydrodyn., T.U. Denmark, Lyngby*.