

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

XIX CONGRESO CHILENO DE HIDRAULICA

VACIADO DE DOS LÍNEAS QUE CONVERGEN A UN DRENAJE COMÚN

JORGE SEREY RODRÍGUEZ¹
RAMÓN FUENTES AGUILAR²

RESUMEN

El vaciado de dos líneas que convergen a un drenaje común es una situación que se presenta frecuentemente en conducciones de agua y de pulpa mineral cuando existen puntos altos y bajos en el trazado. El diseño de los sistemas de drenaje debe asegurar un tiempo de vaciado razonablemente corto, velocidades controladas y evitar que el flujo se invierta en una de las ramas. El flujo reverso, si se presenta evacuando pulpa, puede producir sedimentación e incluso taponamiento si las velocidades son muy bajas. Es, entonces de interés analizar el problema dinámico del vaciado de sistemas de este tipo.

El problema aquí planteado corresponde a un fenómeno transitorio lento, se ha solucionado aplicando el modelo de columna rígida considerado que la única resistencia en los ductos es friccional y corresponde a un factor de Darcy constante. Además, se ha considerado disipación de energía en el punto común de drenaje mediante una válvula.

Se ha realizado un análisis inspeccional de las ecuaciones involucradas determinando dos parámetros adimensionales de relevancia, lo cuales permiten caracterizar físicamente el fenómeno. Dependiendo del valor de dichos parámetros y de las condiciones iniciales del problema, se pueden presentar: drenajes normales, en donde las velocidades y longitudes decrecen monótonicamente, o drenajes con oscilaciones, en que el vaciado se produce con intrusión del líquido de una rama en la otra, causando así escurrimiento reverso y oscilaciones.

¹Ingeniero Civil, Área Hidráulica, JRI Ingeniería - mail: jserey@ing.uchile.cl

²Ingeniero Civil – Doctor en física, JRI Ingeniería – mail: ramonfuentes@tutopia.com

1. INTRODUCCIÓN

El vaciado de dos líneas que convergen a un drenaje común es una situación que se presenta frecuentemente en conducciones de agua y de pulpa mineral cuando existen puntos altos y bajos en el trazado (ver croquis de la Figura 1). Si ocurre un paro de las bombas u otras circunstancias asociadas al requerimiento de cerrar la válvula del tanque, es preciso drenar la línea en el punto bajo.

Este drenaje debe ser realizado en un tiempo razonablemente corto y se debe evitar que el flujo se invierta en una de las ramas, ya que si se produce evacuando pulpa, puede provocar sedimentación e incluso taponamiento si las velocidades son muy bajas. Adicionalmente, es importante limitar las velocidades máximas de vaciado, ya que pueden generar vibraciones excesivas que comprometan las estructuras y la integridad física del personal a cargo de estas operaciones.

No se han encontrado referencias al respecto (salvo estudios industriales internos, por ejemplo de JRI Ingeniería). Sin embargo, el problema puede considerarse como cercano al de los tres estanques en régimen permanente, ampliamente tratado en el pasado (ver Domínguez (1974)).

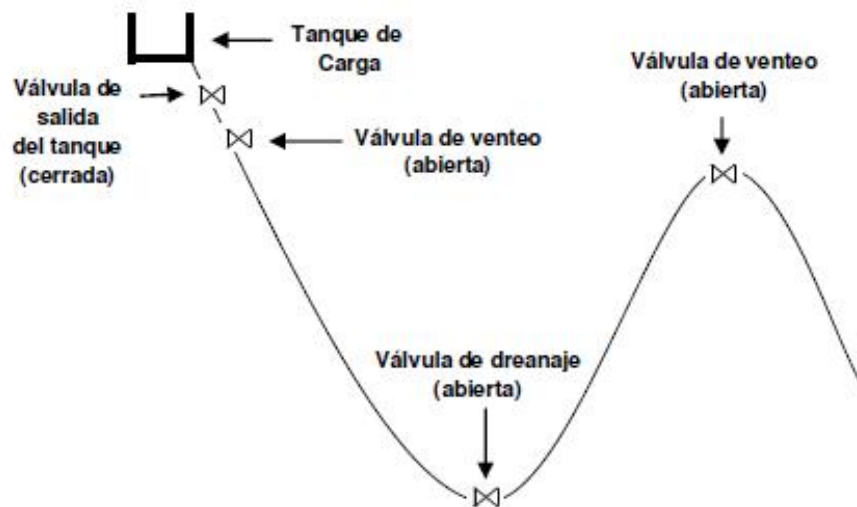


Figura 1. Croquis del vaciado de dos líneas

2. HIPÓTESIS SIMPLIFICATORIAS PREVIAS

Las simplificaciones que se han considerado para analizar el problema son las siguientes:

- El sistema se comporta como uno de columna rígida.
- La única resistencia en los ductos es friccional y corresponde a un factor de Darcy constante f_0 .
- Los ductos son rectilíneos y forman el mismo ángulo θ_0 con la horizontal (Figura 2).

- En el nudo N la cota piezométrica H_N es común.
- Se prescindirá de las diferencias de cota entre el nudo N y la válvula de drenaje.
- Se supondrá que se descarga directamente a la atmósfera.

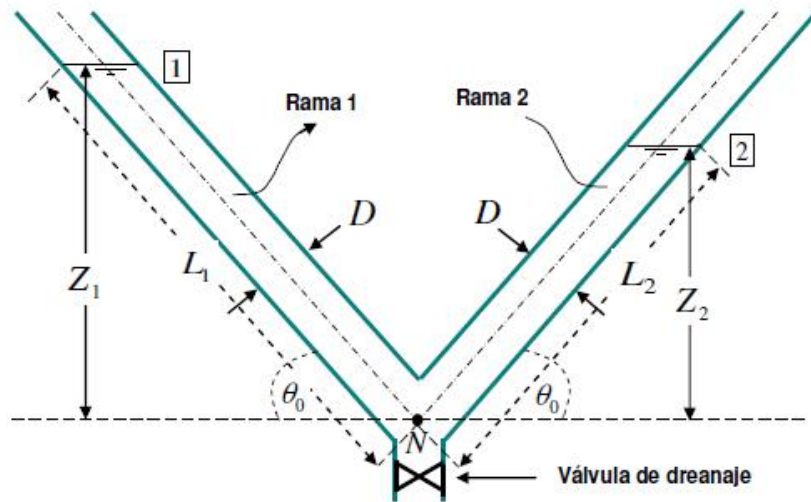


Figura 2. Esquema del drenaje de dos líneas, identificación de parámetros

3. ECUACIONES DESCRIPTIVAS Y CONDICIONES INICIALES

Ecuación de continuidad:

En cada instante de tiempo, es válida la siguiente ecuación de continuidad:

$$AV_1 + AV_2 = a_v V_v \quad (1)$$

Donde:

- A : Área transversal de los ductos 1 y 2.
- V_1 : Velocidades en la rama 1.
- V_2 : Velocidades en la rama 2.
- a_v : Área transversal efectiva de la válvula.
- V_v : Velocidad media en la sección a_v .

De (1) se deduce lo siguiente:

$$V_v = a(V_1 + V_2) \quad (2)$$

$$a = \frac{A}{a_v} \quad (3)$$

Si se supone que las velocidades V_1 y V_2 se dirigen ambas hacia el nudo N, entonces:

$$V_1 = -\frac{dL_1}{dt} \quad (4)$$

$$V_2 = -\frac{dL_2}{dt} \quad (5)$$

Ecuación dinámica para las líneas:

Aplicando el modelo de columna rígida con inercia, se llega a las siguientes ecuaciones:

$$L_1 \sin q = H_N + \frac{f_0 L_1}{D} \frac{V_1 |V_1|}{2g} + \frac{L_1}{g} \frac{dV_1}{dt} \quad (6)$$

$$L_2 \sin q = H_N + \frac{f_0 L_2}{D} \frac{V_2 |V_2|}{2g} + \frac{L_2}{g} \frac{dV_2}{dt} \quad (7)$$

El signo modular ha sido introducido en el término de fricción para tomar en cuenta el caso en que las columnas líquidas asciendan.

Ecuación dinámica de la válvula de drenaje:

Para la válvula de drenaje se tiene la siguiente ecuación:

$$H_N = K \frac{V_v^2}{2g} \quad (8)$$

Reemplazando (8) y (2) en (6) y (7) se obtiene:

$$L_1 \sin q = K a^2 \frac{(V_1 + V_2)^2}{2g} + \frac{f_0 L_1}{D} \frac{V_1 |V_1|}{2g} + \frac{L_1}{g} \frac{dV_1}{dt} \quad (9)$$

$$L_2 \sin q = K a^2 \frac{(V_1 + V_2)^2}{2g} + \frac{f_0 L_2}{D} \frac{V_2 |V_2|}{2g} + \frac{L_2}{g} \frac{dV_2}{dt} \quad (10)$$

Introduciendo las ecuaciones (4) y (5) en las ecuaciones (9) y (10) se obtiene:

$$L_1 \sin q = K a^2 \frac{\left(-\frac{dL_1}{dt} - \frac{dL_2}{dt}\right)^2}{2g} + \frac{f_0 L_1}{D} \frac{\left(\frac{dL_1}{dt}\right) \frac{dL_1}{dt}}{2g} - \frac{L_1}{g} \frac{d^2 L_1}{dt^2} \quad (11)$$

$$L_2 \sin q = K a^2 \left(-\frac{dL_1}{dt} - \frac{dL_2}{dt} \right)^2 + \frac{f_0 L_2}{D} \left(\frac{dL_2}{dt} \right) \frac{dL_2}{dt} \Big| - \frac{L_2}{g} \frac{d^2 L_2}{dt^2} \quad (12)$$

Condiciones iniciales:

Las condiciones iniciales para el problema son las siguientes:

$$t = 0 \Rightarrow L_1 = L_{10}; L_2 = L_{20}; V_1 = V_2 = 0 \quad (13)$$

4. ANÁLISIS INSPECCIONAL

En este capítulo se empleará el análisis inspeccional (Fuentes, 2002) para encontrar parámetros adimensionales que caractericen el fenómeno.

Tomando como magnitudes de referencia L_0 para las distancias y τ para los tiempos. Las ecuaciones (11) y (12) devienen, respectivamente:

$$L_1^* = K_v \left(-\frac{dL_1^*}{dt^*} - \frac{dL_2^*}{dt^*} \right)^2 + K_f L_1^* \frac{L_0}{2g \sin q} \left(\frac{dL_1^*}{dt^*} \right) \frac{dL_1^*}{dt^*} \Big| \frac{1}{t^2} - \frac{L_0 L_1^*}{t^2 g \sin q} \frac{d^2 L_1^*}{dt^{*2}} \quad (13)$$

$$L_2^* = K_v \left(-\frac{dL_1^*}{dt^*} - \frac{dL_2^*}{dt^*} \right)^2 + K_f L_2^* \frac{L_0}{2g \sin q} \left(\frac{dL_2^*}{dt^*} \right) \frac{dL_2^*}{dt^*} \Big| \frac{1}{t^2} - \frac{L_0 L_2^*}{t^2 g \sin q} \frac{d^2 L_2^*}{dt^{*2}} \quad (14)$$

$$K_v = K a^2 \quad (15)$$

$$L_1^* = \frac{L_1}{L_0} \quad (16)$$

$$L_2^* = \frac{L_2}{L_0} \quad (17)$$

$$t^* = \frac{t}{\tau} \quad (18)$$

$$K_f = \frac{f_0 L_0}{D} \quad (19)$$

Recuérdese que hasta ahora L_0 y τ son arbitrarios. La mayor simpleza de la ecuación del movimiento se produce si se elige:

$$t = \sqrt{\frac{L_0}{2g \sin q_0}} \quad (20)$$

Entonces, reemplazando (20) en (13) y (14) se obtiene:

$$L_1^* = K_v \left(-\frac{dL_1^*}{dt^*} - \frac{dL_2^*}{dt^*} \right)^2 + K_f L_1^* \left(\frac{dL_1^*}{dt^*} \right) \frac{dL_1^*}{dt^*} - 2L_1^* \frac{d^2 L_1^*}{dt^{*2}} \quad (21)$$

$$L_2^* = K_v \left(-\frac{dL_1^*}{dt^*} - \frac{dL_2^*}{dt^*} \right)^2 + K_f L_2^* \left(\frac{dL_2^*}{dt^*} \right) \frac{dL_2^*}{dt^*} - 2L_2^* \frac{d^2 L_2^*}{dt^{*2}} \quad (22)$$

Por otra parte:

$$V_1 = -\frac{dL_1}{dt} = -\frac{L_0}{t} \frac{dL_1^*}{dt^*} = -\frac{L_0}{\sqrt{\frac{L_0}{2g \sin q_0}}} \frac{dL_1^*}{dt^*} = -\sqrt{2g \sin q_0 L_0} \frac{dL_1^*}{dt^*} \quad (23)$$

$$V_1^* = \frac{V_1}{V_0} = -\frac{dL_1^*}{dt^*} \quad (24)$$

$$V_0 = \sqrt{2g \sin q_0 L_0} \quad (25)$$

Análogamente:

$$V_2^* = \frac{V_2}{V_0} = -\frac{dL_2^*}{dt^*} \quad (26)$$

L_0 sigue siendo arbitrario y puede ser definido en forma conveniente como:

$$L_0 = L_{10} + L_{20} = L_1(t=0) + L_2(t=0) \quad (27)$$

Entonces, considerando (16) y (17):

$$L_1^*(t^*=0) + L_2^*(t^*=0) = 1 \quad (28)$$

Recapitulación:

El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\frac{d^2 L_1^*}{dt^{*2}} = \frac{K_V}{2L_1^*} \left(-\frac{dL_1^*}{dt^*} - \frac{dL_2^*}{dt^*} \right)^2 + \frac{K_f}{2} \left(-\frac{dL_1^*}{dt^*} \right) \left| \frac{dL_1^*}{dt^*} \right| - \frac{1}{2} \quad (29)$$

$$\frac{d^2 L_2^*}{dt^{*2}} = \frac{K_V}{2L_2^*} \left(-\frac{dL_1^*}{dt^*} - \frac{dL_2^*}{dt^*} \right)^2 + \frac{K_f}{2} \left(-\frac{dL_2^*}{dt^*} \right) \left| \frac{dL_2^*}{dt^*} \right| - \frac{1}{2} \quad (30)$$

$$V_1^* = -\frac{dL_1^*}{dt^*} \quad (31)$$

$$V_2^* = -\frac{dL_2^*}{dt^*} \quad (32)$$

Las siguientes son las condiciones iniciales:

$$t^* = 0; \quad L_1^* = L_{10}^*; \quad L_2^* = L_{20}^*; \quad V_1^* = V_2^* = 0 \quad (33)$$

El sistema propuesto no parece soluble en forma exacta en el caso general y se debe entonces recurrir al cálculo numérico.

5. CASO PARTICULAR DEL PÉNDULO LÍQUIDO SIN FRICCIÓN

Corresponde al caso en que la válvula de drenaje está cerrada. Como el líquido no puede salir, se produce una serie de oscilaciones, llamadas “oscilaciones en masa”.

La constancia del volumen de líquido y de la sección transversal implica:

$$L_1(t) + L_2(t) = L_0 = Cte \quad (34)$$

De (4), (5) y (34) se deduce:

$$V_1 = -V_2 \quad (35)$$

De donde, si el escurrimiento en el instante considerado va en la dirección 1→2:

$$V_2 = -\frac{dL_2}{dt} < 0 \quad (36)$$

$$V_1 = -\frac{dL_1}{dt} = \frac{dL_2}{dt} > 0 \quad (37)$$

Ahora, se puede considerar que se trata de un movimiento en bloque de 1 a 2, con una velocidad común V_2 . Entonces, la ecuación dinámica se escribe, sucesivamente:

$$L_1 \sin q_0 = L_2 \sin q_0 - \frac{f_0 L_0}{D} \frac{V_2 |V_2|}{2g} - \frac{L_0}{g} \frac{dV_2}{dt} \quad (38)$$

$$L_1 = L_0 - L_2 \quad (39)$$

Reemplazando (36), (37) y (39) en (38) se obtiene:

$$\frac{L_0}{g} \frac{d^2 L_2}{dt^2} + 2L_2 \sin q_0 - \frac{f_0 L_0}{D} \frac{V_2 |V_2|}{2g} = L_0 \sin q_0 \quad (40)$$

Prescindiendo de la fricción en la ecuación (40) se obtiene:

$$\frac{d^2 L_2}{dt^2} + 2L_2 \frac{g \sin q_0}{L_0} = g \sin q_0 \quad (41)$$

Esta ecuación es la de un oscilador armónico con una fuerza excitatriz $g \sin \theta_0$. Escrita en variables adimensionales se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{d^2 L_2^*}{dt^{*2}} + L_2^* = \frac{1}{2} \quad (42)$$

Las condiciones iniciales son:

$$t^* = 0 \Rightarrow L_2^* = L_{20}^*; \quad V_2^* = -\frac{dL_2^*}{dt^*} = 0 \quad (43)$$

La solución de la ecuación diferencial (40) es:

$$L_2^* = \frac{1}{2} [1 + (L_{20}^* - L_{10}^*) \cos(t^*)] \quad (44)$$

De donde:

$$L_1^* = 1 - L_2^* = \frac{1}{2} [1 - (L_{20}^* - L_{10}^*) \cos(t^*)] \quad (45)$$

$$V_2^* = \frac{1}{2} (L_{20}^* - L_{10}^*) \sin(t^*) \quad (46)$$

$$V_1^* = -V_2^* = \frac{1}{2} (L_{10}^* - L_{20}^*) \sin(t^*) \quad (47)$$

El período T se determina de:

$$T^* = \frac{T}{t} = 2p \quad (48)$$

Entonces:

$$T = 2pt = 2p \sqrt{\frac{L_0}{2g \sin q_0}} \quad (49)$$

Esto es, la columna líquida oscila como un péndulo matemático cuya longitud L es:

$$L = \frac{L_0}{2 \sin q_0} \quad (50)$$

Si se trata de un tubo en U ($\theta_0 = \pi/2$) entonces:

$$L = \frac{L_0}{2} \quad (51)$$

Este resultado es de Newton (1686).

El caso del péndulo líquido sin fricción puede simularse resolviendo las ecuaciones (29) a (32) prescindiendo de la fricción ($K_f = 0$) y adoptando un valor elevado de $K_v = K\alpha^2$, ya que α es la razón de áreas entre el ducto y la válvula de salida, que tiende al infinito cuando esta se cierra.

Como ejemplo de este comportamiento se ha simulado numéricamente el caso siguiente:

$$K_v = 2.000.000; \quad L_1^*(t=0) = 0,7; \quad L_2^*(t=0) = 0,3; \quad V_1^*(t=0) = V_2^*(t=0) = 0$$

Las ecuaciones (29) a (32) se resolvieron empleando el algoritmo de Runge y Kutta de cuarto orden (Burden y Faires (1998)). Los resultados se muestran en la Figura 3 (longitudes) y Figura 4 (velocidades). En la primera se han dibujado los períodos de oscilación en líneas verticales de color verde. Adicionalmente, se han superpuesto los resultados de la solución exacta del oscilador armónico (ecuaciones (44) a (47)) y se puede apreciar que el ajuste es excelente.

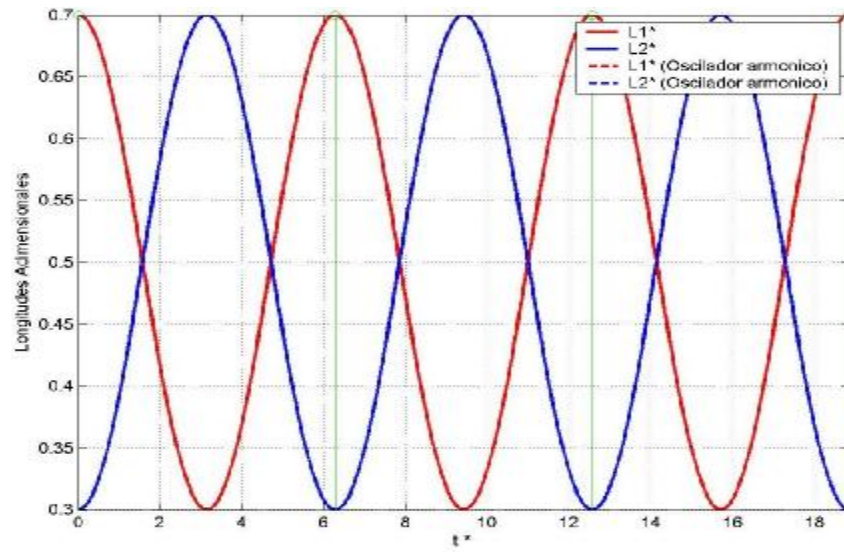


Figura 3. Itinerario del vaciado de ambas ramas - Caso del Péndulo Líquido sin fricción

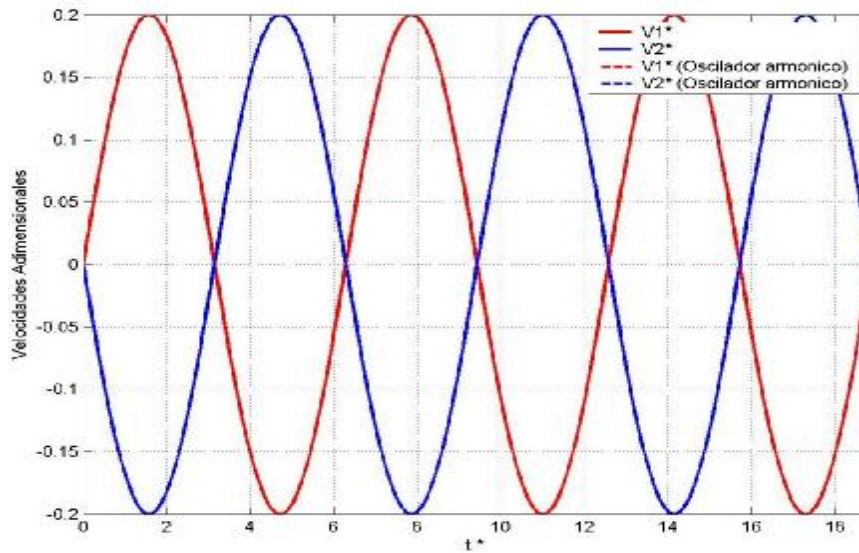


Figura 4. Velocidades de vaciado de ambas ramas - Caso del Péndulo Líquido sin fricción

6. PENDULO LÍQUIDO - INFLUENCIA DE LA FRICCIÓN

Para ejemplificar el efecto de la fricción en el péndulo líquido, se ha simulado numéricamente el caso siguiente:

$$K_v = 2.000.000; K_f = 100; L_1^*(t=0) = 0,7; L_2^*(t=0) = 0,3; V_1^*(t=0) = V_2^*(t=0) = 0$$

Se pueden observar los resultados en la Figura 5 (longitudes) y Figura 6 (velocidades). Tanto las longitudes como las velocidades se amortiguan drásticamente. Obviamente este comportamiento depende del valor de K_f .

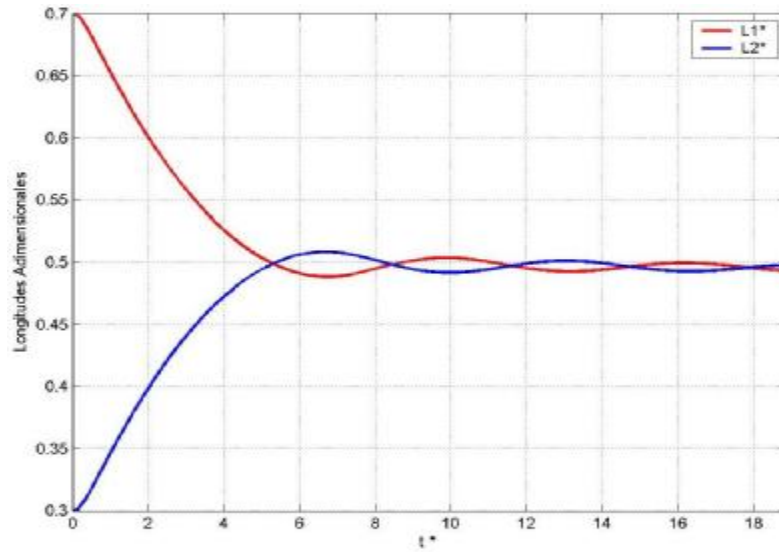


Figura 5. Itinerario del vaciado de ambas ramas - Caso del Péndulo Líquido con fricción

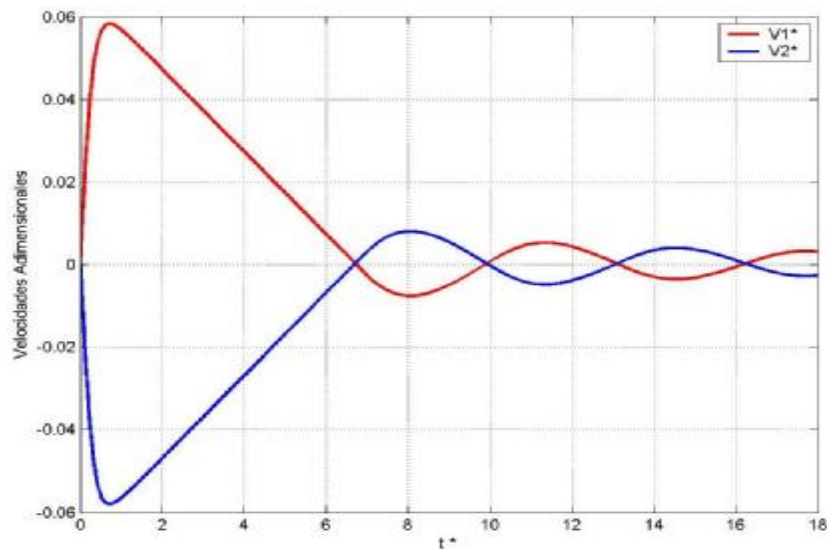


Figura 6. Velocidades de vaciado de ambas ramas - Caso del Péndulo Líquido con fricción

7. DRENAJE NORMAL

Se denomina así la situación en que las dos ramas se vacían siempre a través del drenaje, sin que el escurrimiento en una rama provoque flujo reverso en la otra. Como ejemplo de este comportamiento se ha simulado numéricamente el caso siguiente:

$$K_v = 20; \quad K_f = 150; \quad L_1^*(t=0) = 0,7; \quad L_2^*(t=0) = 0,3; \quad V_1^*(t=0) = V_2^*(t=0) = 0$$

Las longitudes y velocidades a lo largo del tiempo se pueden apreciar en las Figuras 7 y 8. Se observa que las velocidades y longitudes decrecen monótonicamente. El vaciado completo se produce en este caso para $t^* \cong 15,2$.

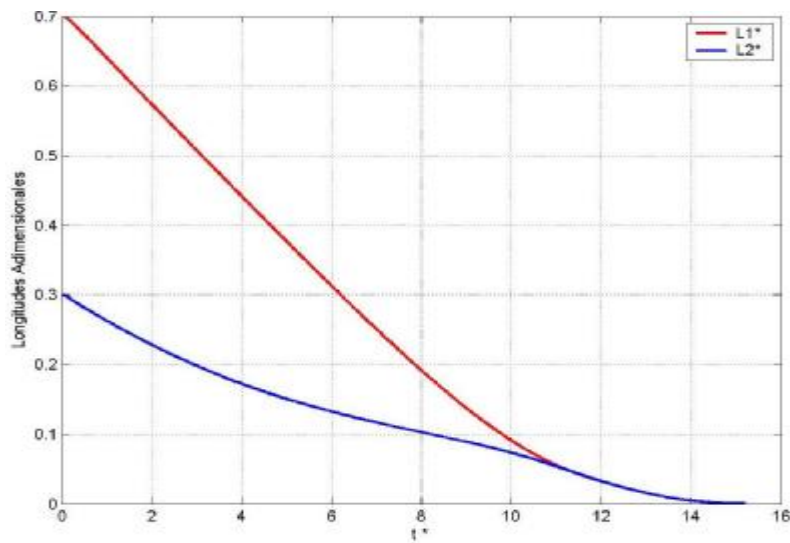


Figura 7. Itinerario del vaciado de ambas ramas – Drenaje Normal

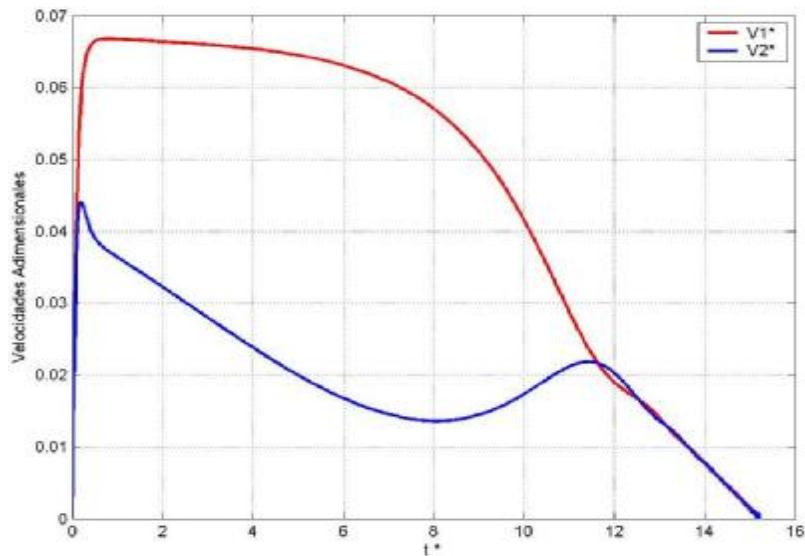


Figura 8. Velocidades de vaciado de ambas ramas – Drenaje Normal

8. DRENAJE CON OSCILACIONES

Corresponde a casos en que el vaciado se produce con intrusión del líquido de una rama en la otra, causando así escurrimiento reverso y oscilaciones. Un ejemplo de este caso es el siguiente:

$$K_v = 2.000; \quad K_f = 15; \quad L_1^*(t=0) = 0,7; \quad L_2^*(t=0) = 0,3; \quad V_1^*(t=0) = V_2^*(t=0) = 0$$

Las longitudes y velocidades a lo largo del tiempo se observan en las Figuras 9 y 10. Se aprecia claramente el carácter oscilatorio del vaciado.

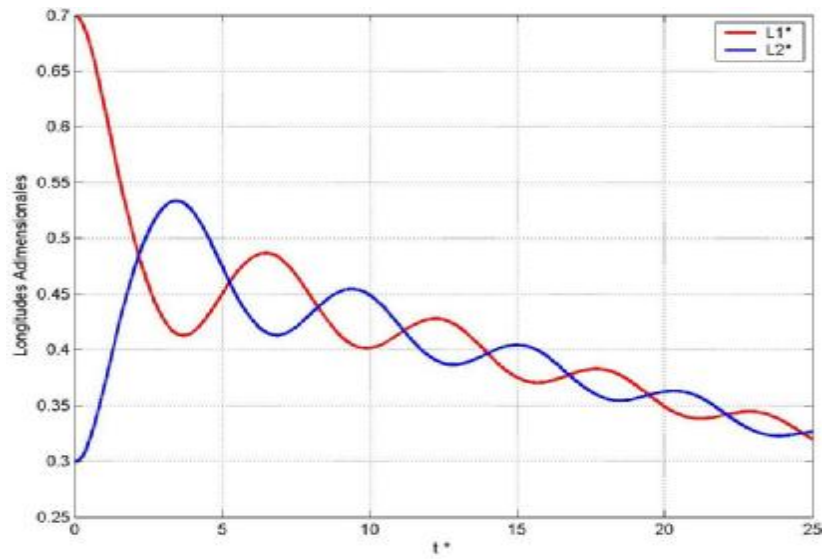


Figura 9. Itinerario del vaciado de ambas ramas – Drenaje con oscilaciones

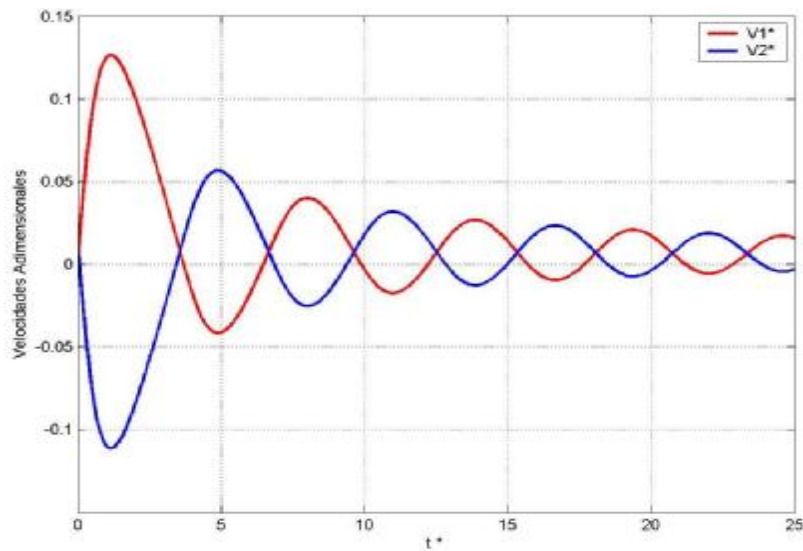


Figura 10. Velocidades de vaciado de ambas ramas – Drenaje con oscilaciones

9. CONCLUSIONES

El vaciado de dos líneas que convergen a un drenaje común es un fenómeno transitorio lento que puede presentar distintos comportamientos dinámicos dependiendo de las características físicas de cada una de las ramas y del sistema de disipación de energía en el drenaje, pudiéndose presentar: drenajes normales, en donde las velocidades y longitudes decrecen monotónicamente, o drenajes con oscilaciones, en que el vaciado se produce con intrusión del líquido de una línea en la otra, causando así escurrimiento reverso y oscilaciones.

Un sistema de drenaje adecuado debe asegurar un tiempo total de vaciado relativamente corto, velocidades máximas controladas y evitar que se produzca flujo reverso con oscilaciones. Esto último reviste especial atención en drenajes de pulpas minerales, ya que las velocidades excesivamente bajas pueden provocar sedimentación de partículas.

El presente trabajo ha expuesto una base teórica importante para el diseño de este tipo de instalaciones. Adicionalmente, se ha realizado un análisis inspeccional, determinando los parámetros adimensionales que permiten entender el fenómeno en cuestión.

REFERENCIAS

DOMINGUEZ, F. J.: "Hidráulica", 4a. Edición, Ed. Universitaria, Santiago, Chile, 1974.

FUENTES, R.: "Modelos Hidráulicos: Teoría y Diseño", Ed. Dolmen, Santiago de Chile, 2002.

NEWTON, I.: "Mathematical Principles of natural Philosophy", 1686. Edición de la Enciclopedia Británica, 1952.

BURDEN, R.L. y FAIRES, J.D.: "Análisis Numérico", 6a. Edición, International Thomson Editors, México, 1998

SEREY, J.: "Estudio en régimen impermanente del vaciado de tubos", Memoria para optar al Título de Ingeniero Civil, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile, 2008.