

**SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRÁULICA
XXV CONGRESO CHILENO DE INGENIERIA HIDRÁULICA**

**SIMULACIÓN DE ANEURISMAS AÓRTICOS ABDOMINALES CON EL MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS**

**PEDRO ANÍBAL PAILLALEF CERDA¹
VIVIAN CLARISA ARANDA NUÑEZ²**

RESUMEN

Un aumento de la pared aórtica es conocido como un aneurisma aórtico, es más común que esto ocurra en la aorta abdominal, debido a esta dilatación, la aorta podría romperse provocando la muerte de la persona, por este motivo, cuando este fenómeno ocurre, y el diámetro del aneurisma sobrepasa los 5 [cm], se instala una prótesis endovascular cuya función es reducir la presión dentro del saco aneurismal y evitar que se rompa. El estudio de este fenómeno es un ejemplo que nos permite comprender la mecánica de fluidos en los fenómenos de transporte en sistemas biológicos. El fenómeno es modelado como un fluido Newtoniano, homogéneo e incompresible. Para obtener los datos de velocidad y presión utilizamos el método de elementos finitos no lineal, generando un código propio que nos permita tener un mayor control sobre la modelación y la teoría asociada al fenómeno.

¹Memorista de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil, Universidad Técnica Federico Santa María

²Académico Departamento de Obras Civiles, Universidad Técnica Federico Santa María

1. INTRODUCCIÓN

Una de las principales motivaciones de este estudio es comprender la mecánica de fluidos en los fenómenos de transporte en sistemas biológicos. En particular, en este caso el flujo en el sistema cardiovascular, el que está conformado por el corazón, órgano muscular que bombea sangre a través de una red cerrada de vasos sanguíneos. Los vasos sanguíneos que transportan la sangre oxigenada desde el corazón se denominan arterias y los vasos sanguíneos que llevan sangre al corazón se denominan venas. La arteria principal es la aorta, cuya longitud aproximada es de 30 [cm] y cubre casi la totalidad del tronco, y se encuentra subdividida en tres zonas, aorta ascendente, arco aórtico y aorta descendente, de aproximadamente 18 [cm] (Hamilton, W., et al., 1976), y a su vez la aorta descendente presenta dos zonas, la aorta torácica y aorta abdominal. El diámetro de la aorta abdominal varía entre mujeres y hombres, y este diámetro aproximado, considerado como normal según los datos de radiología vascular, oscila entre 1.9 [cm] y 2.3 [cm] respectivamente. Un aumento de la pared aórtica es conocido como un aneurisma aórtico, es más común que esto ocurra en la aorta abdominal y esta anomalía se define como aneurisma aórtico abdominal (AAA). Debido a esta dilatación, la aorta podría romperse provocando la muerte de la persona, por este motivo, cuando este fenómeno ocurre, y el diámetro del aneurisma sobrepasa los 5 [cm], se instala una prótesis endovascular cuya función es eludir el área de la aorta debilitada por el aneurisma para evitar que se rompa. La figura 1, muestra un bosquejo del sistema cardiovascular y un aneurisma aórtico abdominal.

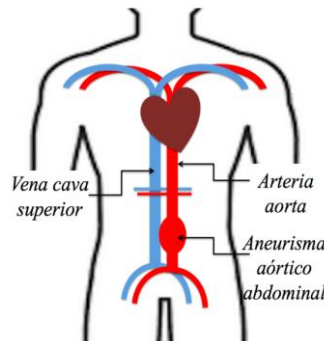


Figura 1: Aneurisma Aórtico Abdominal (AAA).

En este estudio se construye un modelo discreto bidimensional utilizando el método de elementos finitos no lineal, que nos permite estudiar el fenómeno del aneurisma aórtico abdominal, asumiendo que el fluido es Newtoniano, homogéneo e incompresible (Fukushima, T., et al., 1988). Estudios in vitro de flujo arterial han utilizado fluidos Newtonianos (Truskey, G., et al., 2004). La dimensión temporal es evaluada mediante diferencias finitas usando el método de Crank-Nicolson.

El modelo diseñado se basó en el presentado por (Fukushima, T., et al., 1988), modificando la geometría y usando pulsos de velocidad y presión, en la entrada y en la salida respectivamente (Scotti, C., et al., 2008).

Finalmente, se comparan los resultados de velocidades y presiones, con otros estudios publicados para validar el programa creado y evaluar los resultados que produce la incorporación de una prótesis en un aneurisma aórtico.

2. MARCO TEÓRICO

Ecuación de conservación de masa

La formulación diferencial (Euleriana) corresponde a:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

donde ρ corresponde a la densidad y $\vec{u} = (u, v)$, al vector velocidad. En el caso de un fluido incompresible la densidad se considera constante y con esto la ecuación se reduce a lo siguiente:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2)$$

Desarrollando el producto punto de la ecuación (2), se obtiene la siguiente expresión que será la utilizada más adelante:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Ecuación de conservación de momento lineal

La formulación diferencial (Euleriana) que describe el movimiento de un fluido viscoso e incompresible en régimen laminar, para flujo incompresible corresponde a:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (4)$$

de la ecuación (4), μ es la viscosidad del fluido, p corresponde a la presión y \vec{g} la fuerza de gravedad. Como se mencionó anteriormente, esta ecuación es vectorial y es necesario separarla en cada componente, para la formulación en elementos finitos que se verá más adelante. Se generan las siguientes dos ecuaciones:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \rho g_x \quad (5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \rho g_y \quad (6)$$

Condiciones de borde

La aorta en su recorrido consta de diversas ramificaciones, las cuales irrigan diversos órganos, en particular la aorta abdominal irriga el abdomen y las piernas. La porción correspondiente al abdomen, incluyen a los intestinos, el estómago, el páncreas, el bazo y los riñones (Truskey, G.,

et al., 2004). Sin embargo, en el modelo simplificado consideramos a la aorta como un tubo continuo, solo con una entrada y una salida de flujo.

Las condiciones de borde del modelo de aneurisma aórtico abdominal se observan en la figura 2.

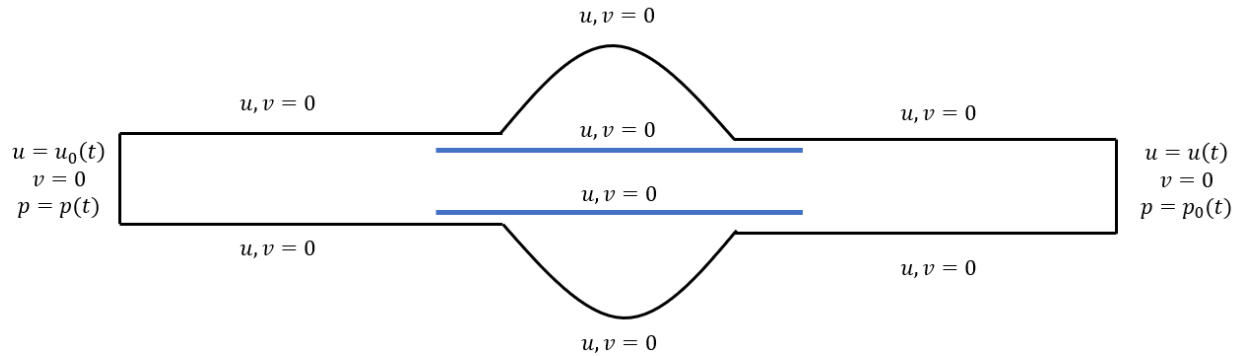


Figura 2: Condiciones de borde del modelo.

En el borde del tubo las velocidades, longitudinal y transversal son, $(u, v) = (0,0)$. En la entrada del tubo, la velocidad longitudinal corresponde al pulso cardiaco, $u = u_0(t)$, ver figura 3(a), (Scotti, C., et al., 2008), la velocidad transversal se considera despreciable y la presión es una incógnita que es función del tiempo. En la salida del tubo, la presión corresponde al pulso cardiaco, $p = p_0(t)$, ver figura 3(b), (Scotti, C., et al., 2008), la velocidad transversal se considera despreciable y la velocidad longitudinal es una incógnita que es función del tiempo.

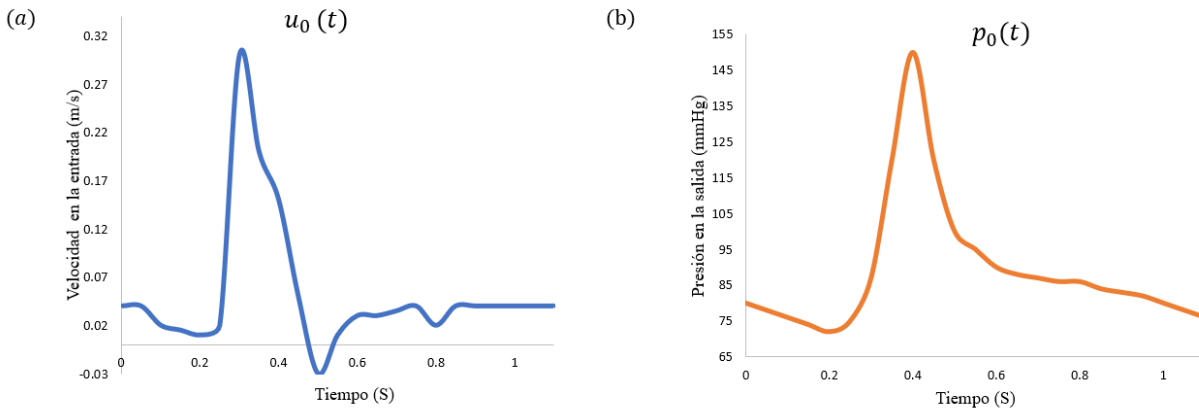


Figura 3: Condiciones de borde: (a) Velocidad en la entrada (m/s), (b) Presión en la salida (mmHg) (Modificado de Scotti, C. et al., 2008)

3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Definición del método

El primer paso es definir el dominio del problema ϑ y un subespacio interno llamado θ , donde se determinarán las soluciones aproximadas, como ejemplifica la figura 4.

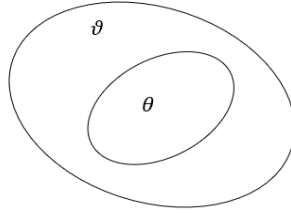


Figura 4: Espacio ϑ y subespacio θ .

Dentro del subespacio θ , se definen funciones base φ y ϕ las cuales sirven para estimar el valor de las variables dentro de cada elemento, dicho esto las variables se definen de la siguiente manera:

$$u = \sum_{i=1}^n \varphi_i u_i(\vec{x}, t) \quad (7)$$

$$v = \sum_{i=1}^n \varphi_i v_i(\vec{x}, t) \quad (8)$$

$$p = \sum_{j=1}^m \phi_j p_j(\vec{x}, t) \quad (9)$$

Los subíndices de las ecuaciones (7), (8) y (9), dependerán de la forma del elemento (triángulo, rectángulo, etc.) y de la cantidad de nodos. Para este trabajo, se utilizarán elementos triangulares de primer orden para la presión y segundo orden para la velocidad, (Zienkiewicz, O., et al. 2005). En la figura 5, se muestra el elemento utilizado, con los respectivos nodos de velocidad y los nodos de presión.

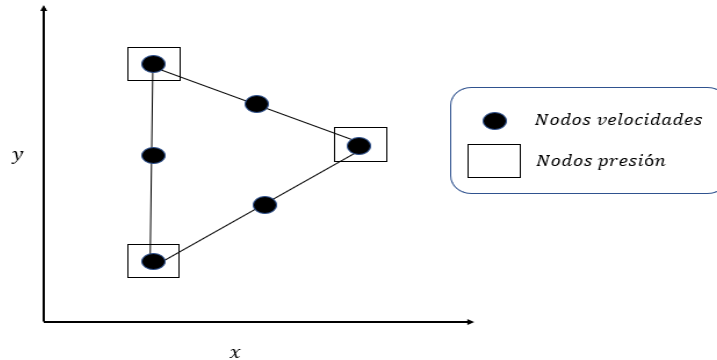


Figura 5: Elemento finito triangular de 3 y 6 nodos.

Formulación débil

De la figura 5, se explican los subíndices de las ecuaciones (7), (8) y (9), donde $i = 1, \dots, 6$, corresponde a los nodos de velocidad y $j = 1, \dots, 3$, corresponde a los nodos de presión. Una vez definido esto, es posible realizar la formulación débil, para esto es necesario despejar algebraicamente las ecuaciones (3), (5) y (6), dejándolas de forma homogénea e integrando sobre el dominio y multiplicando por la función base, respectiva.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \rho g_x = 0 \quad / \cdot \int \varphi_i dA \quad (10)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \rho g_y = 0 \quad / \cdot \int \varphi_i dA \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad / \cdot \int \phi_j dA \quad (12)$$

Al integrar sobre el dominio del problema, se genera una sumatoria de las integrales sobre el área de cada elemento finito, integrando y utilizando el teorema de Green para reducir las derivadas de segundo orden a primer orden, el sistema de ecuaciones diferenciales parciales se convierte en un sistema de ecuaciones lineales y se organiza matricialmente de la siguiente forma:

Del sistema matricial (13) (Reddy, J., 2015), se aprecian las matrices de masa, convección, difusión y vector de fuerzas. A continuación, se muestran los valores respectivos:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c(\vec{u}) & 0 & 0 \\ 0 & c(\vec{u}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S^{11} + S^{22} & 0 & S^{100} \\ 0 & S^{11} + S^{22} & S^{200} \\ (S^{100})^T & (S^{200})^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} m &= \int \rho \varphi_i \varphi_j dA & S^{11} &= \int \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} dA \\ S^{22} &= \int \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} dA & S^{100} &= \int \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} dA \\ S^{200} &= \int \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} dA & c(\vec{u}) &= \int \rho \varphi_i \left(u \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dA \\ F_1 &= \int \rho \varphi_i g_x dA & F_2 &= \int \rho \varphi_i g_y dA \end{aligned} \quad (14)$$

Las expresiones F_1 y F_2 , deberían tener una integral adicional cada uno, que corresponde a las condiciones borde de Neumann. Para este trabajo, no se conocen estas condiciones, por lo tanto, de acuerdo con la literatura (Fukushima, T., et al. 1988) se desprecian, en el caso de las condiciones de Dirichlet se deben considerar.

Proceso de resolución

Es conveniente reescribir el sistema matricial (13) de la siguiente forma para facilitar los siguientes procedimientos.

$$[M]\{\dot{\Delta}\} + [C(\vec{u})]\{\Delta\} + [K]\{\Delta\} = \{F\} \quad (15)$$

Donde $[M]$ representa la matriz de masa, $[C(\vec{u})]$ la matriz de convección, $[K]$ la matriz de difusión, $\{F\}$ el vector de fuerzas y $\{\Delta\}$ el vector que contienen las variables de velocidad y presión.

Luego, es necesario trabajar sobre las derivadas temporales, para esto es necesario usar una aproximación de la derivada como la pendiente entre lapsos de tiempo que cumplan con la condición de Courant (Zienkiewicz, O., et al. 2005).

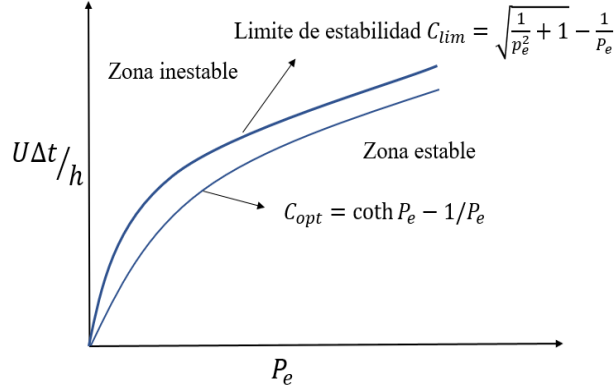


Figura 6: Zonas de estabilidad e inestabilidad (Modificado de Zienkiewicz, O., et al. 2005).

De la figura 6, Pe corresponde al Número de Peclet que se calcula de la siguiente forma:

$$Pe = \frac{|U|h}{2k} \quad (16)$$

Donde, $|U|$ corresponde al módulo de la velocidad en la entrada, h , corresponde al tamaño del elemento que depende del mallado y k corresponde al coeficiente de difusión, en este caso es la viscosidad media de la sangre.

Una vez definido que el salto temporal Δt que cumpla con la condición de Courant, se utiliza un esquema de diferencias finitas para estimar las derivadas temporales, dicho esto el sistema (15) se escribe de la siguiente forma:

$$[\widehat{K}(\vec{u}_{s+1}^r)]\{\Delta\}_{s+1}^{r+1} = [\widetilde{K}(\vec{u}_s)]\{\Delta\}_s + \{F\} \quad (17)$$

Antes de definir los términos de (17), los subíndices r, s corresponde a la iteración y al instante de tiempo correspondiente, además $\{\Delta\} = (u \ v \ p)^t$. Dicho eso los términos son los siguientes:

$$\begin{aligned} [\widehat{K}(\vec{u}_{s+1}^r)] &= [M] + a_1[C(\vec{u}_{s+1}^r)] + [K] \\ [\widetilde{K}(\vec{u}_s)] &= [M] - a_2[C(\vec{u}_s)] + [K] \end{aligned} \quad (18)$$

Donde, $[\widehat{K}(\vec{u}_{s+1}^r)]$, representa una combinación de las matrices de masa, convección y difusión, en la iteración actual r , para el instante siguiente $s + 1$, y $[\widetilde{K}(\vec{u}_s)]$ corresponde a una combinación similar, pero del instante anterior, donde los datos ya son conocidos.

Del conjunto de ecuaciones (18), $a_1 = \alpha\Delta t$ y $a_2 = (1 - \alpha)\Delta t$ donde α corresponde a un coeficiente que define la influencia entre pasado y presente, en este trabajo se utilizó $\alpha = 0.5$, que corresponde a la aproximación de Crank-Nicolson (Thomas, J., 1995).

Una vez definido todo lo anterior, se pasa al esquema de resolución de punto fijo (también es posible utilizar Newton Raphson). Ver figura 7.

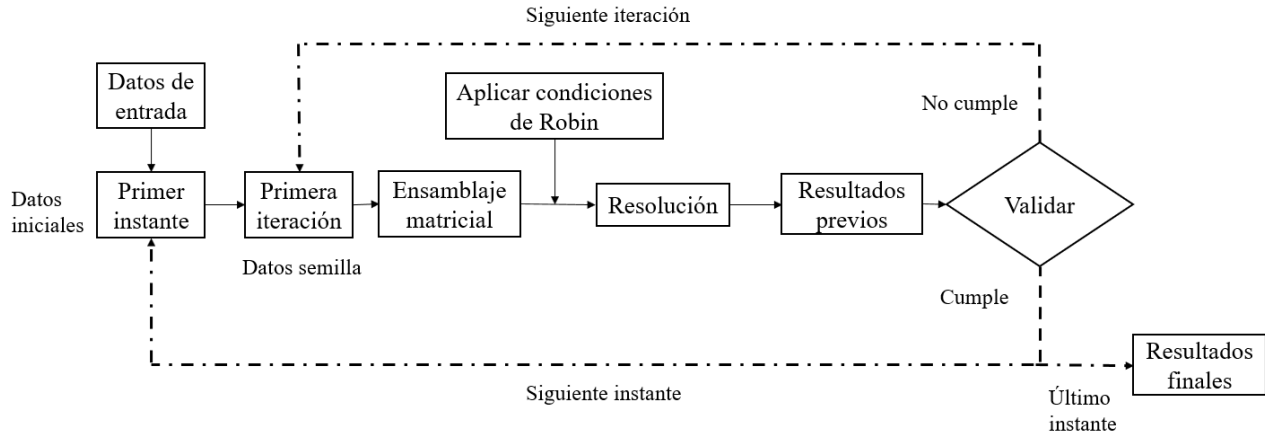


Figura 7. Diagrama de flujo

Mallado con GMSH y editor de texto SUBLIME TEXT

GMSH es un software que permite realizar mallados de cualquier superficie, de este se obtiene los nodos, las matrices de conectividad para los elementos internos o de borde. También puede modificar el tamaño de los elementos y cambiar el orden de las funciones base (Orden 2, Orden 3, etc.).

SUBLIME TEXT es un editor de texto que funciona con lenguaje de programación, pudiendo definir los nodos externos de la región junto a un refinamiento localizado, es decir modificar el tamaño de los elementos en puntos específicos esto es muy útil ya que, las opciones de GMSH solo permiten un refinado de toda la región. También permite asignar los nodos a un grupo en específico (entrada, salida, etc.) facilitando la implementación de las condiciones de borde y finalmente, es posible modificar la forma de los elementos, por defecto GMSH trabaja con triángulos, pero con SUBLIME TEXT se puede cambiar a elementos rectangulares, en la siguiente imagen se muestra parte del proceso de programación en SUBLIME TEXT:

```

L1=10;r1=2;r2=2;a=2;L=5.5;ra=0.5;
p1=newp;Point(p1)={0,0,0,1};
p2=newp;Point(p2)={L1,0,0,0.7};
p3=newp;Point(p3)={5,-r1,0,1};
.....
l1=newl; Line(l1)={p1,p2};
l2=newl; Spline(l2)={p2,p3,p4};
l3=newl; Line(l3)={p4,p5};
.....
s1=news; Plane Surface(s1)={c1,c2,c3};
.....
Transfinite Surface{s1};
Recombine Surface{s1};
    
```

Variables de entrada

Puntos{x₁, y₁, z₁, h}

Líneas y curvas

Plano de superficie

Cambiar a rectángulos

Figura 8. Extracto del código en SUBLIME TEXT.

Cómo se mencionó anteriormente, SUBLIME TEXT ayuda a realizar un refinamiento localizado para esto se modifica el término h de los puntos, en la figura 8, se observa un mallado por defecto del GMSH en los puntos 1 y 3, pero en el punto 2 un refinado de 0.7.

4. MODELO DE ANEURISMA AORTICO ABDOMINAL

En la figura 9, se muestra el modelo del aneurisma aórtico abdominal, en GMSH previo al mallado con elementos finitos:

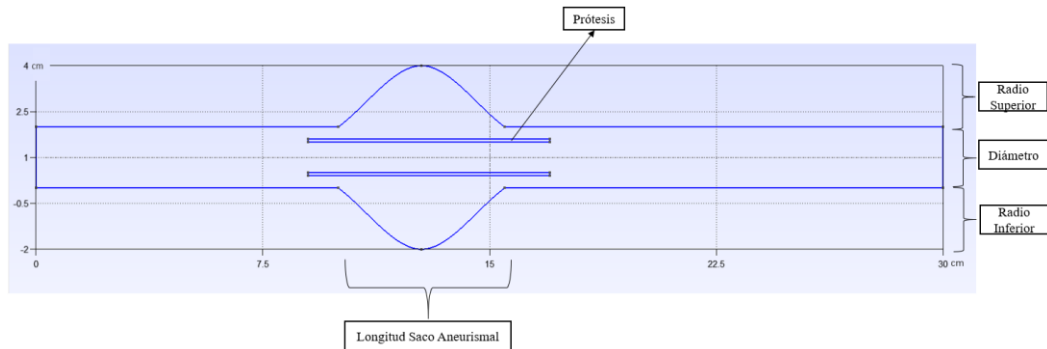


Figura 9. Modelo en GMSH.

En la tabla 1, se muestran los parámetros utilizados en el modelo.

Tabla 1. Parámetros del modelo.

Parámetro	Valor	Unidad
Aceleración de gravedad	9.8	$[m/S^2]$
Densidad de la sangre	1060	$[kg/m^3]$
Diámetro aorta	20	$[mm]$
Espesor prótesis	1	$[mm]$
Longitud aorta abdominal	300	$[mm]$
Longitud saco aneurismal	55	$[mm]$
Longitud prótesis	80	$[mm]$
Radio superior	20	$[mm]$
Radio inferior	20	$[mm]$
Viscosidad de la sangre	0.0035	$[Pa \cdot S]$

Este modelo corresponde a un aneurisma de diámetro 60 [mm] que se considera de alto riesgo, ya que sobre 50[mm] presenta riesgo de ruptura crítico, (Scotti, C., et al., 2008). A continuación, la figura 10, muestra el mallado para el modelo simulado.

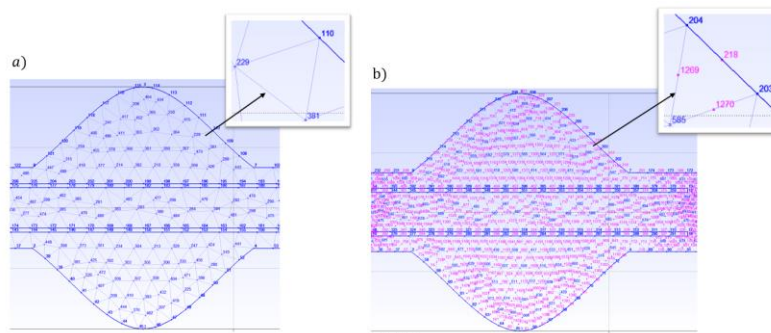


Figura 10. Mallado con GMSH: a) Nodos presión y b) Nodos velocidad.

5. RESULTADOS

La figura 11, muestra los resultados de la velocidad y la figura 12, muestra los resultados de la presión, para ambas figuras a los instantes de 0.2 [S] y 0.5 [S] del pulso utilizado.

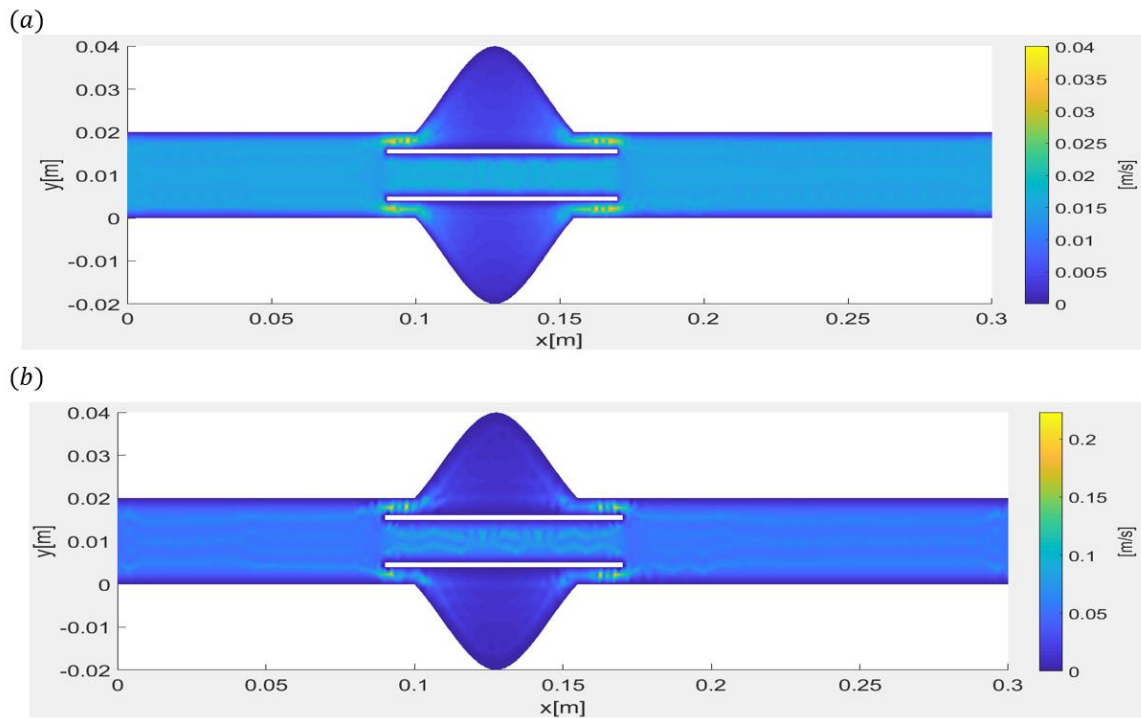


Figura 11. Velocidad para: (a) 0.2 [S], (b) 0.5 [S].

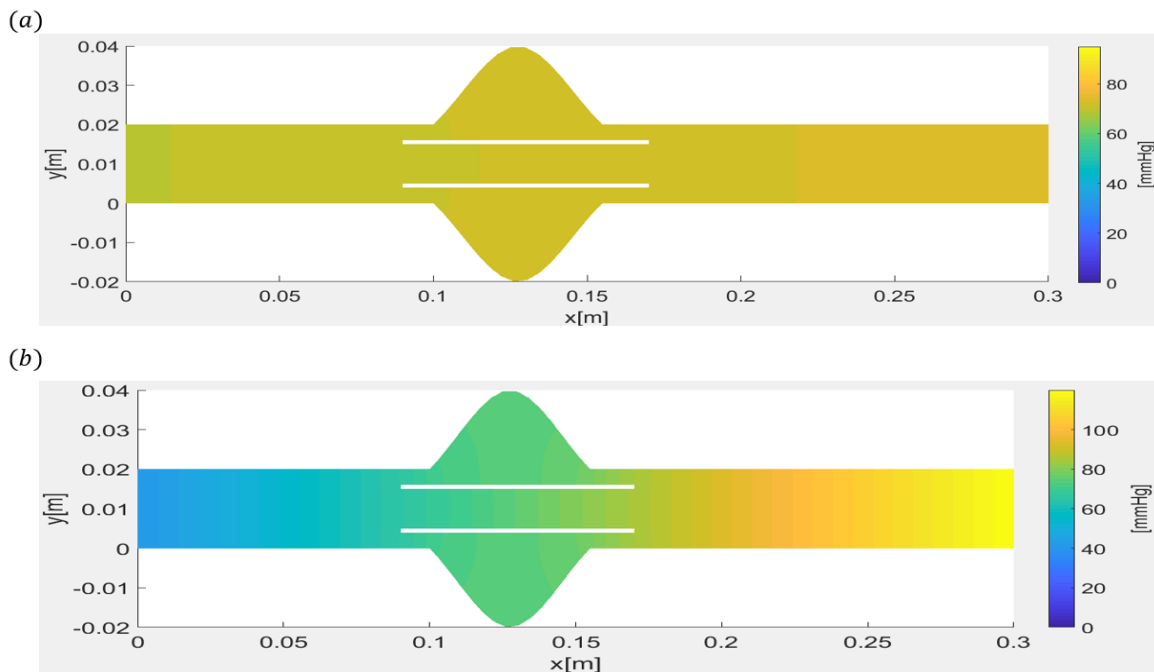


Figura 12. Presión para: (a) 0.2 [S], (b) 0.5 [S].

6. ANALISIS

La forma utilizada para validar los resultados del programa creado usando el método de elementos finitos, es comparando el orden de magnitud de los resultados con otros estudios publicados. En este caso se utilizaron los resultados de la publicación de (Scotti, C., et al., 2008).

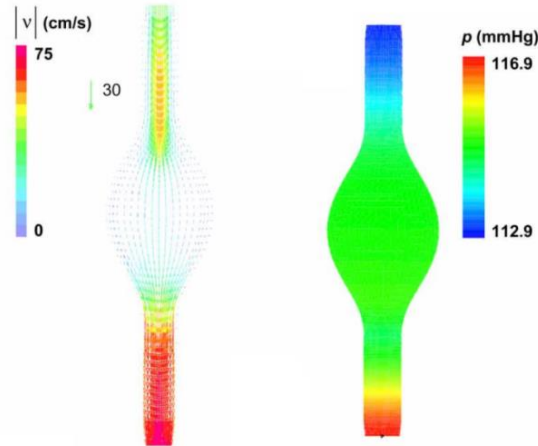


Figura 13. Módulo de velocidad y presión en 0.5[S] (modificado de Scotti, C., et al., 2008)

La figura 13, corresponde a un modelo simétrico sin prótesis endovascular, la cual muestra que el orden de magnitud de la velocidad oscila entre 10^0 y 10^{-1} [m/S], mientras que la presión tiene un orden de 10^2 [mmHg], esto es consistente con los resultados mostrados en las figuras 11 y 12. Claramente, las distribuciones de la velocidad son distintas en la figura 11 y la figura 13, porque un modelo cuenta con la prótesis endovascular mientras que el otro no. Respecto a la presión, se obtiene mayores similitudes lo que valida que el programa creado representa en buena forma el fenómeno estudiado.

Cómo se observa en la figura 3, los pulsos cardiacos de velocidad y presión presentan las características de un perfil oscilatorio que es provocado por la válvula aórtica que regula el paso de la sangre en periodos de 1.1[S], aproximadamente, provocando que cambie el sentido del flujo en algunos instantes de tiempo.

En la figura 11 (a), se observa un comportamiento estable en la velocidad, donde se tienen 0.02 [m/S] en la entrada y velocidades máximas de 0.06 [m/S] en el inicio de la prótesis y hacia el final, es decir, en la zona más pequeña entre aorta y prótesis, esto es consisten porqué existe una reducción en el área de flujo. Por otro lado, en figura 12 (a) se aprecia un gradiente de presión positivo, esto ocurre porque en este instante la pendiente de la figura 3 (b), es negativa, pero esto no refleja una alteración en la velocidad porque el gradiente de presión es pequeño, 5 [mmHg] aproximadamente.

Observando la figura 11 (b), se tiene un comportamiento menos estable de la velocidad esto es lógico porque en este instante, 0.5 [S], la pendiente de la figura 3 (a), pasa de negativa a positiva pero esta inestabilidad puede ser despreciable (cualitativamente) porque observando la figura 12 (b), el gradiente de presión es aproximadamente de 60 [mmHg], además la presión en la salida entre los instantes 0.4[S] y los 0.55 [S], se mantiene decreciendo de manera constante.

7. CONCLUSIONES

El programa creado utilizando el método de elementos finitos no lineal nos ha permitido estudiar un caso en particular de los fenómenos de transporte en sistemas biológicos, obteniendo resultados consistentes sin necesidad de contar con un programa comercial, que en general son muy costosos. Además, este nos permitirá estudiar otros fenómenos, en los cuales las geometrías y condiciones de borde sean más complejas. Por otro lado, el código puede ser adaptado a un lenguaje de programación de código abierto como PYTHON (importando las librerías necesarias).

Respecto a los resultados, se aprecia que la prótesis endovascular funciona correctamente porque las velocidades son mayores dentro de esta y menores dentro del saco.

Finalmente, utilizando este trabajo se pueden derivar nuevas investigaciones en el área de la mecánica de fluidos y de los elementos finitos.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Programa de Becas de Postgrado de la Universidad Técnica Federico Santa María, al Departamento de Obras Civiles de la Universidad Técnica Federico Santa María.

REFERENCIAS

Fukushima, T., Matsuzawa, T and Homma. T. (1988). Visualization and Finite Element Analysis of Pulsatile Flow in Models of the Abdominal Aortic Aneurysm.

Hamilton, W., Yoffey, J., Joseph, J., Glenister, T., Coupland, R., Le Gros, W., McMinn, R., Scothorne, R., Sinclair, D. (1976). Textbook of human anatomy. ISBN 978-1-349-06486-1.

Reddy, J. (2015). An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Second Edition. ISBN 978-0-19-964175-8.

Scotti, C.M., Jimenez. J., Muluk. S.C and Finol. E.A. (2008). Wall stress and Flow dynamics in abdominal aortic aneurysms: finite element análisis vs. fluid-structure interaction.

Truskey, G., Yuan, F. & Katz, D. (2004). Transport phenomena in biological systems. ISBN 0-13-042204-5.

Thomas, J. W. (1995). Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods.

Zienkiewicz, O., Taylor, R. & Nithiarasu, P. (2005). The Finite Element Method for Fluid Dynamics. Sixth edition. ISBN 0-7506-6322-7.