

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRÁULICA
XXV CONGRESO CHILENO DE INGENIERIA HIDRAULICA

**EFFECTO DE LA VISCOSIDAD VARIABLE EN EL TRANSPORTE DE CALOR EN
UNA CELDA HELE-SHAW, APLICACIÓN A SISTEMAS GEOTERMALES Y
MODELACIÓN NUMÉRICA CON ELEMENTOS FINITOS**

BRUNO QUEZADA¹
GINO MONTECINOS²
JUVENAL LETELIER³

RESUMEN

En este trabajo se investiga numéricamente el transporte de calor en 2D en una celda Hele-Shaw, donde el fluido de trabajo posee densidad y viscosidad variables con la temperatura. Este tipo de celdas permite modelar a la escala de laboratorio procesos físicos que ocurren en reservorios geotermales, tales como la convección de Rayleigh-Darcy en fracturas verticales. Se resuelven las ecuaciones de Darcy y advección-difusión de calor mediante el método de los elementos finitos usando Galerkin discontinuo, donde las condiciones de borde para la temperatura son fijas tanto abajo (T_h^*) como arriba ($T_c^* < T_h^*$), mientras que las condiciones de borde de velocidad satisfacen libre deslizamiento. Se demuestra que la transferencia de calor, cuantificada por el número de Nusselt Nu , satisface la ley de escalamiento $Nu \sim Ra^\gamma$ válida para números de Rayleigh $Ra < 1000$, siendo γ un parámetro que depende de la variación de la viscosidad con la temperatura. Se demuestra numéricamente que $\gamma > \gamma_0$, siendo γ_0 el escalamiento obtenido para viscosidad constante. Las simulaciones numéricas muestran además que el inicio de convección concuerda con los resultados analíticos reportados por Malkovsky y Magri (2016), mientras que para convección desarrollada los perfiles térmicos promediados en la horizontal concuerdan con investigaciones experimentales en celdas Hele-Shaw (Letelier et al, 2016).

¹ Estudiante de Ingeniería Civil Hidráulica - email: brunoquezada@ing.uchile.cl

² Profesor Asistente, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de La Frontera– email: gino.montecinos@ufrontera.cl

³ Profesor Asistente, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile– email: juvenal.letelier@uchile.cl

1. INTRODUCCIÓN

El transporte de calor convectivo corresponde a un fenómeno con bastas aplicaciones en ingeniería y geociencias, tales como dinámicas caóticas y bifurcaciones (Bizon et al. 1997; Sheu et al. 2008), convección en medios porosos (Foster 1965), reservorios geotermales (Letelier et al. 2021), geodinámica terrestre (Vynnytska et al. 2011) y transporte de contaminantes, entre otros. El amplio repertorio de configuraciones y la gran complejidad que pueden llegar a tener estos sistemas de transporte causan interés en su estudio.

Un caso particular de transporte convectivo corresponde a los reservorios geotermales, donde existe un importante gradiente termal en profundidad, generando diferencias de temperatura entre el reservorio de calor y zonas frías más someras. Estos sistemas pueden ser utilizados tanto como para la generación de energía eléctrica, como para la calefacción. El aprovechamiento de la energía geotermal contribuye a la transición de una matriz energética basada en combustibles fósiles a una basada en energía renovable y sustentable con menor emisión de gases de efecto invernadero.

En el caso de que el reservorio esté confinado a una falla geológica vertical y saturada (Moeck 2014), las altas temperaturas en la zona profunda generan una disminución local de la densidad del fluido, lo que provoca una distribución de densidades que impulsan flujos convectivos a través del interior de la falla. A escala de laboratorio, es posible estudiar estos sistemas con celdas Hele-Shaw, donde para aperturas pequeñas -del orden de 0,5 mm o menores- la ley de Darcy (Letelier et al. 2019) es válida.

En este trabajo se estudia numéricamente el transporte de calor en la celda Hele-Shaw, la cual representa la geometría de una fractura vertical a la escala de laboratorio. Para ello, se definen los números adimensionales Rayleigh (Ra) y Nusselt característico ($\langle Nu \rangle_\tau$). El primero caracteriza el régimen de flujo (conductivo o convectivo), calculado como el cociente entre la escala temporal difusiva sobre la escala temporal advectiva. El segundo determina la respuesta del sistema frente a las forzantes impuestas, calculado como el transporte de calor convectivo (difusión + advección) sobre el transporte de calor difusivo.

A través de la realización de múltiples simulaciones, es posible construir la curva de escalamiento $\langle Nu \rangle_\tau - Ra$, la cual ha sido investigada ampliamente en la literatura, experimental (Nield y Bejan 2006; Yen 1974) y numéricamente (Otero et al. 2004; Hewitt et al. 2012; Letelier et al. 2019). Sin embargo, el amplio rango de temperaturas que puede existir en un sistema geotermal implica que la viscosidad del fluido de trabajo puede variar considerablemente, afectando la respuesta térmica del sistema (Lai y Kulacki 1990; Malkovsky y Magri 2016).

En este trabajo se investiga el transporte de calor en una celda Hele-Shaw, incorporando la variación de la viscosidad en función de la temperatura, con el fin de construir nuevas curvas de escalamiento $\langle Nu \rangle_\tau - Ra$ a través de simulaciones numéricas. El modelo es resuelto con elementos finitos y Galerkin discontinuo utilizando la librería FEniCS de Python (Langtangen y Logg 2017), la cual ha sido utilizada exitosamente en otros modelos de transporte de calor, por ejemplo, en convección del manto terrestre (Vynnytska et al. 2013).

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para representar el sistema, se considera una celda Hele-Shaw 2D de largo L^* , altura H^* con $2H^* = L^*$, temperatura superior T_c^* e inferior T_h^* con $T_c^* < T_h^*$. Utilizando la aproximación de Boussinesq y para aperturas lo suficientemente pequeñas, la temperatura T^* , velocidad $\mathbf{u}^* = (u^*, w^*)$ y presión P^* evolucionan de acuerdo con la ley de Darcy y la ecuación de transporte de advección-difusión, como se presenta a continuación:

$$\mathbf{u}^* \frac{\mu^*}{\kappa^*} = -\nabla^* P^* - \rho^* g^* \hat{z} \quad (1)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* T^* = K^* \nabla^{*2} T^* \quad (3)$$

donde μ^* corresponde a la viscosidad, κ^* a la permeabilidad intrínseca del medio, t^* al tiempo, ρ^* a la densidad del fluido, \hat{z} al vector unitario en la dirección vertical, g^* a la aceleración de gravedad y K^* al coeficiente de difusión termal. Las relaciones constitutivas de densidad y viscosidad son:

$$\rho^* = \rho_c^* - \alpha^* (T^* - T_c^*) \quad (4)$$

$$\mu^* = \mu_c^* e^{-b^* (T^* - T_c^*)} \quad (5)$$

Las cuales han presentado un buen ajuste a datos experimentales (Malkovsky y Magri 2016). En las ecuaciones anteriores ρ_c^* y μ_c^* corresponden a la densidad y viscosidad del fluido a temperatura T_c^* , respectivamente, α^* al coeficiente de dilatación termal y b^* a un coeficiente característico del fluido de trabajo. Las ecuaciones que gobiernan el sistema son adimensionalizadas a través de los siguientes escalamientos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{H^*} & z &= \frac{z^*}{H^*} & T &= \frac{T^* - T_c^*}{\Delta T^*} = \frac{T^* - T_c^*}{T_h^* - T_c^*} \\ \mu &= \frac{\mu^*}{\mu_g^*} = \frac{\mu^*}{\mu^* \left(\frac{\Delta T^*}{2} + T_c^* \right)} = e^{-\lambda(T-0,5)} & \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{u}^*}{u_c^*} = \frac{\mathbf{u}^* \mu_g^*}{\alpha^* \Delta T^* \kappa^* g^*} \\ \hat{P} &= \frac{\hat{P}^*}{\hat{P}_c^*} = \frac{\hat{P}^*}{H^* \alpha^* \Delta T^* g^*} & t &= \frac{t^*}{t_c^*} = \frac{t^* u_c^*}{H^*} \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\hat{P}^* = P^* + \rho^* g^* z^*$ corresponde a la presión motriz y $\lambda = b^* \Delta T^*$ corresponde a un parámetro adimensional que caracteriza la variación de la viscosidad del fluido en el dominio, el cual depende tanto de las características intrínsecas del fluido de trabajo (b^*), como de la diferencia de temperaturas que hay en el sistema (ΔT^*). Al sustituir las expresiones de (6) en las ecuaciones (1, 2 y 3), se obtiene:

$$\mu \mathbf{u} = -\nabla \hat{P} + T \hat{z} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{Ra} \nabla^2 T \quad (9)$$

donde $Ra = \frac{u_c^*}{H^*} \cdot \frac{H^{*2}}{K^*} = \frac{u_c H^*}{K^*}$ es el número de Rayleigh, el cual corresponde al tiempo difusivo sobre el tiempo advectivo. Debido a que La ley de Darcy adimensional no es estable para todas las

combinaciones de presión y velocidad (Babuska 1971, Masud y Hughes 2002), se recurre al uso de la función corriente:

$$\nabla\Psi = (-w, u) \quad (10)$$

donde se considera $\mathbf{u} = (u, w)$. Luego, se le extrae el rotor a la ecuación (7) y, al desarrollar los términos, se obtiene para el eje \hat{y} :

$$\nabla^2\Psi = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda w\frac{\partial T}{\partial x} - \lambda u\frac{\partial T}{\partial z} \quad (11)$$

Lo cual corresponde a una ecuación de Poisson inhomogénea para Ψ y genera un sistema numérico estable. Las condiciones de borde fijan la temperatura en la frontera superior e inferior e imponen no flujo de calor a través de las fronteras horizontales:

$$T_{z=0} = 1 \quad T_{z=1} = 0 \quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=2} = 0 \quad (12)$$

Mientras que para la velocidad se impone libre deslizamiento en toda la frontera:

$$u|_{x=0} = u|_{x=2} = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=1} = 0 \quad (13)$$

$$v|_{z=0} = v|_{z=1} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=2} = 0 \quad (14)$$

Finalmente, las condiciones iniciales imponen el caso conductivo puro:

$$\mathbf{u}_0 = 0 \quad (15)$$

$$T_0 = 1 - z \quad (16)$$

3. MÉTODO NUMÉRICO

El dominio Ω del problema es representado por una celda de relación de aspecto 2:1, el cual es discretizado por la grilla τ_h y resuelto a través de un esquema de *splitting* (Hansen y Ebel, 1988), el cual resuelve en forma separada las ecuaciones (9) y (11). Para resolver la ecuación (9), se utiliza Galerkin discontinuo, el cual emplea espacios de funciones discontinuas en los bordes de los elementos de τ_h para representar el campo de temperatura. Gracias a esta propiedad, es posible reproducir los altos gradientes de temperatura típicos para números de Rayleigh altos. Sea Q_h un espacio de funciones discontinuas en los bordes de los elementos de τ_h de dimensión 1. La formulación variacional de la ecuación (9) es: dada una velocidad \mathbf{u}_h , encuentre $T_h \in Q_h$ tal que $\forall \delta \in Q_h$

$$\sum_{\tau \in \tau_h} \int_{\tau} \frac{\partial T_h}{\partial t} \delta dx + a_A(\mathbf{u}_h, T_h, \delta_h) + a_D(T_h, \delta_h) = 0 \quad (17)$$

donde a_A corresponde al término advectivo y a_D al término difusivo, según el desarrollo de Vynnytska et al. (2013), Di Pietro et al. (2006) y Arnold (1982):

$$a_A = - \sum_{\tau \in \tau_h} \int_{\tau} T_h \mathbf{u}_h \cdot \nabla \delta_h dx + \sum_{e \in E^o} \int_e (\mathbf{u}_h \cdot \llbracket \delta_h \rrbracket \langle T_h \rangle + \frac{1}{2} |\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}| \llbracket \delta_h \rrbracket \llbracket T_h \rrbracket) ds \quad (18)$$

$$a_D = \frac{1}{Ra} \left(\sum_{\tau \in \tau_h} \int_{\tau} \nabla T_h \cdot \nabla \psi_h dx - \sum_{e \in E^o} \int_e \langle \nabla T_h \rangle \cdot \llbracket \psi_h \rrbracket - \langle \nabla \psi_h \rangle \cdot \llbracket T_h \rrbracket + \frac{\alpha_h}{h_{\tau}} \llbracket T_h \rrbracket \llbracket \psi_h \rrbracket ds \right) \quad (19)$$

donde α_h corresponde a un parámetro regularizador, h_{τ} el tamaño del elemento $\tau \in \tau_h$, E^o al conjunto de bordes internos de τ_h , n al vector normal unitario. Los operadores salto $\llbracket \cdot \rrbracket$ y promedio $\langle \cdot \rangle$ se definen para un escalar β en un borde interno compartido por los elementos τ^+ y τ^- con normales n^+ y n^- :

$$\llbracket \beta \rrbracket = \beta^+ n^+ + \beta^- n^- \quad \langle \beta \rangle = \frac{\beta^+ + \beta^-}{2} \quad \beta^{\pm} = \beta|_{\tau^{\pm}} \quad (20)$$

Sea W_h un espacio de funciones continuas dimensión 1 relativo a τ_h . La formulación variacional estándar de la ecuación (11) es: dada una temperatura T_h , encontrar $\Psi_h \in W_h$ tal que $\forall \phi_h \in W_h$

$$\int_{\Omega} \nabla \Psi_h \nabla \phi_h d\Omega = \int_{\Omega} \phi_h \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial T_h}{\partial x} - \lambda w \frac{\partial T_h}{\partial x} + \lambda u \frac{\partial T_h}{\partial z} \right] d\Omega \quad (21)$$

La respuesta del sistema se determina a través del número de Nusselt:

$$Nu(t) = - \int_0^2 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} dx \quad (22)$$

el cual caracteriza el transporte de calor en la vertical y depende del gradiente de temperaturas en la base de la celda. El número de Nusselt corresponde a la razón entre transporte de calor convectivo y difusivo. Cuando $Nu = 1$, el sistema tiene transporte conductivo puro, mientras que para valores mayores existe transporte por convección. Debido a la naturaleza dinámica del sistema Nu depende del tiempo, por lo tanto, para caracterizar la respuesta global del dominio, es necesario promediar temporalmente desde el momento t_o en que el sistema llegue a un estado estacionario estadístico hasta el tiempo final de la simulación $t_o + \tau$:

$$\langle Nu \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{t_o}^{t_o + \tau} Nu(t) dt \quad (23)$$

Se utiliza un grillado τ_h no estructurado para representar el dominio, el cual es refinado en torno al borde superior e inferior de forma tal que la capa límite térmica, de espesor $\sim 15 \cdot Ra^{-1}$ (Otero et al. 2004), posea al menos 6 celdas. Para resolver la evolución del sistema en el tiempo se utiliza un algoritmo de predicción-corrección. Este esquema es implementado en FEniCS (Langtangen y Logg, 2017). Con tal de satisfacer la condición CFL de estabilidad (Courant et al. 1928), el paso temporal k -ésimo se determina a partir de la siguiente relación:

$$\Delta t_k = C_{CFL} \cdot \frac{h_{min}}{\max \|u_h^{k-1}\|} \quad (24)$$

donde h_{min} corresponde a el mínimo tamaño de celda en τ_h , C_{CFL} corresponde a la constante de CFL y toma el valor 0,1.

4. RESULTADOS

En primer lugar, se realizan simulaciones para el caso de viscosidad constante ($\lambda = 0$), como se presenta en la Figura 1. Se observa que las simulaciones realizadas en este trabajo presentan una curva de escalamiento $\langle Nu \rangle_\tau - Ra$ coherente con resultados de la literatura, por lo que la metodología de elementos finitos utilizada es capaz de resolver el problema de transporte de calor y los resultados obtenidos se consideran válidos.

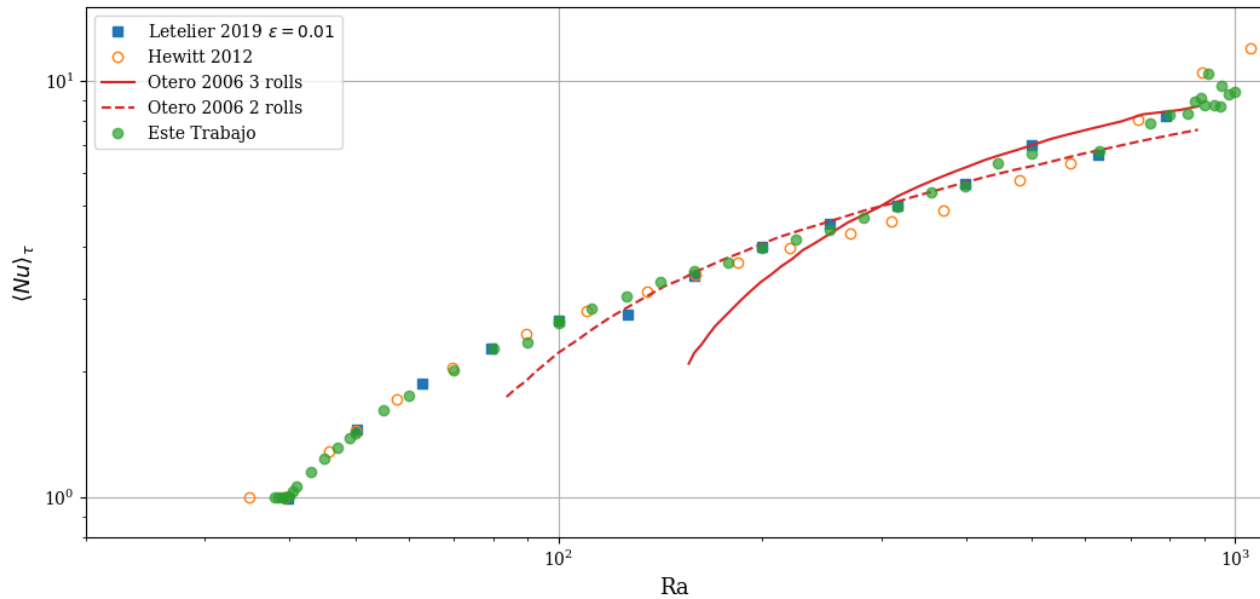


Figura 1 Curva de escalamiento $\langle Nu \rangle_\tau - Ra$ para el caso de viscosidad constante. Comparación de resultados propios (verde) con modelos numéricos de la literatura, Letelier et al. (2019) (azul), Hewitt et al. (2012) (amarillo) y Otero et al. (2006) (rojo). Se aprecia que los resultados obtenidos son coherentes con los presentes en la literatura.

Luego, se realizan modelos con viscosidad variable para distintos valores de $\lambda \leq 3$, donde cada simulación se lleva a cabo hasta lograr una condición estacionaria en el sistema. A partir de los resultados obtenidos, en la Figura 2 se presentan campos de temperatura para $\lambda = 0$ y $\lambda = 3$ con distintos Ra , lo que permite comparar las diferencias que emergen al implementar la viscosidad variable.

A partir de los campos de temperatura presentados, se observa que para todas las simulaciones la condición estacionaria corresponde a la generación de celdas convectivas, las cuales se manifiestan como plumas térmicas. A medida que aumenta Ra , la capa límite térmica disminuye su espesor, el número de plumas aumenta y éstas se tornan más esbeltas.

Por otro lado, los modelos de viscosidad variable ($\lambda = 3$) desarrollan un mayor número de plumas para Ra similares. Otra diferencia, corresponde a la distribución de temperatura que caracteriza a las plumas térmicas. Por un lado, las plumas que transportan fluido frío y de mayor viscosidad

hacia la zona inferior de la celda alcanzan una mayor temperatura al acercarse a la condición de borde cálida, en comparación con el caso de viscosidad constante. Análogamente, las plumas térmicas que transportan fluido cálido y de menor viscosidad hacia la zona superior de la celda también presentan una mayor temperatura en su zona superior, al acercarse a la condición de borde fría, lo que sugiere que se desarrolla una mayor temperatura promedio en el dominio. Adicionalmente, para el caso de viscosidad variable, la condición estacionaria presenta propagación y generación de perturbaciones termales, las cuales alteran las estructuras de las plumas térmicas y rompen la simetría que se puede observar para el caso de viscosidad fija.

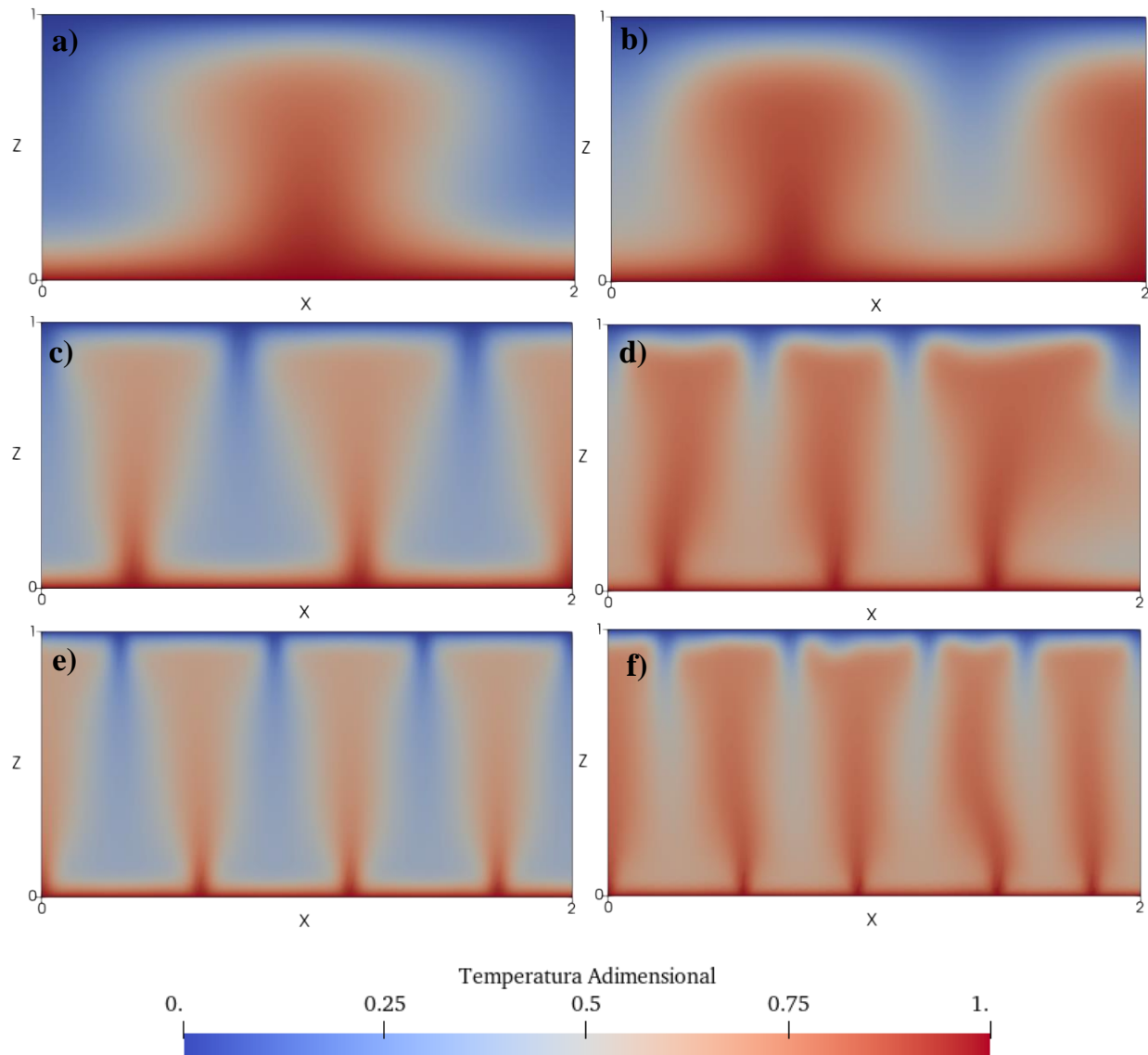


Figura 2 Campos de temperatura adimensional para distintas simulaciones, en sus respectivos estados de equilibrio estadístico. a) $Ra = 100$ $\lambda = 0$, b) $Ra = 100$ $\lambda = 3$, c) $Ra = 501$ $\lambda = 0$, d) $Ra = 501$ $\lambda = 3$, en la zona derecha se observa el ascenso de una perturbación, e) $Ra = 955$ $\lambda = 0$ y f) $Ra = 950$ $\lambda = 3$, en la zona central superior, se puede observar la generación de una perturbación termal, bajo la capa térmica difusiva.

Para determinar la influencia que tiene la viscosidad variable sobre el transporte de calor en la dirección vertical, se construyen las curvas de escalamiento $\langle Nu \rangle_\tau - Ra$, para los casos $\lambda \in \{0,1,2,3\}$, las cuales se presentan en la Figura 3. Con el fin de comparar estas curvas, se realiza un ajuste exponencial en el rango $100 \leq Ra \leq 1000$ de la forma $\langle Nu \rangle_\tau \sim Ra^\gamma$. A partir del ajuste, se observa que para números de λ mayores, el exponente γ del escalamiento aumenta, lo que implica un aumento del transporte de calor a medida que aumenta la variabilidad de la viscosidad en el dominio. Al realizar una regresión lineal, se obtiene la relación $\gamma = 0,54 + \lambda \cdot 0,032$, lo que permite extrapolar el efecto que tiene la variación de viscosidad para otros valores de λ . Las curvas de escalamiento presentadas son válidas solo para el caso 2D ya que Hewitt et al. demuestran que el escalamiento varía en el caso 3D.

Otro aspecto que varía en el sistema al incorporar viscosidad variable corresponde al número de Rayleigh crítico, Ra_{crit} , el cual corresponde al valor de Ra que inicia la convección y separa el régimen conductivo ($\langle Nu \rangle_\tau = 1$), del convectivo ($\langle Nu \rangle_\tau > 1$). Según las simulaciones realizadas, el valor de Ra_{crit} disminuye al aumentar λ . Este resultado es concordante con el trabajo presentado por Malkovsky y Magri (2016), en el cual determinan el valor de Ra_{crit} para $0 \leq \lambda \leq 2$. En la tabla 1, se presenta una comparación de los resultados obtenidos con los presentados por Malkovsky y Magri (2016), para el caso de una falla de espesor infinitesimal.

Finalmente, se investiga el perfil de temperatura vertical que se desarrolla en la celda, obtenido a través de un promedio temporal y horizontal del campo de temperaturas. En la Figura 4, se presentan los perfiles obtenidos para distintas simulaciones, los cuales son consistentes con los resultados experimentales realizados por Letelier et al. (2016). En estos perfiles, es de especial interés la temperatura a la que llega la celda en su zona interior (\bar{T}), donde se aprecia que la temperatura varía muy poco en la dirección vertical. En el caso de viscosidad constante $\bar{T} = 0,5$, mientras que para valores de $\lambda > 0$, \bar{T} aumenta a medida que λ crece.

Tabla 1 Valores de Rayleigh crítico determinados en este trabajo, en comparación con los resultados de Malkovsky y Magri (2016) para el caso de un sistema de espesor infinitesimal. En el trabajo referenciado, la adimensionalización se realiza con respecto a la temperatura T_c^* , por lo que se realiza un escalamiento de los valores $Ra_{crit}^{T_c^*} = e^{-\frac{\lambda}{2}} \cdot Ra_{crit}$.

λ	$Ra_{crit}^{T_c^*}$ Malkovsky	$Ra_{crit}^{T_c^*}$ Este Trabajo	Ra_{crit} Este Trabajo
0	39,5	39,7	39,7
1	23,4	23,9	39,39
2	13,1	14,2	38,64
3	-	-	37,12

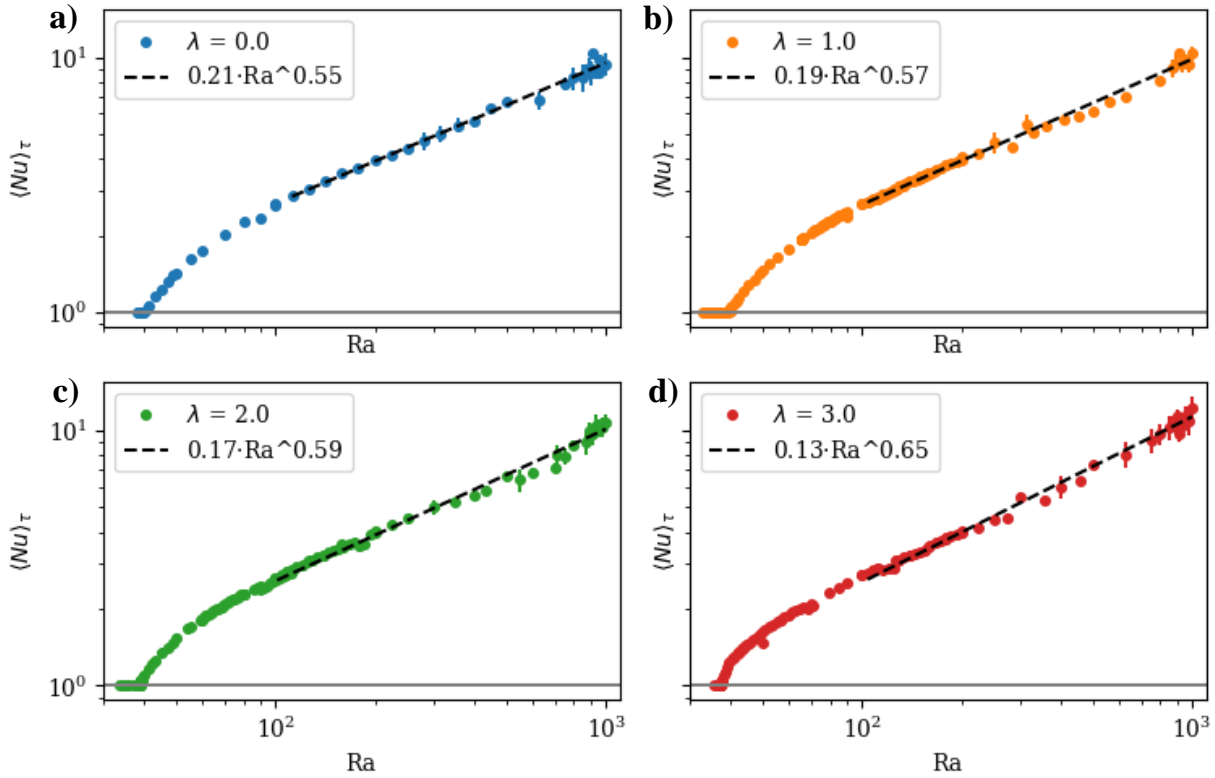


Figura 3 Curvas de escalamiento (colores) para distintos valores de λ en el rango $0 \leq Ra \leq 1000$. Las barras de error corresponden a la desviación estándar de $Nu(t)$ y su respectivo ajuste lineal $\langle Nu \rangle_\tau \sim Ra^\gamma$ (negro) entre $100 \leq Ra \leq 1000$. En a) $\lambda = 0$, b) $\lambda = 1$, c) $\lambda = 2$ y d) $\lambda = 3$. Se obtiene la relación $\gamma = 0,054 + \lambda \cdot 0,032$.

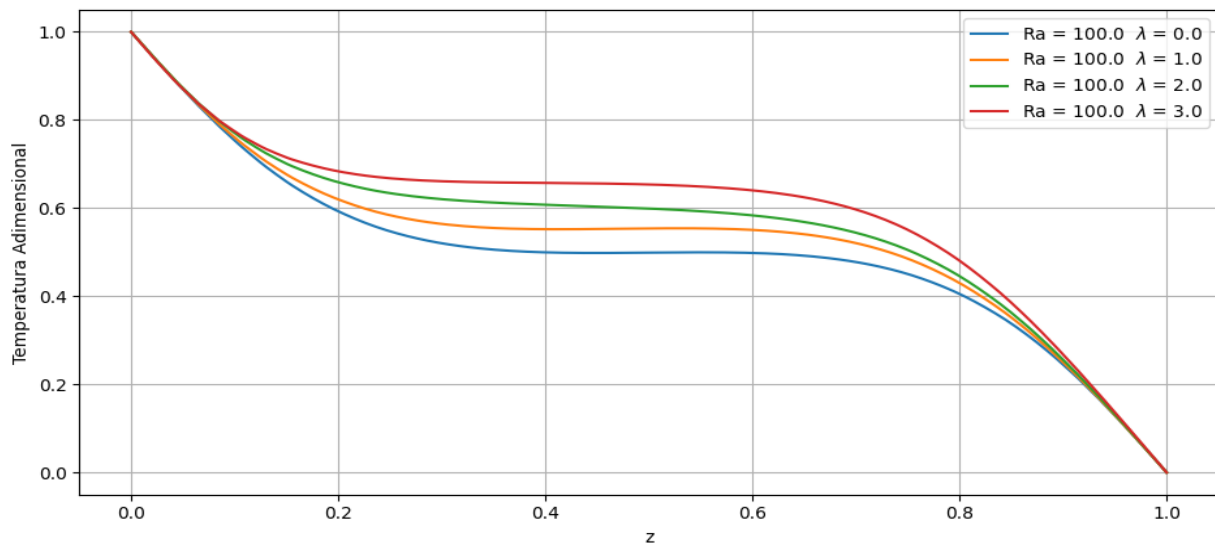


Figura 4 Perfiles de temperatura, promediados en el tiempo y la dirección horizontal, para $Ra = 100$ y distintos valores de λ . Se observa que para el caso de viscosidad constante la temperatura en la zona interna de la celda es de $\bar{T} = 0,5$. Sin embargo, para viscosidad variable $\bar{T} > 0,5$.

4. CONCLUSIONES

Los efectos que genera la viscosidad variable con respecto a la temperatura son estudiados a través de un modelo numérico de elementos finitos. El dominio del problema corresponde a una celda Hele-Shaw, donde la ley de Darcy es válida y representa tanto condiciones reproducibles en laboratorio como un modelo análogo a una falla geológica ideal, saturada y vertical. Se demuestra a través de la comparación con resultados presentes en la literatura que la metodología empleada permite obtener resultados satisfactorios, por lo que los resultados presentados se consideran válidos.

En esta investigación se demuestra que la ley de escalamiento $\langle Nu \rangle_\tau - Ra$ varía al incorporar el efecto de la variación de la viscosidad con respecto a la temperatura. A medida que λ aumenta, el transporte de calor de la celda, también lo hace. Lo anterior es medido a través del número de Nusselt. Debido a las grandes diferencias de temperatura que pueden existir en los sistemas geotermales, las variaciones de viscosidad podrían llegar a ser importantes, por lo que una modelación que no considere este efecto estaría subestimando el transporte de calor.

Con respecto al perfil de temperaturas verticales, los datos numéricos muestran que la temperatura interna que se desarrolla en las celdas depende del valor de λ . En el caso de simulaciones con viscosidad fija, la temperatura adimensional interna alcanza $\bar{T} = 0,5$, lo cual es consistente con los resultados de Hewitt et al. (2012). Por otro lado, a medida que λ aumenta, la temperatura adimensional interna de la celda toma valores mayores, que en nuestro caso varían entre 0,55 y 0,65 para $Ra = 100$ y λ entre 1 y 3, respectivamente. Este efecto también se aprecia en los campos de temperatura de la Figura 1, donde se observa una mayor distribución de temperaturas cálidas, en comparación al caso de viscosidad constante.

Estos resultados son válidos si el espesor de la celda es lo suficientemente pequeño, como para que la ley de Darcy sea válida. Lo anterior implica que la separación de placas en una celda Hele-Shaw debe ser igual o menor a 0,5 mm para una altura de placa de 10 cm. Por otra parte, como el modelo implementado es bidimensional, las curvas de escalamiento son distintas para el caso 3D.

Este trabajo representa un primer acercamiento al efecto que posee la viscosidad variable en las curvas de escalamiento $\langle Nu \rangle_\tau - Ra$ en celdas Hele-Shaw. Debido a las altas diferencias de temperatura que se desarrollan en los reservorios geotermales, la variabilidad de la viscosidad es un fenómeno que podría afectar la dinámica de estos sistemas, ya que a la escala de laboratorio demostramos que el transporte de calor mejora respecto al caso de viscosidad constante. Finalmente, se considera que este trabajo aporta a las metas 7.b del Objetivo de Desarrollo Sustentable 7, ya que la investigación realizada aborda temáticas que son un aporte al desarrollo y acceso a energía geotermal sustentable y sostenible.

REFERENCIAS

Arnold, D. N. (1982). An interior penalty finite element method with discontinuous elements. SIAM journal on numerical analysis, 19(4), 742-760.

- Babuška, Ivo. "Error-bounds for finite element method." *Numerische Mathematik* 16.4 (1971): 322-333.
- Bizon, C., Werne, J., Predtechensky, A. A., Julien, K., McCormick, W. D., Swift, J. B., & Swinney, H. L. (1997). Plume dynamics in quasi-2D turbulent convection. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 7(1), 107-124.
- Courant, R., Friedrichs, K., & Lewy, H. (1928). Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische annalen*, 100(1), 32-74.
- Di Pietro, D. A., Forte, S. L., & Parolini, N. (2006). Mass preserving finite element implementations of the level set method. *Applied Numerical Mathematics*, 56(9), 1179-1195.
- Foster, T. D. (1965). Stability of a homogeneous fluid cooled uniformly from above. *The Physics of Fluids*, 8(7), 1249-1257.
- Hansen, U., & Ebel, A. (1988). Time-dependent thermal convection—a possible explanation for a multiscale flow in the Earth's mantle. *Geophysical Journal International*, 94(2), 181-191.
- Hewitt, D. R., Neufeld, J. A., & Lister, J. R. (2014). High Rayleigh number convection in a three-dimensional porous medium. *Journal of fluid mechanics*, 748, 879-895.
- Hewitt, D. R., Neufeld, J. A., & Lister, J. R. (2012). Ultimate regime of high Rayleigh number convection in a porous medium. *Physical Review Letters*, 108(22), 224503.
- Lai, F. C., & Kulacki, F. A. (1990). The effect of variable viscosity on convective heat transfer along a vertical surface in a saturated porous medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 33(5), 1028-1031.
- Langtangen, H. P., & Logg, A. (2017). *Solving PDEs in python: the FEniCS tutorial I*. Springer Nature.
- Letelier, J. A., O'Sullivan, J., Reich, M., Veloso, E., Sánchez-Alfaro, P., Aravena, D., Muñoz M. & Morata, D. (2021). Reservoir architecture model and heat transfer modes in the El Tatio-La Torta geothermal system, Central Andes of northern Chile. *Geothermics*, 89, 101940.
- Letelier, J. A., Mujica, N., & Ortega, J. H. (2019). Perturbative corrections for the scaling of heat transport in a Hele-Shaw geometry and its application to geological vertical fractures. *Journal of Fluid Mechanics*, 864, 746-767.
- Letelier, J. A., Herrera, P., Mujica, N., & Ortega, J. H. (2016). Enhancement of synthetic schlieren image resolution using total variation optical flow: application to thermal experiments in a Hele-Shaw cell. *Experiments in Fluids*, 57(2), 18.
- Malkovsky, V. I., & Magri, F. (2016). Thermal convection of temperature-dependent viscous fluids within three-dimensional faulted geothermal systems: Estimation from linear and numerical analyses. *Water Resources Research*, 52(4), 2855-2867.
- Masud, A., & Hughes, T. J. (2002). A stabilized mixed finite element method for Darcy flow. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(39-40), 4341-4370.
- Moeck, I. S. (2014). Catalog of geothermal play types based on geologic controls. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 37, 867-882.
- Nield, D. A., & Bejan, A. (2006). *Convection in porous media (Vol. 3)*. New York: Springer. 2, 27-39
- Otero, J., Dontcheva, L. A., Johnston, H., Worthing, R. A., Kurganov, A., Petrova, G., & Doering, C. R. (2004). High-Rayleigh-number convection in a fluid-saturated porous layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 500, 263-281.
- Sheu, L. J., Tam, L. M., Chen, J. H., Chen, H. K., Lin, K. T., & Kang, Y. (2008). Chaotic convection of viscoelastic fluids in porous media. *Chaos, Solitons & Fractals*, 37(1), 113-124.
- Vynnytska, L., Rognes, M. E., & Clark, S. R. (2013). Benchmarking FEniCS for mantle convection simulations. *Computers & Geosciences*, 50, 95-105.

Yen, Y. C. (1974). Effects of density inversion on free convective heat transfer in porous layer heated from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 17(11), 1349-1356.