(Informe Interno del Laboratorio)

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA
I COLOQUIO NACIONAL
JUNIO - JULIO 1971
SANTIAGO - CHILE

DETERMINACION DEL PERFIL DE UN MENISCO CAPILAR ENTRE PLACAS VERTICALES PARALELAS, INFINITAMENTE EXTENDIDAS

por Ramón Fuentes A. (+)

I.- INTRODUCCION :

Pese a que constituye un problema importante en las aplicaciones de diversas ramas de la Ingeniería el problema de las superficies (llamadas meniscos) que la acción conjunta de la gravedad y de la capilaridad forma cerca de paredes, ha sido insuficientemente estudiado hasta una fecha relativamente reciente.

Es de notar, por ejemplo, que el perfil de una burbuja estática dentro de una tubería horizontal llena de agua no ha sido resuelto aún en absoluto desde un punto de vista teórico y que sólo se poseen al respecto medidas experimentales incompletas (1).

El problema que aquí nos ocupa, ha sido tocado por algunos investigadores, tales como BOUASSE (2) y LANDAU (3), quienes han dado sólo soluciones particulares o incompletas.

II.- ECUACIONES :

Sea (Figura No. 1) el perfil del menisco capilar que nos ocupa. El será bidimensional, obviamente, dadas las condiciones de borde.

(+) Ingeniero Jefe del Laboratorio de Hidráulica de la Universidad de Chile.

La ecuación base en este caso es la de Laplace : (4)

$$\Delta p = k \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \ldots\ldots (1)$$

en donde :

Δp = es la discontinuidad de presión causada por la tensión superficial.

k = es la constante de tensión superficial.

R_1 y R_2 = son dos radios de curvatura de la superficie del menisco, en el punto donde se mide Δp y que cumplen la condición de que los planos que los contienen son ortogonales.

Para nuestro caso, si tomamos como plano que contiene R_1, el oxy, podemos poner :

$$R_2 = \infty \quad y$$

$$R_1 = \frac{(1 + y'^2)}{y''}$$

o sea, la ecuación de Laplace se escribe como

$$\frac{\Delta p}{k} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad \ldots\ldots (2)$$

Por otra parte, Δp vale obviamente :

$$\Delta p = \gamma\, y, \quad \text{o sea} \quad \ldots\ldots (3)$$

combinando (2) y (3), obtenemos :

$$\frac{\gamma}{k}\, y = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \quad \ldots\ldots (4)$$

y si introducimos las siguientes variables adimensionales :

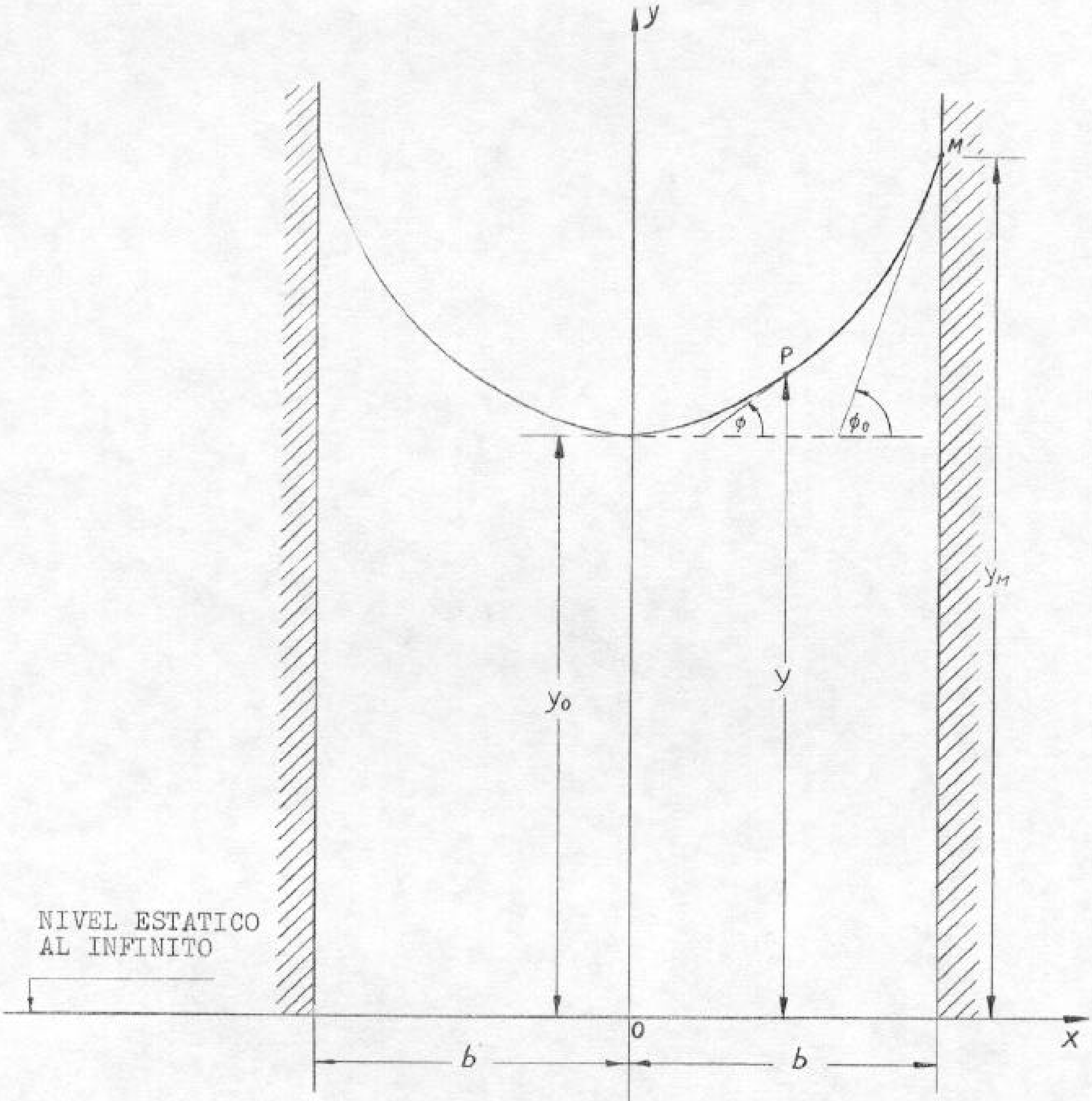

FIGURA N° 1

$$X = \frac{x}{a}$$

$$Y = \frac{y}{a}$$

en donde : $a = \sqrt{2\ k/\gamma}$, tendremos :

$$\frac{Y''}{(1+Y'^2)^{3/2}} = 2\ Y \quad \ldots\ldots (5)$$

Con las condiciones de borde :

$$X = 0\ ;\ Y = Y_o\ ;\ \frac{dY}{dX} = 0 \quad \ldots. (6)$$

III.- INTEGRACION DE LA ECUACION DEL PERFIL :

La ecuación (5) se integra a través de funciones elípticas y se obtiene, introduciendo las condiciones de borde (5) :

$$\boxed{X = \sqrt{2}\left\{\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{2}\right)\left[K\ (\sin\alpha) - F\ (\theta,\ \sin\alpha)\right] - \frac{1}{\sin\alpha}\left[E\ (\tfrac{\pi}{2},\ \sin\alpha) - E\ (\ \theta,\ \sin\alpha\ )\right]\right\} \ldots (6)}$$

en donde :

F : es la integral elíptica de primera especie.

E : es la integral elíptica de segunda especie.

K : es la integral elíptica completa de primera especie.

$$\alpha = \text{arc sin}\ \sqrt{\frac{2}{2 + Y_o^{\,2}}}$$

$$\theta = \text{arc cos}\ \sqrt{\frac{Y^2 - X_o^{\,2}}{2}}$$

La ecuación (6) resuelve en forma completa el conocimiento del perfil del menisco ; pero existe , para la aplicación , una relación adicional interesante :

IV.- RELACION ENTRE LA SEPARACION DE LAS PLACAS Y LA ALTURA CENTRAL DEL MENISCO.

Ella se obtiene haciendo en la ecuación (6) :

$$X = B = b/a$$

$$\phi = \text{arc tg } \frac{dY}{dX} = \phi_o$$

$$= \frac{\pi}{2} - \eta$$ en donde η es el ángulo de contacto del sistema pared-líquido-gas.

$$Y = Y_M$$

y si definimos : $u_M = \sqrt{2} \text{ arc sin } \phi_o / 2$

$$\theta_M = \text{arc cos } (\sin \phi_o / 2)$$

tendremos :

$$B = \sqrt{2} \left\{ \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{2}\right) \left[K(\sin \alpha) - F(\theta_M, \sin \alpha) \right] - \frac{1}{\sin \alpha} \left[E\left(\frac{\pi}{2}, \sin \alpha\right) - E(\theta_M, \sin \alpha) \right] \right\} \quad \ldots(7)$$

En el caso particular importante en que el líquido moja perfectamente la pared, tendremos :

$$\phi_o = \frac{\pi}{2}, \; \mu = 1 \; \theta_M = \frac{\pi}{4}$$, o sea :

$$B = \sqrt{2} \left\{ \left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{2} \right) \left[K(\sin\alpha) - F\left(\frac{\pi}{4}, \sin\alpha\right) \right] - \frac{1}{\sin\alpha} \left[E\left(\frac{\pi}{2}, \sin\alpha\right) - E\left(\frac{\pi}{4}, \sin\alpha\right) \right] \right\} \quad \ldots (8)$$

V.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES :

El problema del menisco capilar entre paredes infinitas puede ser resuelto en forma completa.

Sería interesante generalizar el estudio del mismo menisco entre placas finitas, para averiguar en qué punto este caso se convierte con el ya estudiado.

REFERENCIAS

1. R. Fuentes, " Contribution a l'étude de la forme et du comportement d'une bulle d'air en mouvement au-dessous d'une paroi "
   Tesis de Doctorado presentada a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Grenoble (Francia), Junio de 1969.
2. H. Bouasse, " Capillarité " (Phénoménes Superficiels) Paris, Librairie Delagrave, 1924.
3. L.D. Landau y E.M. Lifshitz, " Fluid Mechanics " Pergamon Press, 1959.
4. P.S. Laplace, " Mécanique Céleste ", supplement to X-Book. Paris, 1842. Imprimerie Royale.
5. N.K. Adam, " The Physics and Chemistry of surfaces " Third edition. Oxford University Press, 1941.