

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA
XXVII CONGRESO CHILENO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

ESTUDIO PARAMÉTRICO DEL FENÓMENO DE GOLPE DE ARIETE EN FLUJOS DE TIPO BINGHAM MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS

Felipe Galarce¹
Francisco Martínez²

RESUMEN

Se presenta un estudio numérico del fenómeno transitorio en ductos que transportan fluidos plásticos tipo Bingham, mediante el método de elementos finitos (FEM) de bajo orden. Mientras que la mayoría de los estudios del golpe de ariete consideran fluidos Newtonianos, la dinámica en fluidos con esfuerzo de cedencia sigue siendo poco abordada, a pesar de su relevancia industrial, particularmente en minería. Se realiza un análisis paramétrico sobre el efecto del esfuerzo de cedencia y el tiempo de cierre de válvula sobre las distribuciones de presión y velocidad en la tubería, usando un modelo de fricción adaptativo. Los resultados muestran que el esfuerzo de cedencia incrementa la resistencia al flujo y atenúa más rápidamente los picos de presión, revelando el rol disipador de la reología plástica. Este trabajo demuestra la necesidad de esquemas FEM avanzados para modelar ondas de choque en fluidos no-Newtonianos, con implicancias en el diseño y operación de ductos industriales.

¹Profesor Asistente, Escuela de Ingeniería Civil,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso – felipe.galarce@pucv.cl

²Profesor Asistente, Escuela de Ingeniería Civil,
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso – francisco.martinez@pucv.cl

1. INTRODUCCIÓN

El fenómeno de golpe de ariete constituye un evento transitorio común y crítico en sistemas de transporte hidráulico presurizado. Su origen suele estar asociado a maniobras súbitas dentro del sistema, como el cierre o apertura rápida de válvulas, fallas eléctricas en bombas o turbinas, o incluso rupturas de las tuberías [Jiang et al., 2024, Zhang et al., 2023, Wylie, 1978]. Estos eventos generan ondas de sobrepresión que se propagan a alta velocidad a lo largo de la tubería, en escalas temporales tan breves que limitan la respuesta estructural del ducto. Como consecuencia, pueden generarse presiones extremas que amenazan la integridad del sistema [Chaudhry, 2014].

El modelado hidráulico del golpe de ariete ha sido ampliamente estudiado para el caso de fluidos Newtonianos, en particular para el transporte de agua [Ghidaoui, 2004, Ghidaoui et al., 2005]. No obstante, en fluidos complejos como los no-Newtonianos, la literatura disponible es escasa [Kodura et al., 2018, Kodura et al., 2019, Kodura et al., 2022, Rocha et al., 2008, Ihle, 2014]. Este tipo de fluidos se encuentra con frecuencia en la industria minera, donde se transportan relaves o concentrados minerales en forma de suspensiones sólidas-líquidas de alta concentración, que exhiben un comportamiento reológico complejo [Boger, 2013, Abdul-Wahab and Marikar, 2012, Younger, 2004, Cacciuttolo and Cano, 2022].

Estudios recientes han abordado efectos particulares como el adelgazamiento por cizalladura o la tixotropía sobre la propagación de ondas de choque [Wahba, 2013], sin considerar aún de forma global la influencia de parámetros físicos y mecánicos sobre la dinámica transitoria de estos flujos. En este contexto, resulta de especial interés el modelo plástico de Bingham, aplicable para concentraciones volumétricas cercanas al 30 % [Baha Abulnaga, 2021], situación típica en el transporte de relaves. Al aumentar la concentración, el flujo puede entrar en un régimen hiperconcentrado gobernado por leyes reológicas no lineales [O'Brien and Julien, 1985, O'Brien and Julien, 1988, Julien and Lan, 1991].

Además, estos relaves mineros presentan viscosidades hasta 100 veces mayores que el agua, junto a un esfuerzo de cedencia que condiciona la movilidad inicial del fluido [Baha Abulnaga, 2021, Wasp et al., 1977]. Cuando la presión o inercia del flujo no logra superar dicho esfuerzo, no ocurre movimiento alguno. Este hecho permite anticipar dinámicas transitorias muy distintas a las del golpe de ariete clásico, afectando la magnitud, velocidad y atenuación de la onda de presión [Mitishita et al., 2018].

El estado del arte incluye enfoques numéricos de distinta complejidad, desde modelos unidimensionales hasta herramientas de dinámica computacional de fluidos (CFD) con mallados adaptativos y acoplamiento fluido-estructura [Pham and Choi, 2021, Darbhamulla and Jaiman, 2024, Wang et al., 2017, Oliveira et al., 2015]. En paralelo, surgen aproximaciones híbridas que combinan modelos CFD en regiones locales con descripciones globales 1D. Incluso se ha comenzado a explorar el uso de inteligencia artificial para predecir eventos transitorios y sugerir estrategias de mitigación [Tawfik, 2023, Brunton and Kutz, 2019].

Entre las herramientas tradicionales, los modelos unidimensionales basados en el método de las características (MOC) [Wylie, 1978, Oliveira et al., 2015] han sido ampliamente utilizados para el análisis de sobrepresiones en redes hidráulicas. Sin embargo, al incorporar efectos reológicos complejos, estos modelos requieren hipótesis simplificadoras que limitan su aplicabilidad. Frente a ello, este trabajo propone una formulación numérica mediante el método de elementos finitos (FEM), que permite abordar el problema de forma más general, flexible y extensible a regímenes no lineales.

2. MODELO MATEMÁTICO

2.1. Ecuaciones gobernantes

Las ecuaciones que describen el fenómeno de golpe de ariete en fluidos no-Newtonianos, como los de tipo Bingham, pueden escribirse a partir de un modelo unidimensional de conservación de masa y cantidad de movimiento [Chaudhry, 2014, Oliveira et al., 2015]. En este trabajo se considera una tubería horizontal de diámetro constante, con paredes elásticas, alimentada por un estanque superior, y con una válvula de control en el extremo de salida.

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_m c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \rho_m \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + S(u) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $u(x, t)$ es la velocidad media del flujo, $p(x, t)$ es la presión, ρ_m es la densidad de la mezcla, y c es la celeridad de la onda de presión. El término $S(u)$ representa la fricción del flujo con las paredes, dependiente de la reología del fluido.

2.2. Modelo de fricción para fluidos Bingham

El término de fricción se modela mediante la fórmula:

$$S(u) = \frac{2f(\text{Re}, \text{He})\rho_m|u|u}{D}, \quad (2.2)$$

donde D es el diámetro de la tubería, y $f(\text{Re}, \text{He})$ es el coeficiente de fricción de Fanning, que depende del número de Reynolds (Re) y del número de Hedstrom (He). La relación entre estos parámetros para un fluido Bingham se puede expresar como [Swamee and Aggarwal, 2011, Darby and Melson, 1981, Darby et al., 1992]:

$$f(\text{Re}, \text{He})\text{Re} = \begin{cases} 16 + \frac{10,67 + 0,1414 \left(\frac{\text{He}}{\text{Re}}\right)^{1,143}}{1 + 0,0149 \left(\frac{\text{He}}{\text{Re}}\right)^{1,16}} \left(\frac{\text{He}}{4\text{Re}}\right), & \text{Re} < \text{Re}_c, \\ \text{Re} \left(\frac{10^a}{4\text{Re}^{0,193}}\right), & \text{Re} \geq \text{Re}_c, \end{cases} \quad (2.3)$$

con $a = -1,47(1 + 0,146 \exp(-2,9 \cdot 10^{-5}\text{He}))$, siendo este un ajuste empírico ampliamente utilizado en la literatura técnica [Baha Abulnaga, 2021].

2.3. Números adimensionales

Los números de Reynolds y Hedstrom para estos flujos se definen como:

$$\text{Re} = \frac{\rho D u}{\eta}, \quad \text{He} = \frac{\rho_m D^2 \tau_y}{\eta^2}, \quad (2.4)$$

donde η es la viscosidad plástica del fluido, y τ_y es el esfuerzo de cedencia. Ambos parámetros gobiernan la transición entre régimen laminar y turbulento, así como el carácter plástico del flujo.

2.4. Modelo para la velocidad de propagación de la onda

La celeridad c de la onda de presión se estima a partir de una adaptación de la ley de Korteweg, considerando la mezcla sólido-líquido como un fluido homogéneo con módulo de compresibilidad efectivo:

$$c = \sqrt{\frac{\frac{K_m}{\rho_m}}{1 + \frac{K_m D}{E e}}}, \quad (2.5)$$

donde K_m es el módulo volumétrico de la mezcla, E es el módulo de elasticidad de la pared, y e es el espesor de la tubería [Kodura et al., 2022].

2.5. Condiciones iniciales y de borde

Las condiciones iniciales corresponden a un flujo estacionario con presión decreciente linealmente a lo largo del ducto:

$$p(x, 0) = P_o \left(1 - \frac{x}{L}\right),$$
$$u(x, 0) = \frac{16}{f(\widetilde{\text{Re}}, \text{He})\widetilde{\text{Re}}} U_o,$$

donde $P_o = \rho_m g H$ es la presión en el estanque, y U_o es la velocidad media inicial definida mediante la ley de Hagen–Poiseuille:

$$U_o = \frac{P_o D^2}{32 L \eta}. \quad (2.6)$$

En el extremo de entrada ($x = 0$) se impone la presión del estanque, mientras que en la salida ($x = L$) se modela el cierre de válvula mediante una condición de Dirichlet sobre $u(t)$.

3. METODOLOGÍA NUMÉRICA

Para resolver las ecuaciones gobernantes del fenómeno de golpe de ariete en flujos tipo Bingham, se propone una formulación variacional basada en el método de elementos finitos (FEM), utilizando funciones de base lineales continuas (\mathbb{P}_1) y un esquema de diferencias finitas implícito en el tiempo.

3.1. Formulación variacional

Sea $\Omega = [0, L]$ el dominio unidimensional que representa la tubería. Se buscan las funciones presión $p(x, t)$ y velocidad $u(x, t)$ como elementos del espacio producto $\mathcal{H} = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, donde:

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

A partir de las ecuaciones (2.1), se construye una formulación débil utilizando funciones de prueba $w \in H^1(\Omega)$ y $q \in L^2(\Omega)$. Luego, se discretiza en el tiempo mediante un esquema implícito de Euler hacia atrás con paso Δt . Para cada paso de tiempo $n + 1$, se busca (u^{n+1}, p^{n+1}) tal que:

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} p^{n+1} q \, dx + \lambda_2 \int_{\Omega} \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} q \, dx = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} p^n q \, dx, \quad (3.1)$$

$$\frac{\lambda_2}{\Delta t} \int_{\Omega} u^{n+1} w \, dx + \lambda_1 \int_{\Omega} u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} w \, dx + \int_{\Omega} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} w \, dx + \frac{f \text{Re}}{16} \int_{\Omega} u^{n+1} w \, dx = \frac{\lambda_2}{\Delta t} \int_{\Omega} u^n w \, dx. \quad (3.2)$$

Donde λ_1 y λ_2 son parámetros adimensionales definidos como:

$$\lambda_1 = \frac{\delta}{32} \widetilde{\text{Re}}, \quad \lambda_2 = \frac{\delta}{32} \widetilde{\text{Re}} \cdot \widetilde{\text{Ma}}^{-1}, \quad (3.3)$$

con $\delta = D/L$ y $\widetilde{\text{Ma}} = U_0/c$.

3.2. Discretización espacial y sistema lineal

Se discretiza el dominio Ω con una malla uniforme de N nodos y se aproxima u y p mediante funciones de base lineales:

$$u^{n+1}(x) = \sum_{i=1}^N u_i^{n+1} \phi_i(x), \quad p^{n+1}(x) = \sum_{i=1}^N p_i^{n+1} \phi_i(x), \quad (3.4)$$

donde $\phi_i(x)$ son las funciones de base del espacio \mathbb{P}_1 . La formulación anterior da lugar al siguiente sistema matricial monolítico de tamaño $2N \times 2N$:

$$\begin{bmatrix} (1 + \Delta t \cdot \frac{fRe}{16})M + \lambda_1 \Delta t \cdot C(u^n) & \Delta t \cdot B \\ \lambda_2 \Delta t \cdot B & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 M u^n \\ M p^n \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

donde:

- M es la matriz de masa con entradas $M_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx$,
- B es la matriz de derivadas cruzadas con $B_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \frac{d\phi_j}{dx} dx$,
- $C(u^n)$ es la matriz de convección no lineal con $C_{ij} = \int_{\Omega} u^n \frac{d\phi_i}{dx} \phi_j dx$.

Los términos no lineales se resuelven mediante un método iterativo de Picard, con tolerancia 10^{-3} en norma ℓ^2 para las variables acopladas.

3.3. Implementación computacional

La implementación se realiza con el software in-house MAD [Galarce Marin, 2021], construido sobre la biblioteca PETSc [Balay et al., 2015] y diseñado para resolver ecuaciones diferenciales parciales mediante elementos finitos y esquemas de asimilación de datos. Se utiliza el solucionador directo paralelo MUMPS [Amestoy et al., 2000] para resolver el sistema lineal en cada paso de tiempo. La cuadratura de los términos integrales se realiza mediante una regla de Gauss con tres puntos por elemento.

Se emplea una arquitectura multi-core con procesador AMD Epyc de 48 núcleos físicos para acelerar la simulación. La estabilidad del esquema está garantizada gracias a la presencia del término de almacenamiento $(1/\Delta t)M$ en la ecuación de continuidad, evitando singularidades en el sistema acoplado. No se requieren técnicas adicionales de estabilización debido al régimen esencialmente difusivo del problema, aunque podrían ser incorporadas en futuros desarrollos para abordar regímenes dominados por la convección.

4. RESULTADOS

Esta sección presenta los resultados obtenidos mediante la simulación del modelo unidimensional con elementos finitos. Se muestra un estudio de convergencia, una simulación representativa para mezcla cobre-agua, y un análisis paramétrico respecto al número de Hedstrom y al tiempo de cierre de la válvula.

4.1. Simulación cobre-agua

En la Figura 1 se presenta la evolución temporal del campo de velocidades y presiones para una mezcla cobre-agua. Se observa la propagación de la sobrepresión inicial y el posterior reflejo en forma de depresión.

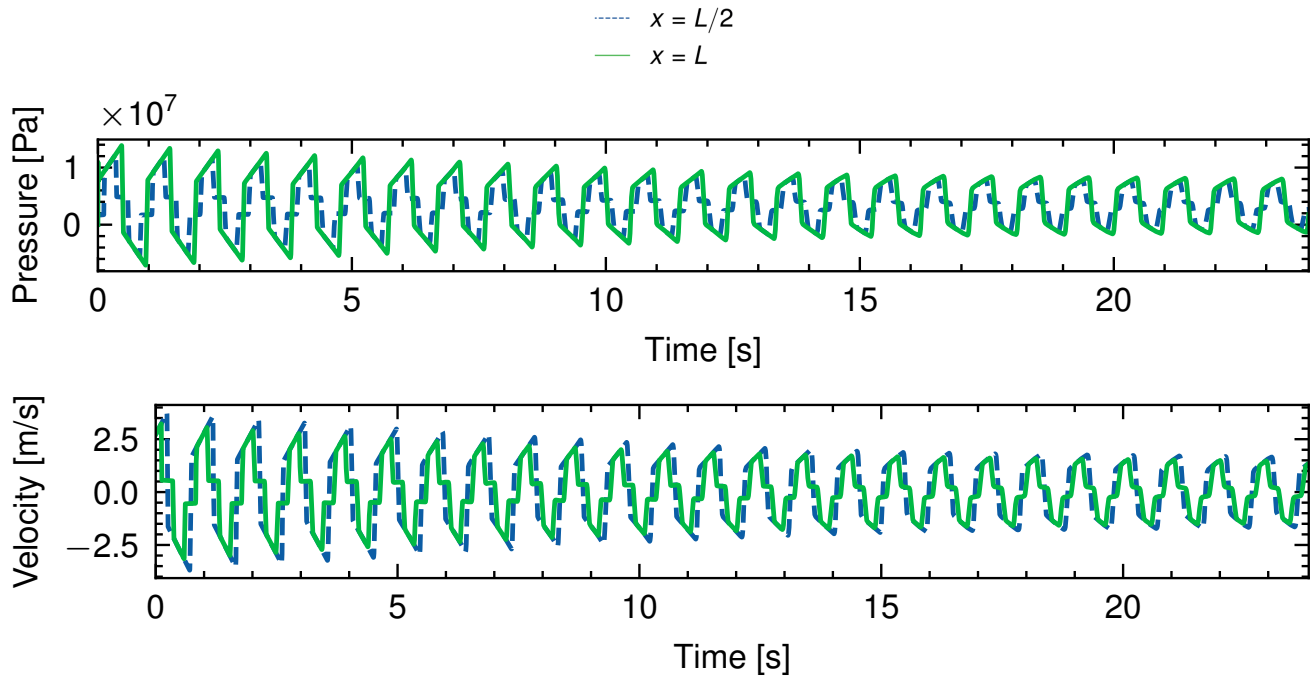


Figura 1: Instantáneas del campo de presión y velocidad para mezcla cobre-agua.

Se alcanza una presión máxima de 13.86 MPa, dentro del límite de operación del sistema, y en concordancia con la teoría de Joukowski.

4.2. Influencia del esfuerzo de cedencia

La Figura 2 muestra la evolución de la presión en la válvula para distintos números de Hedstrom. Se observa una atenuación del sobrepico a medida que He aumenta.

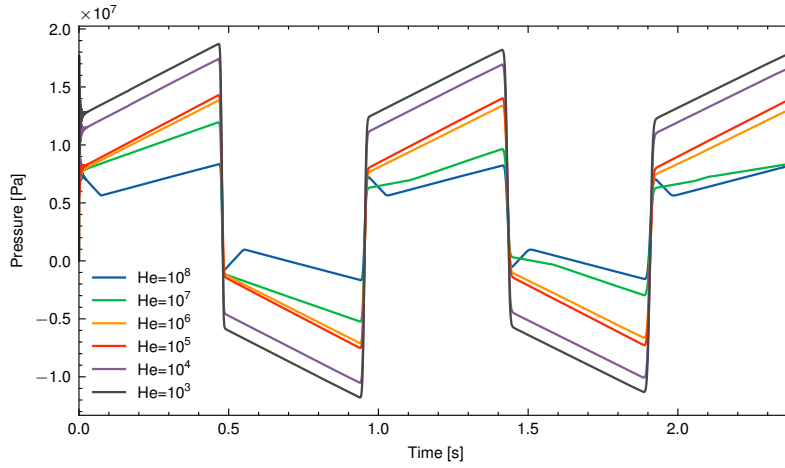


Figura 2: Presión en la válvula para distintos números de Hedstrom.

En la Figura 3 se grafica la presión máxima como función de He, mostrando una tendencia decreciente.

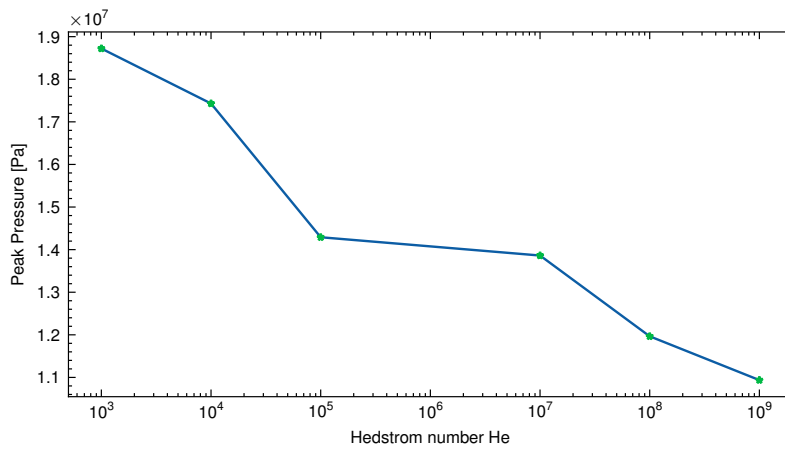


Figura 3: Presión máxima alcanzada en función de He.

4.3. Efecto del tiempo de cierre de válvula

La Figura 4 muestra la presión en la válvula para distintos tiempos de cierre adimensionales T_c^* . Cierres más lentos generan ondas de menor magnitud.

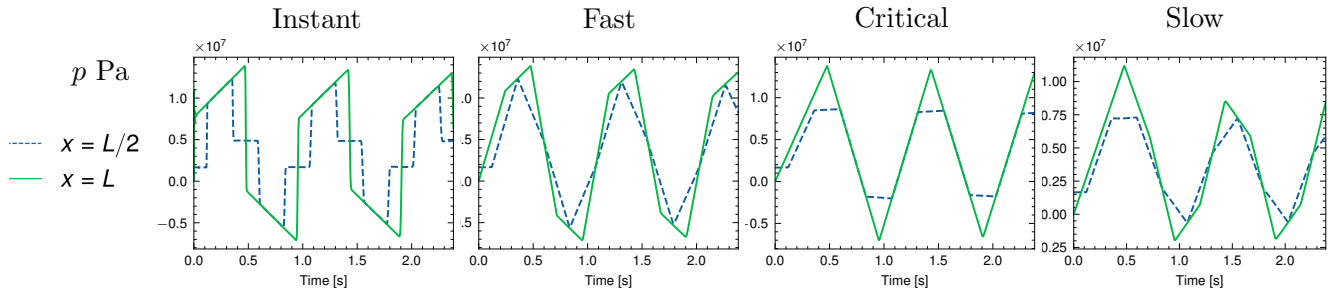


Figura 4: Presión en la válvula para distintos tiempos de cierre.

La Figura 5 presenta un análisis paramétrico del sobrepico de presión como función de He y T_c^* .

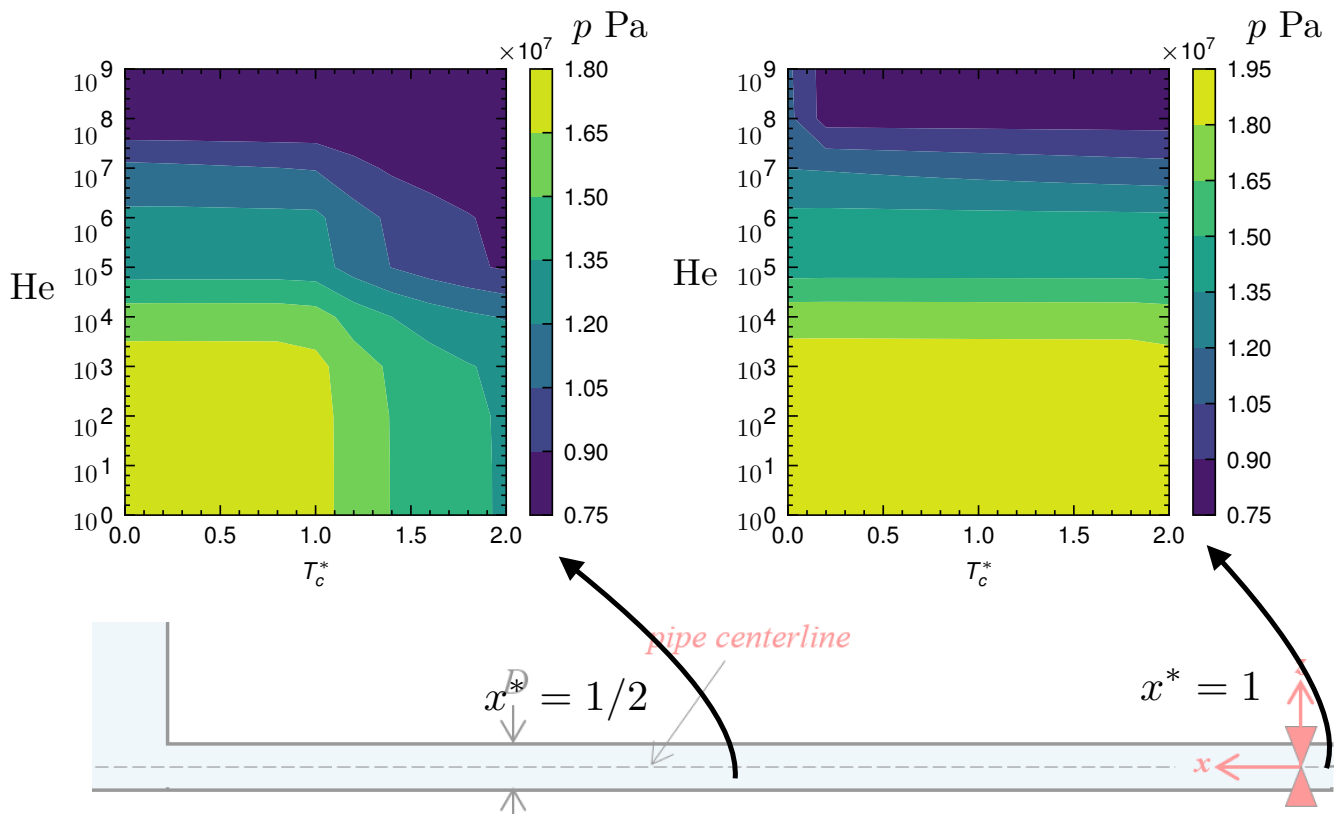


Figura 5: Presión máxima según número de Hedstrom y tiempo de cierre. Como es esperable, se observa que para $x^* = 1$, la presión máxima no alcanza a ser atenuada a propósito de la reología del fluido. Sin embargo, basta permitir el flujo hasta $x^* = 0,5$, para notar la disipación viscosa y, por lo tanto, la atenuación de la onda de choque.

5. CONCLUSIONES

Este trabajo presentó una formulación de elementos finitos para la simulación del fenómeno de golpe de ariete en fluidos viscoplásticos tipo Bingham, considerando el cierre de válvulas en un conducto

unidimensional. El modelo incorpora la no linealidad reológica mediante una regularización continua, permitiendo una implementación eficiente y estable.

El análisis numérico demostró la convergencia del esquema propuesto en espacio y tiempo. La simulación de una mezcla cobre-agua reveló que la reología viscoplástica atenúa de forma significativa los sobrepicos de presión típicos del golpe de ariete, lo que podría traducirse en menores exigencias estructurales para los ductos.

El estudio paramétrico mostró que tanto el esfuerzo de cedencia (caracterizado por el número de Hedstrom) como el tiempo de cierre de la válvula influyen de manera decisiva en la presión máxima alcanzada. En particular, cierres más lentos y altos valores de He reducen los efectos transitorios, sugiriendo estrategias operativas para mitigar riesgos hidráulicos en sistemas con suspensiones concentradas.

Estos resultados abren la puerta a futuras investigaciones en contextos tridimensionales y con geometrías más complejas, así como a la incorporación de mecanismos de control automático basados en los parámetros reológicos del fluido transportado.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece el financiamiento de ANID Fondecyt Regular 1250287 y DI VINCI Iniciación PUCV 039.731/2025. También se reconoce la colaboración del proyecto Horizon Europe - 2nd Opportunity OPPTY-MSCA/0125.

Referencias

- [Abdul-Wahab and Marikar, 2012] Abdul-Wahab, S. and Marikar, F. (2012). The environmental impact of gold mines: pollution by heavy metals. *Open Engineering*, 2(2):304–313.
- [Amestoy et al., 2000] Amestoy, P., Duff, I., and L'Excellent, J.-Y. (2000). Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 184(2):501–520.
- [Baha Abulnaga, 2021] Baha Abulnaga, P. (2021). Slurry systems handbook.
- [Balay et al., 2015] Balay, S., Abhyankar, S., M.D., A., Brown, J., Brune, P., Buschelman, K., Dalcin, L., Eijkhout, V., Gropp, W., Kaushik, D., Knepley, M., McInnes, L., Rupp, K., Smith, B., Zampini, S., and Zhang, H. (2015). PETSc Web page.
- [Boger, 2013] Boger, D. (2013). Rheology of slurries and environmental impacts in the mining industry. *Annual Review of Chemical and Biomolecular engineering*, 4:239–257.
- [Brunton and Kutz, 2019] Brunton, S. and Kutz, J. (2019). Data-driven science and engineering: Machine learning, dynamical systems, and control.

- [Cacciuttolo and Cano, 2022] Cacciuttolo, C. and Cano, D. (2022). Environmental impact assessment of mine tailings spill considering metallurgical processes of gold and copper mining: case studies in the Andean countries of Chile and Peru. *Water*, 14(19):3057.
- [Chaudhry, 2014] Chaudhry, M. (2014). Applied hydraulic transients.
- [Darbhamulla and Jaiman, 2024] Darbhamulla, N. B. and Jaiman, R. K. (2024). A finite element framework for fluid–structure interaction of turbulent cavitating flows with flexible structures. *Computers & Fluids*, 277:106283.
- [Darby and Melson, 1981] Darby, R. and Melson, J. (1981). How to predict the friction factor for flow of bingham plastics. *Chemical Engineering*.
- [Darby et al., 1992] Darby, R., Mun, R., and Boger, D. (1992). Predict friction loss in slurry pipes. *Chemical engineering*, 99(9):116–119.
- [Galarce Marin, 2021] Galarce Marin, F. (2021). *Inverse problems in hemodynamics. Fast estimation of blood flows from medical data*. <https://gitlab.com/felipe.galarce.m/mad/>. PhD thesis, INRIA Paris & Laboratoire Jacques-Louis Lions. Sorbonne Université.
- [Ghidaoui, 2004] Ghidaoui, M. (2004). On the fundamental equations of water hammer. *Urban Water Journal*, 1(2):71–83.
- [Ghidaoui et al., 2005] Ghidaoui, M. S., Zhao, M., McInnis, D. A., and Axworthy, D. H. (2005). A review of water hammer theory and practice. *Appl. Mech. Rev.*, 58(1):49–76.
- [Ihle, 2014] Ihle, C. (2014). Should maximum pressures in ore pipelines be computed out of system startups or power outages? *Minerals Engineering*, 55:57–59.
- [Jiang et al., 2024] Jiang, D., Zeng, C., Lu, Q., and Guo, Q. (2024). Water hammer in pipelines based on different friction models. *Scientific Reports*, 14(1):953.
- [Julien and Lan, 1991] Julien, P. Y. and Lan, Y. (1991). Rheology of hyperconcentrations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 117(3):346–353.
- [Kodura et al., 2018] Kodura, A., Kubrak, M., Stefanek, P., and Weinerowska-Bords, K. (2018). An experimental investigation of pressure wave celerity during the transient slurry flow. In *Free Surface Flows and Transport Processes: 36th International School of Hydraulics*, pages 259–269. Springer.
- [Kodura et al., 2019] Kodura, A., Weinerowska-Bords, K., Artichowicz, W., Kubrak, M., and Stefanek, P. (2019). In situ verification of numerical model of water hammer in slurries. *Journal of Fluids Engineering*, 141(8):081115.
- [Kodura et al., 2022] Kodura, A., Weinerowska-Bords, K., and Kubrak, M. (2022). Simplified numerical model for transient flow of slurries at low concentration. *Energies*, 15(19):7175.
- [Mitishita et al., 2018] Mitishita, R. S., Oliveira, G. M., Santos, T. G., and Negrão, C. O. (2018). Pressure transmission in yield stress fluids-an experimental analysis. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 261:50–59.
- [O’Brien and Julien, 1988] O’Brien, J. S. and Julien, P. Y. (1988). Laboratory analysis of mudflow properties. *Journal of hydraulic engineering*, 114(8):877–887.

- [Oliveira et al., 2015] Oliveira, G. M., Franco, A. T., and Negrão, C. O. R. (2015). Mathematical Model for Viscoplastic Fluid Hammer. *Journal of Fluids Engineering*, 138(1):011301.
- [O'Brien and Julien, 1985] O'Brien, J. and Julien, P. (1985). Physical properties and mechanics of hyperconcentrated sediment flows. *Proc. ASCE HD Delineation of landslides, flash flood and debris flow Hazards*.
- [Pham and Choi, 2021] Pham, T. and Choi, S. (2021). Numerical analysis of direct contact condensation-induced water hammering effect using openfoam in realistic steam pipes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 171:121099.
- [Rocha et al., 2008] Rocha, L., Oliveira, G., Negrão, C. O., Franco, A., and Martins, A. (2008). Modelling the start-up flow of well drilling fluids. *Proceedings of ENCIT*.
- [Swamee and Aggarwal, 2011] Swamee, P. K. and Aggarwal, N. (2011). Explicit equations for laminar flow of bingham plastic fluids. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 76(3):178–184.
- [Tawfik, 2023] Tawfik, A. (2023). Air vessel sizing approach for pipeline protection using artificial neural networks. *Journal of Engineering and Applied Science*, 70(1):34.
- [Wahba, 2013] Wahba, E. (2013). Non-newtonian fluid hammer in elastic circular pipes: Shear-thinning and shear-thickening effects. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 198:24–30.
- [Wang et al., 2017] Wang, C., Nilsson, H., Yang, J., and Petit, O. (2017). 1d–3d coupling for hydraulic system transient simulations. *Computer Physics Communications*, 210:1–9.
- [Wasp et al., 1977] Wasp, E. J., Kenny, J. P., and Gandhi, R. L. (1977). Solid-liquid flow: Slurry pipeline transportation [pumps, valves, mechanical equipment, economics]. *Ser. Bulk Mater. Handl.:(United States)*, 1(4).
- [Wylie, 1978] Wylie, E.B. and Streeter, V. L. (1978). Fluid transients.
- [Younger, 2004] Younger, P. (2004). Environmental impacts of coal mining and associated wastes: a geochemical perspective. *Geological Society, London, Special Publications*, 236(1):169–209.
- [Zhang et al., 2023] Zhang, Q., Tian, Z., Lu, S., and Kang, H. (2023). Numerical simulation of water hammer in pipeline system using efficient wave tracking method. *Water Resources Management*, 37(8):3053–3068.