

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA
XXVII CONGRESO CHILENO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

BIESTABILIDAD DE UN FLUJO HIDRÁULICO SOBRE SUPERFICIES CÓNCAVAS

VICENTE ORTIZ P.¹
TOMÁS TREWHELA P.²

RESUMEN

En este trabajo, estudiamos teórica y experimentalmente el flujo hidráulico que se produce por la caída de un jet sobre una superficie curva cóncava. Una versión adhoc de las ecuaciones de Saint-Venant se desarrollaron para obtener una ecuación para los ejes hidráulicos que se producen sobre el tipo de curvas analizadas. Los distintos ejes hidráulicos para los diversos regímenes de flujo se contrastaron con datos experimentales obtenidos en una instalación experimental. Para una matriz experimental exhaustiva, se evaluaron las condiciones de estabilidad que garantizan la estabilidad del flujo para regímenes sub y supercrítico, además de evaluar condiciones inestables en las que es posible transitar desde un flujo supercrítico a uno subcrítico, mostrando la biestabilidad del flujo para un rango de condiciones. Nuestros resultados experimentales sugieren, de forma intuitiva, que la estabilidad del flujo depende de la fricción y el número de Froude. Si bien la teoría captura bien los ejes hidráulicos supercríticos—de características cuasi-uniformes—la ocurrencia de resaltos en el recorrido curvo imposibilita que la ecuación diferencial del eje hidráulico de orden $\mathcal{O}(1)$ reproduzca la condición de flujo completa para flujo subcrítico. No obstante, este estudio preliminar entrega condiciones de arco que pueden escalarse para proporcionar condiciones de operación para evacuadores de crecidas, o brindar nociones sobre la dinámica de rápidos y piscinas en ríos de montaña.

1. INTRODUCCIÓN

La dinámica de cauces naturales en alta montaña se encuentra caracterizada por secuencias alternantes de rápidos y piscinas (Richards, 1976; Carling & Orr, 2000). Aparte de jugar un rol ambiental fundamental para el ecosistema, estas secuencias tienen una particularidad; el flujo sobre estas estructuras admite condiciones hidráulicas biestables. Esto significa, que para un mismo caudal, es

¹Estudiante Ing. Civil, Facultad de Ingeniería y Ciencias, Universidad Adolfo Ibañez - vicenortiz@alumnos.uai.cl

²Profesor Asistente, Facultad de Ingeniería y Ciencias, Universidad Adolfo Ibañez - tomas.trehela@uai.cl

posible observar de manera alternativa un flujo sub o supercrítico sobre el fondo cóncavo de las piscinas. No obstante, para ciertos caudales, la observación de un flujo supercrítico es condicionalmente estable. Lo anterior se constata cuando el régimen torrencial es perturbado ligeramente, y a través de un resalto, se logra formar un flujo transiente hacia un régimen subcrítico.

Si bien este tipo de fenómenos es raro en escenarios naturales, es posible hipotetizar sobre su ocurrencia en formaciones geológicas emblemáticas en Chile. Tras el terremoto del Maule en 2010, se observó con sorpresa que las piscinas del Radal Siete Tazas se vaciaron y permanecieron así varios meses (Arenas & Mourgues, 2012). Por supuesto, no hay evidencia concluyente de la razón del vaciamiento, pero si hubo que esperar precipitaciones y cambios de caudal para su llenado, por lo que este tipo de biestabilidad condicional podría ser una explicación de la permanencia de las pozas con alturas de escurrimiento bajas, que hoy ya tienen nuevamente su condición de llenado estable. Otra secuencia de rápidos y piscinas emblemática en Chile se encuentra en los toboganes de granito de Cochamó, donde es posible observar, de forma anecdótica, rápidos en época estival y, en invierno, piscinas llenas (comunicación personal con geóloga Camila Vera).

En paralelo a su importancia ecológica, este fenómeno de biestabilidad sobre superficies curvas resulta esencial para el diseño y operación de infraestructuras hidráulicas. Su aplicación en rápidos de descarga tipo salto de esquí—famosamente empleados en centrales hidroeléctricas como el Embalse Rapel—puede dar condiciones de operación estables que aseguren su correcto funcionamiento y disminuyan el riesgo de socavación a pie de obra. Sin embargo, este tipo de fenómeno está muy poco abordado o descrito en la literatura. El diseño de estos vertederos está muy orientado al flujo aguas abajo del salto (Heller *et al.*, 2005; Pfister *et al.*, 2014; Fiorotto *et al.*, 2016; Karami Moghadam *et al.*, 2019) y no hay mucha descripción de los ejes hidráulicos posibles sobre la curva previa al salto.

En contraste, el estudio del impacto de un flujo hidráulico o un jet sobre superficies si ha contado con gran interés y desarrollo reciente (e.g. Teymourtash & Mokhlesi, 2015; Bhagat *et al.*, 2018; Zhou & Prosperetti, 2022). Esto se debe al resalto hidráulico circular (Watson, 1964; Craik *et al.*, 1981) que se forma, así como la aparición de patrones y otras estructuras que pueden ser analizadas usando aproximaciones de onda larga Bush *et al.* (2006); Kate *et al.* (2007) y promedios verticales del flujo para condiciones de flujo que pueden llegar a ser capilares o laminares (Bhagat & Linden, 2020; Baayoun *et al.*, 2022). Aunque nuevamente no hay en la literatura un análisis de este tipo de jets impactando una superficie cóncava, que podría ser de utilidad para el análisis de estas secuencias rápido-piscina. Pero, si podrían utilizarse las ecuaciones de Saint-Venant para al menos determinar ejes hidráulicos y porqué no estudiar la estabilidad del flujo usando transientes viscosos en sistemas dinámicos, notablemente usados para ondas rodantes y flujos granulares (Needham & Merkin, 1984; Bush *et al.*, 2006; Gray & Edwards, 2014; Viroulet *et al.*, 2017; Razis *et al.*, 2021).

Este artículo se desarrollará como sigue. La sección §2 presenta el problema, describiendo la instalación y métodos experimentales, para continuar en 3 con las ecuaciones que rigen el fenómeno. En resultados se comparan experimentos y teoría, además de presentar el diagrama de fase que da cuenta de la biestabilidad del problema analizado. Finalmente concluimos sobre nuestros resultados preliminares, sus implicancias y cerramos con una perspectiva del análisis que resta realizar para comprender y describir mejor la biestabilidad observada.

2. METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

2.1. Instalación experimental y adquisición de datos

La instalación experimental de este estudio consiste en un estanque del cual una bomba sumergible $Q_{\text{máx}} = 800$ l/h impulsa agua a través de una tubería de diámetro $d = 1,25$ cm hacia un jet que impacta tangencialmente el borde de una superficie cóncava con radio de curvatura $R = 3$ cm, profundidad $W = 3$ cm y arco de recorrido $R\theta_c$ variable (Figura 1). El sistema de recirculación pasa por una válvula mariposa que controla el caudal pasante y un microcontrolador Arduino que controla la medición de caudal realizada por un flujómetro YF-S201. La sección de la superficie cóncava está compuesta por un montaje ensamblable que permite cambiar la superficie para distintos ángulos θ_c .

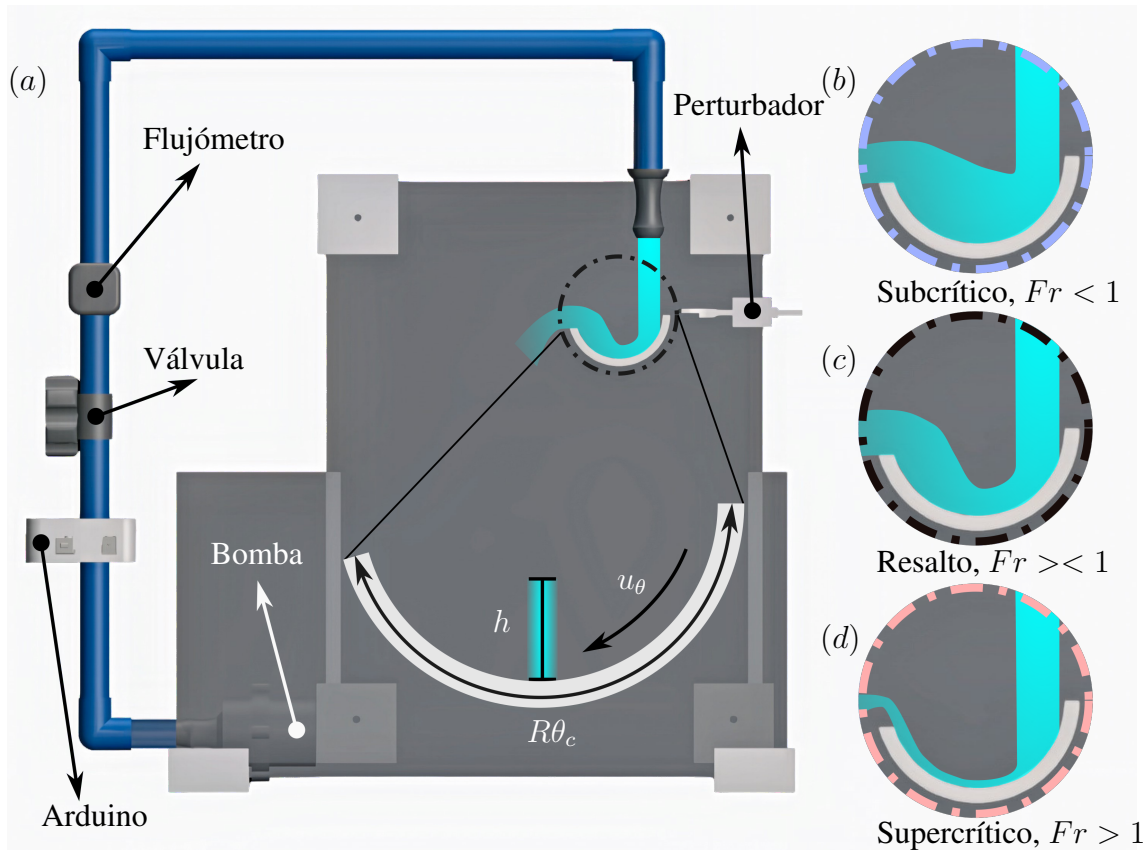


Figura 1. Instalación experimental y regímenes estables sobre una superficie cóncava de curvatura R . (a) Una bomba recircula agua desde el estanque hacia el jet descendente que impacta la curva de recorrido $R\theta_c$. Una válvula controla el caudal Q del sistema que se mide con un flujómetro YF-S201 conectado a un Arduino. Para cada condición experimental de Q y θ_c , el jet de agua puede generar sobre la superficie curva una condición de flujo (b) subcrítica $Fr < 1$ que llena la concavidad; (c) con resalto hidráulico al pie de la curva; y (d) supercrítica $Fr > 1$. La biestabilidad entre los distintos regímenes de flujo puede darse para combinaciones específicas de θ_c y Q al perturbar el jet con el perturbador de flujo.



Figura 2. Imágenes experimentales de la transición desde una condición estable supercrítica a una condición subcrítica mediante una perturbación externa, para tres curvas y caudales distintos: a) $\theta_c \approx 132,83^\circ$ y $Q \approx 0,041$ l/s, b) $\theta_c \approx 135,57^\circ$ y $Q \approx 0,051$ l/s, c) $\theta_c \approx 150,00^\circ$ y $Q \approx 0,083$ l/s.

Con el objetivo de garantizar la precisión en las mediciones de caudal, se calibró el sensor de flujo YF-S201 mediante su comparación con aforos directos. Para ello, se evaluaron 17 caudales distintos, realizando tres mediciones independientes por cada uno. A partir de los datos obtenidos, se aplicó el ajuste lineal $Q_c = K_l Q_m + Q_0$ con Q_c el caudal corregido, Q_m el caudal medido y Q_0 el intercepto. Los coeficientes resultantes del ajuste fueron: $K_l = 2.09$ y $Q_0 = 0.0039$ l/s. Esta expresión fue posteriormente incorporada al código de adquisición de datos, lo que permitió obtener estimaciones de caudal calibradas y precisas durante el desarrollo de los ensayos experimentales.

Posterior a la calibración, se implementó el método de perturbación, diseñado para inducir de manera controlada transiciones entre los distintos regímenes hidráulicos. Este método consiste en interrumpir temporalmente el flujo mediante una paleta impresa en PLA fijada a la altura de salida del jet. La perturbación generada provoca una alteración transitoria en el escurrimiento, permitiendo observar la transición desde un régimen supercrítico a uno subcrítico. De este modo, fue posible identificar las condiciones de biestabilidad para combinaciones específicas de θ_c y Q , tal como se muestra en la Figura 2.

Las imágenes experimentales fueron tomadas con una cámara Basler acA2000-165uc y un lente Thorlabs de montura C y distancia focal 50 mm fija. Las imágenes de 1024 px x 2048 px fueron

tomadas con una tasa de adquisición de 100 fps (cuadros por segundo) con exposición de 1 ms. El análisis de imágenes fue realizado utilizando un código `python` con el que se buscó detectar la superficie libre para obtener el perfil de altura h . La detección se realizó con la ayuda de `rodamina`, la que facilita la detección del agua con una descomposición de color HSV, resultando en una máscara binaria dentro de una semicircunferencia calibrada. Se trazaron líneas radiales para identificar puntos de mayor intensidad, que luego se suavizaron mediante una media móvil. Estos puntos se graficaron en coordenadas polares, donde la distancia radial corresponde a la altura local del pelo de agua y el ángulo representa su posición angular. De este modo, se obtuvo la forma del eje hidráulico bajo distintos regímenes de flujo. A partir de los puntos suavizados, se exportaron los valores de altura y su ángulo correspondiente, permitiendo caracterizar la superficie curva del flujo con resolución angular.

2.2. Matriz y protocolo experimental

Cada ensayo experimental siguió el siguiente protocolo experimental. Se instala una curva de ángulo θ_c dada y fija el caudal inferior (ver Tabla 1). Una vez se desarrolló una condición de flujo estable sobre la curva, se procede a perturbar el flujo en caso de ser supercrítico. Se graba la perturbación del flujo y la transición de régimen, en caso de haberla, y en dicho caso se captura el nuevo eje hidráulico estable. Una vez finalizado el ensayo se modifica el caudal y finalizados todos los caudales, se instala una nueva curva.

La matriz experimental experimental se presenta en la Tabla 1 y está compuesto por 26 impresiones de superficies cóncavas, todas con R y W constantes. Las curvas fueron diseñadas con incrementos angulares progresivos de 2.9° , lo que equivale a una reducción de 1 mm en uno de los ejes de curvatura. Cada curva impresa se ensayó para 26 caudales distintos, con incrementos de $\Delta Q \approx 0.00465$ l/s comenzando de un caudal mínimo de 0.033 l/s lo que dió como resultado una matriz experimental de 676 experimentos.

Tabla 1. Matriz experimental para este estudio. En las filas, los caudales considerados Q , y en las columnas los ángulos θ_c de recorrido usados para los ensayos experimentales. Los caudales presentan incrementos regulares ΔQ 0.00465 l/s a partir de 0.033 l/s y los ángulos incrementos aproximados de 2.9° , desde 123.55° hasta 180° .

Q l/s \ θ_c °	123.55	126.86	...	180
0.033	(0.033, 123.55)	(0.033, 126.86)	...	(0.033, 180)
0.037	(0.037, 123.55)	(0.037, 126.86)	...	(0.037, 180)
0.042	(0.042, 123.55)	(0.042, 126.86)	...	(0.042, 180)
0.047	(0.047, 123.55)	(0.047, 126.86)	...	(0.047, 180)
0.051	(0.051, 123.55)	(0.051, 126.86)	...	(0.051, 180)
0.056	(0.056, 123.55)	(0.056, 126.86)	...	(0.056, 180)
⋮	⋮	⋮		⋮
0.140	(0.140, 123.55)	(0.140, 126.86)	...	(0.140, 180)
0.144	(0.144, 123.55)	(0.144, 126.86)	...	(0.144, 180)
0.149	(0.149, 123.55)	(0.149, 126.86)	...	(0.149, 180)

3. MARCO TEÓRICO

Consideremos entonces el flujo de agua con densidad ρ y viscosidad dinámica μ que se desarrolla sobre una curva cilíndrica cóncava de radio fijo R . El flujo lo analizaremos utilizando un sistema coordenado polar $Or\theta$ con el eje radial r orientado de forma opuesta a la normal de la superficie y el ángulo θ ortogonal a r . Promediando las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes sobre la turbulencia, obtenemos la ecuación de continuidad promediada

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\bar{u}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (1)$$

donde \bar{u}_r y \bar{u}_θ son las componentes de la velocidad en r y θ , respectivamente. De igual forma obtenemos las ecuaciones promediadas de Reynolds

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} - \frac{\bar{u}_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} - g \sin \theta \\ &+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\bar{\tau}_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\tau}_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\bar{\tau}_{\theta\theta}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\overline{ru'_r u'_r}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\overline{u'_r u'_\theta}) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_r \bar{u}_\theta}{r} &= -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} - g \cos \theta \\ &+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\bar{\tau}_{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\tau}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\bar{\tau}_{\theta r}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\overline{ru'_\theta u'_r}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\overline{u'_\theta u'_\theta}) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

donde g es la aceleración de gravedad, u'_i son las fluctuaciones de las velocidades para $i = \{r, \theta\}$ y $\bar{\tau}_{ij}$ son las componentes promediadas del tensor de esfuerzos viscosos. Siguiendo una ley constitutiva para un fluido newtoniano podemos ligar esfuerzos tangenciales y deformación $\bar{\tau} = 2\mu \|\bar{\mathbf{D}}\|$. Los esfuerzos viscosos y aparentes pueden agregarse bajo la definición $\bar{\tau}_{vij} = \bar{\tau}_{ij} - \overline{\rho u'_i u'_j}$ lo que termina por condensar las ecuaciones 2-3 en el sistema

$$\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \theta} - \frac{\bar{u}_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{1}{r\rho} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r\bar{\tau}_{v_{rr}}) + \frac{\partial \bar{\tau}_{v_{r\theta}}}{\partial \theta} + \bar{\tau}_{\theta\theta} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial t} + \bar{u}_r \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial r} + \frac{\bar{u}_\theta}{r} \frac{\partial \bar{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\bar{u}_r \bar{u}_\theta}{r} = \frac{1}{r\rho} \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} (r\bar{\tau}_{v_{\theta r}}) + \frac{\partial \bar{\tau}_{v_{\theta\theta}}}{\partial \theta} + \bar{\tau}_{\theta r} \right). \quad (5)$$

con la definición adicional de la presión motriz $\bar{p} = \bar{p} + \rho g r \sin \theta$.

A partir de una aproximación de onda larga es posible determinar los términos predominantes en las ecuaciones 4 y 5 a través de la escala natural de estos sistemas $\epsilon = h/R \ll 1$ (Heller *et al.*, 2005; Pfister *et al.*, 2014), para el cual la altura del flujo h es mucho menor que el radio de curvatura R . No obstante, primero integraremos en la dirección radial r —entre $R-h$ y R —nuestras ecuaciones 4 y 5 considerando además una condición de borde cinemática en la superficie libre $R-h$ definida por

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{S} = 0, \quad \mathbf{S}(r, \theta, t) = r - (R - h(\theta, t)), \quad (6)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\bar{u}_\theta|_{(R-h)}}{R-h} \frac{\partial (R-h)}{\partial \theta} + \bar{u}_r|_{(R-h)} = 0, \quad (7)$$

y simplificada por la condición de no resbalamiento $\bar{u}_r|_R = \bar{u}_\theta|_R = 0$. Combinando estas condiciones de borde con la regla de Leibniz aplicada para la integral radial, obtenemos una versión de las ecuaciones de Saint-Venant para nuestro flujo

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{hu_\theta}{R-h} \right) + \frac{2hu_r}{R-h} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (hu_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{hu_\theta^2}{R-h} \right) + 2h \frac{u_r u_\theta}{R-h} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{hp}{R-h} \right) - gh \cos \theta + \frac{1}{\rho} \mathcal{T}_{\theta r}|_R, \quad (9)$$

donde u_i son las velocidad promediadas radialmente para $i = \{r, \theta\}$, $\mathcal{T}_{\theta r}|_R$ es el esfuerzo de corte basal sobre la curva y p la presión promediada sobre la profundidad. Para este último término, es posible determinarlo con el balance entre aceleración centrípeta y presión hidrostática en la ecuación de momentum en r , suponiendo además una relación $\bar{u}_\theta = r\omega$ e integrando en la dirección radial obtenemos

$$hp = \frac{\rho u_\theta^2}{2R^2} \left(Rh^2 - \frac{2}{3}h^3 \right) + \rho g \sin \theta \frac{h^2}{2}. \quad (10)$$

En paralelo, podemos calcular el término de corte basal usando la ecuación de Manning para una sección transversal rectangular, en equivalencia friccional con la configuración experimental (Figura 1)

$$\mathcal{T}|_R = \rho g R_h J, \quad J = \left(\frac{nu_\theta}{R_h^{1/3}} \right)^2 \quad (11)$$

donde J es el gradiente hidráulico, $R_h = A/\chi = Wh/(W+2h)$ el radio hidráulico definido por el ancho W y el perímetro mojado χ . Por último, $n = 0,009$ corresponde al coeficiente de Manning para plásticos (como el PLA) (White, 1994). Finalmente podemos reemplazar las ecuaciones 10 y 11 en la ecuación de momentum simplificada para una condición de flujo permanente y sin flujo en la dirección radial $u_r = 0$. Para la ecuación de masa esto resulta en conservación del caudal por unidad de ancho $q = hu_\theta$, i.e. $dq/d\theta$, que al considerarse en la ecuación de momentum promediada 9 resulta en una ecuación *ad-hoc* para el eje hidráulico

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{\cos \theta \left(\frac{3h}{2} - R \right) + \frac{R-h}{\rho gh} \mathcal{T}_{r\theta}|_R}{\left\{ \left(1 + \frac{h}{2} \right) \sin \theta - \left[\frac{(R-2h)}{(R-h)} + h \left(1 - \frac{h}{R} \right) + R \left(\frac{h^2}{2R^2} - \frac{1}{3} \frac{h^3}{R^3} \right) \right] Fr^2 \right\}} \quad (12)$$

con $Fr = u_\theta/\sqrt{gh}$ el número de Froude. De forma análoga a la ecuación del eje hidráulico cartesiano $dh/d\theta = (i-j)/(1-Fr^2)$, esperamos que la condición de altura normal este dominada por el balance entre los términos del numerador en la ecuación 12 y la condición de altura crítica esté ligada al denominador. No obstante vemos que el término que acompaña al número de Froude tiene naturalmente una dependencia sobre $\epsilon = h/R$, incluso llegando a un término cúbico. Sin embargo esperamos que para condiciones supercríticas haya poco efecto de ϵ sobre el flujo, ya que para esos casos se cumplirá $\epsilon \ll 1$. Usando dicha aproximación junto a una condición de canal suficientemente ancho $R_h \approx h$ dado que $h \ll W = R$, la ecuación se simplifica llegando a

$$\frac{1}{R} \frac{dh}{d\theta} = \frac{\cos \theta + J}{\sin \theta - Fr^2} \quad (13)$$

que por supuesto tendrá validez únicamente para régimen supercrítico pero recobra una expresión similar al eje hidráulico cartesiano tradicional para un canal inclinado.

4. RESULTADOS

En la Figura 3 se presentan los resultados experimentales del estudio, en los cuales se observó la ocurrencia de los distintos regímenes de flujo y de la transición super-subcrítica debido a perturbaciones externas. Estos resultados se grafican en función del ángulo de la curva θ_c para distintos caudales Q según la matriz experimental de la Tabla 1. En este diagrama de fase, la Figura 3 expone claramente tres fases, cada una describiendo la ocurrencia de: (I) un flujo supercrítico incondicionalmente estable; (II) un flujo condicionalmente estable en el cual una perturbación externa permite la transición de régimen $Fr >< 1$; y (III) un flujo subcrítico incondicionalmente estable.

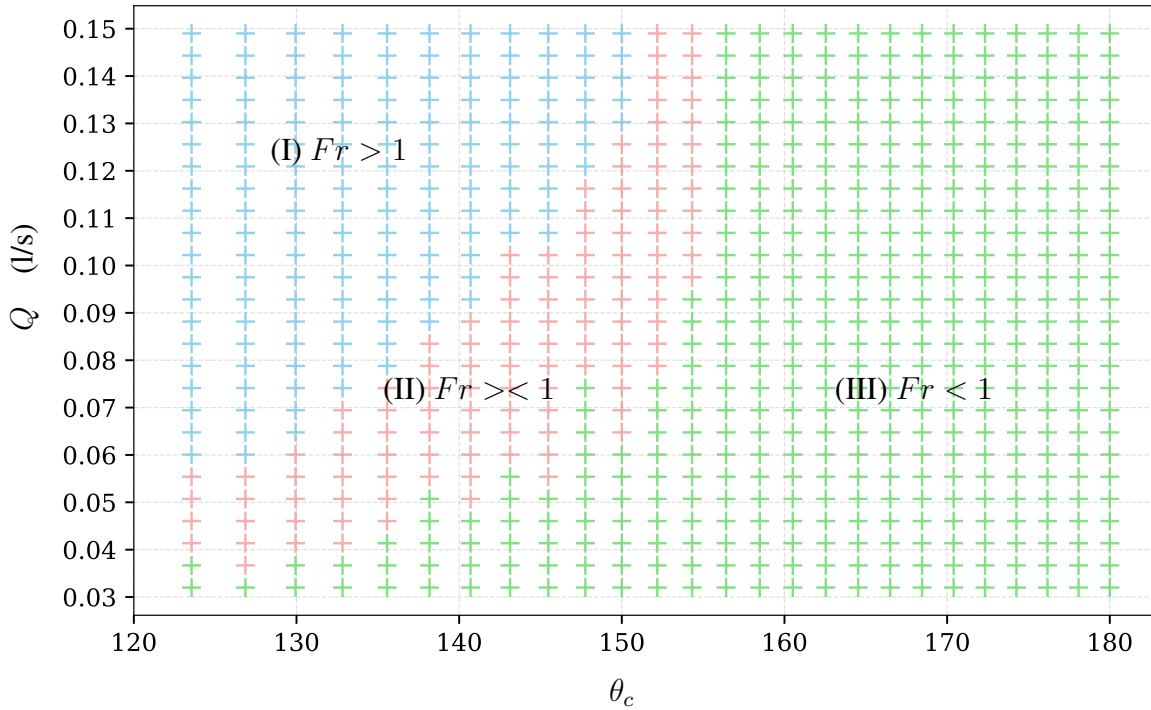


Figura 3. Diagrama de fase experimental para el comportamiento y régimen hidráulico del flujo según el ángulo de de recorrido de la curva θ_c para diversos caudales Q según la matriz experimental en Tabla 1. (I) Experimentos que muestran un flujo supercrítico $Fr > 1$ incondicionalmente estable. (II) Franja de experimentos que presentan escurrimientos condicionalmente estables; perturbaciones producen cambios de régimen $Fr >< 1$. (III) Experimentos que muestran un flujo subcrítico $Fr < 1$ incondicionalmente estable.

Cualitativamente, en los experimentos condicionalmente estables (II en Figura 3) observamos que perturbaciones menores inducen una transición abrupta hacia un régimen subcrítico mediante la formación de un resalto hidráulico. Esta sensibilidad plantea la hipótesis de que el régimen del flujo sobre superficies curvas puede no solo depender de las variables tradicionales como caudal y

pendiente, sino también de parámetros geométricos locales, como el ángulo θ_c o la fricción local.

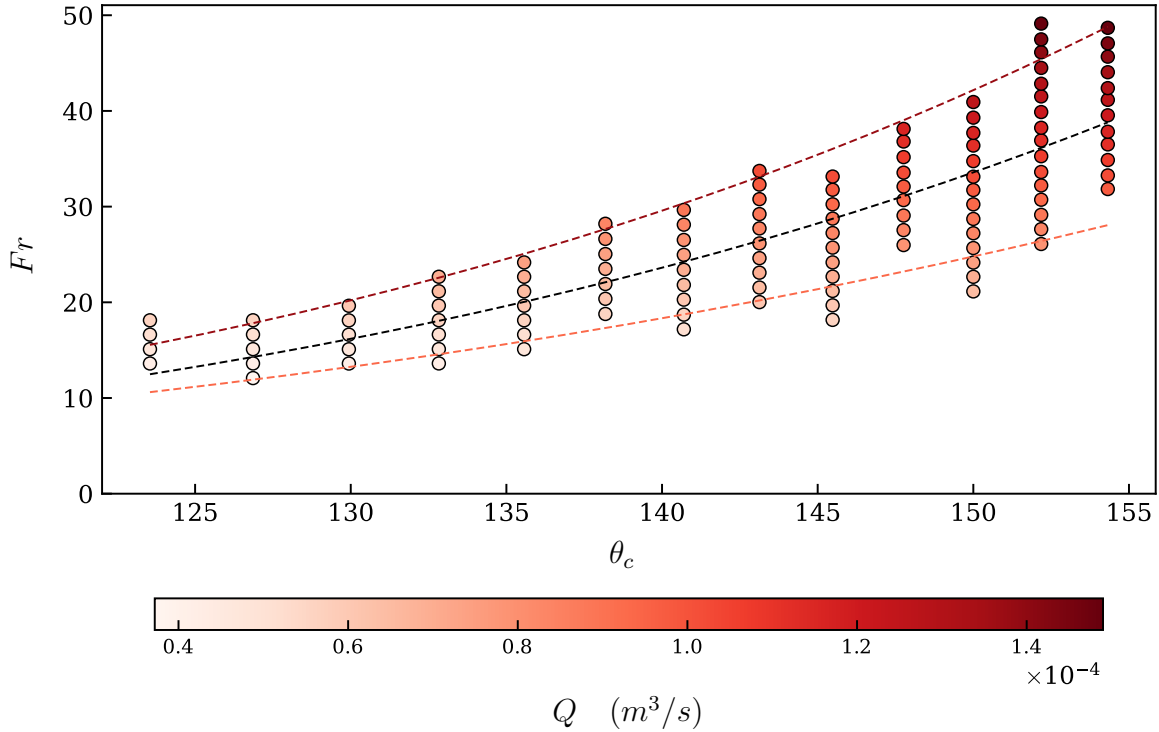


Figura 4. Número de Froude en función del ángulo de recorrido θ_c . Los puntos representan los valores experimentales obtenidos para distintos caudales, graficados en tonos de rojo según su magnitud. La línea negra discontinua corresponde al ajuste global de los datos, mientras que las líneas rojas discontinuas más y menos intensas representan ajustes para las envolventes superior e inferior de los datos, respectivamente. La expresión mostrada en el eje vertical corresponde a la definición física utilizada para el número de Froude: $Fr^2 = \frac{lQ^2}{gA^3}$, donde $l = W$ es el ancho superficial del flujo, Q el caudal, g la gravedad y A el área transversal del flujo. En el régimen supercrítico, el área se define como $A = lh_{\text{super}}$, con h_{super} la altura del pelo de agua medida experimentalmente.

Tal como se muestra en la Figura 4, el número de Froude varía sistemáticamente con el ángulo de recorrido θ_c , evidenciando la transición entre los distintos regímenes hidráulicos. A medida que aumenta el ángulo de la superficie curva, se registran con mayor frecuencia transiciones desde un régimen supercrítico hacia uno subcrítico. Esta tendencia da cuenta de la alta sensibilidad del sistema frente a variaciones geométricas y de caudal, y coincide con la zona de biestabilidad identificada en la Figura 3, donde perturbaciones mínimas son capaces de inducir cambios abruptos de régimen. En conjunto, estos resultados confirman la dependencia del número de Froude con la geometría de la curva y permiten visualizar, de forma indirecta, los límites de estabilidad del flujo y los rangos en los que coexisten soluciones sub y supercríticas.

Una vez caracterizados los distintos regímenes de flujo incondicionalmente estables y mapeada su biestabilidad condicional, se procedió a comparar los perfiles de altura obtenidos experimentalmente con los predichos por la ecuación teórica del eje hidráulico en la ecuación 12. La Figura 5

sintetiza esta comparación para tres combinaciones representativas de ángulo θ_c y caudal Q

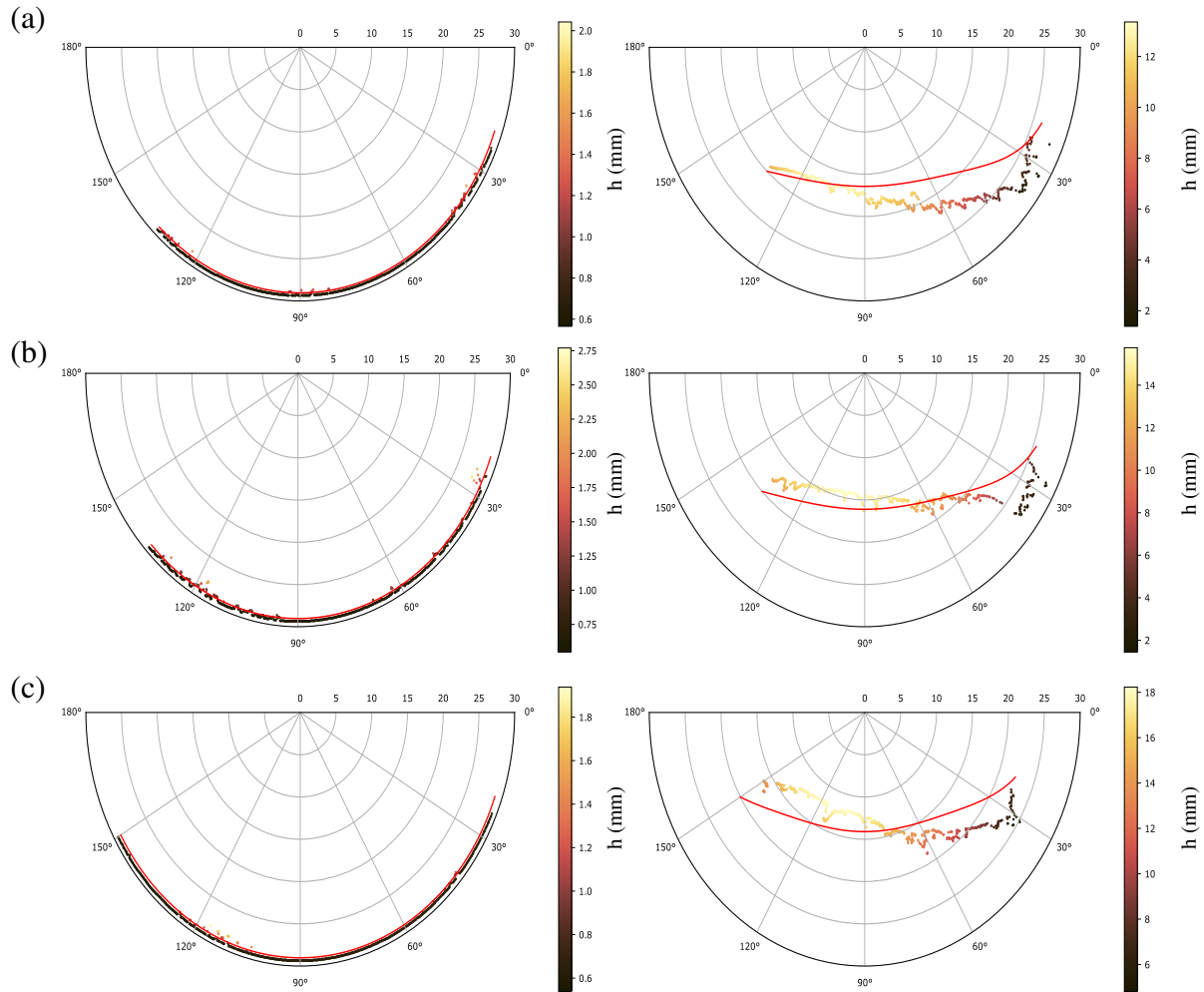


Figura 5. Comparación de ejes hidráulicos experimentales graficados con puntos en gradiente de colores para h y teóricos graficados a través de una curva roja continua para condiciones de flujo supercrítico (columna izquierda) y subcrítico (columna derecha), en tres curvas distintas: (a) $\theta_c \approx 132,83^\circ$ y $Q \approx 0,041$ l/s, (b) $\theta_c \approx 135,57^\circ$ y $Q \approx 0,051$ l/s, (c) $\theta_c \approx 150,00^\circ$ y $Q \approx 0,083$ l/s. La escala de color indica la magnitud de la altura de escurrimiento radial.

La comparación experimental y teórica muestra que, a pesar de ser una aproximación de primer orden, la ecuación del eje hidráulico en 12 logra capturar bastante bien los ejes hidráulicos bajo condiciones estables de escurrimiento. Efectivamente, hay efectos de pared y estructuras complejas que no están bien capturadas, pero como primera aproximación del estudio, hay un buen resultado. Los ejes supercríticos se ajustan muy bien a las predicciones teóricas y las soluciones numéricas de la ecuación 12. Esto sugiere que el modelo es robusto bajo condiciones de flujo rápido en régimen cuasi-uniforme. Por el contrario, para régimen subcrítico los resultados no son tan buenos. Estas marcadas desviaciones, sobretudo en la región inicial de transición, se debe a la ausencia de

términos viscosos y efectos de pared que la ecuación del eje hidráulico propuesta no es capaz de reproducir. Esto es latente en el hecho que la ecuación no es capaz de reproducir condiciones de escurrimiento con resaltos hidráulicos. Aún así las soluciones propuestas logran un buen ajuste en general, independiente del régimen de escurrimiento, lo que es prometedor para pensar en análisis más complejos para resolver toda la dinámica viscosa y de ondas de choque (resaltos).

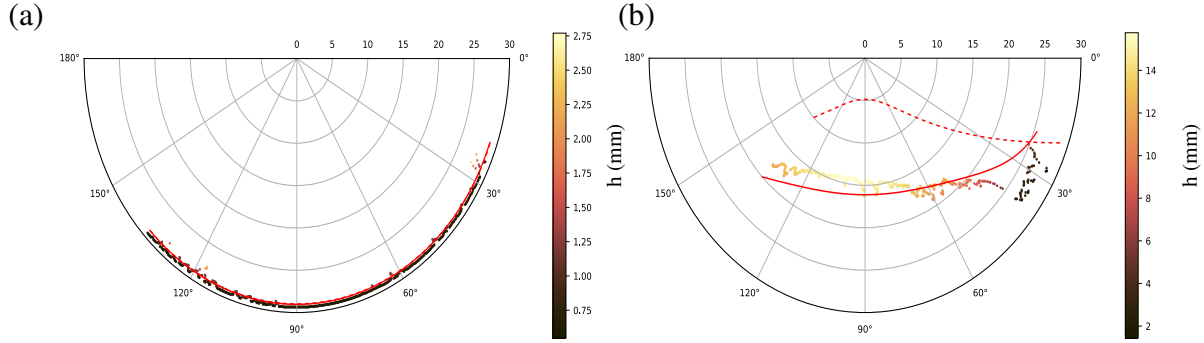


Figura 6. Comparación de ejes hidráulicos teóricos graficados a través de una curva roja continua (ecuación 12) y una curva roja discontinua (ecuación 13), junto con los ejes hidráulicos experimentales representados mediante puntos graficados en gradiente de colores según la magnitud de la altura de escurrimiento radial. Se presentan resultados para condiciones de flujo supercrítico (a) y subcrítico (b), correspondientes a una curva con $\theta_c \approx 135,57^\circ$ y $Q \approx 0,051$ l/s. La escala de color indica la magnitud de la altura de escurrimiento radial.

Por último, y con el fin de ver la aplicabilidad de la ecuación del eje hidráulico para una condición de flujo somero $\epsilon = h/R$, presentamos resultados de la solución de la ecuación 13, que sería equivalente a una ecuación del eje hidráulico tradicional. En la Figura 6 comparamos las soluciones de las ecuaciones 12 y 13 con los resultados experimentales. Es posible ver que la aproximación de flujo somero logra describir bien los resultados experimentales y la solución se ajusta de forma casi idéntica a la solución de la ecuación 12. Lo anterior no ocurre con la condición de flujo subcrítico, lo que es de esperar, pero permite simplificar bastante la resolución y evaluación del flujo para $Fr > 1$ que es normalmente una condición de operación deseada en disipadores tipo salto de esquí (Heller *et al.*, 2005; Pfister *et al.*, 2014).

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron resultados experimentales que dan cuenta del flujo hidráulico biestable sobre superficies curvas circulares. Para describir la hidráulica del flujo, se desarrollaron ecuaciones tipo Saint-Venant que se traducen en una ecuación general para el eje hidráulico con efectos de curvatura. De forma general, las soluciones del eje hidráulico se ajustan bien a los resultados experimentales independiente del régimen de flujo, aun cuando las soluciones subcríticas pueden mejorarse incluyendo efectos viscosos y de pared. Al usar una aproximación de onda larga en la ecuación encontrada, el ajuste de los ejes teóricos empeora unicamente para $Fr < 1$ lo que igualmente proporciona una ecuación validada para $Fr > 1$ con nuestros datos experimentales.

Si bien el carácter biestable del flujo observado y caracterizado en los experimentos requiere mayor estudio, lo presentado preliminarmente en este estudio puede ya dar luces de como abordar el diseño y operación de obras con fondo cóncavo. Esto puede también dar luces del comportamiento en cauces naturales de alta montaña, buscando condiciones hidráulicas que favorezcan el medio ambiente acuático.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo brindado por la Dirección de Investigación de la Facultad de Ingeniería y Ciencias de la Universidad Adolfo Ibañez y de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo ANID a través del proyecto Fondecyt Iniciación 11240630.

REFERENCIAS

- Arenas, M., & Mourgues, A. 2012. Amenazas y vulnerabilidad de sitios geoturísticos en áreas protegidas: El caso del Parque Nacional Radal Siete Tazas y los efectos del terremoto del Maule [8,8Mw] en febrero de 2010. *In: Congreso Geológico Chileno*.
- Baayoun, A., Khayat, R. E., & Wang, Y. 2022. The transient spread of a circular liquid jet and hydraulic jump formation. *Journal of Fluid Mechanics*, **947**, A34.
- Bhagat, R. K., & Linden, P. F. 2020. The circular capillary jump. *Journal of Fluid Mechanics*, **896**, A25.
- Bhagat, R. K., Jha, N. K., Linden, P. F., & Wilson, D. I. 2018. On the origin of the circular hydraulic jump in a thin liquid film. *Journal of Fluid Mechanics*, **851**, R5.
- Bush, J. W. M., Aristoff, J. M., & Hosoi, A. E. 2006. An experimental investigation of the stability of the circular hydraulic jump. *Journal of Fluid Mechanics*, **558**, 33–52.
- Carling, P. A., & Orr, H. G. 2000. Morphology of riffle–pool sequences in the River Severn, England. *Earth Surface Processes and Landforms*, **25**(4), 369–384.
- Craik, A. D. D., Latham, R. C., Fawkes, M. J., & Gribbon, P. W. F. 1981. The circular hydraulic jump. *Journal of Fluid Mechanics*, **112**, 347–362.
- Fiorotto, V., Barjastehmaleki, S., & Caroni, E. 2016. Stability Analysis of Plunge Pool Linings. *Journal of Hydraulic Engineering*, **142**(11), 04016044.
- Gray, J. M. N. T., & Edwards, A. N. 2014. A depth-averaged $\mu(I)$ -rheology for shallow granular free-surface flows. *Journal of Fluid Mechanics*, **755**, 503–534.
- Heller, V., Hager, W. H., & Minor, H.-E. 2005. Ski Jump Hydraulics. *Journal of Hydraulic Engineering*, **131**(5), 347–355.
- Karami Moghadam, M., Amini, A., Malek, M. A., Mohammad, T., & Hoseini, H. 2019. Physical Modeling of Ski-Jump Spillway to Evaluate Dynamic Pressure. *Water*, **11**(8).

- Kate, R. P., Das, P. K., & Chakraborty, S. 2007. Hydraulic jumps due to oblique impingement of circular liquid jets on a flat horizontal surface. *Journal of Fluid Mechanics*, **573**, 247–263.
- Needham, D. J., & Merkin, J. H. 1984. On roll waves down an open inclined channel. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, **394**(1807), 259–278.
- Pfister, M., Hager, W. H., & Boes, R. M. 2014. Trajectories and air flow features of ski jump-generated jets. *Journal of Hydraulic Research*, **52**(3), 336–346.
- Razis, D., Kanellopoulos, G., & van der Weele, K. 2021. Continuous hydraulic jumps in laminar channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, **915**, A8.
- Richards, K. S. 1976. The morphology of riffle-pool sequences. *Earth Surface Processes*, **1**(1), 71–88.
- Teymourtash, A. R., & Mokhlesi, M. 2015. Experimental investigation of stationary and rotational structures in non-circular hydraulic jumps. *Journal of Fluid Mechanics*, **762**, 344–360.
- Viroulet, S., Baker, J. L., Edwards, A. N., Johnson, C. G., Gjaltema, C., Clavel, P., & Gray, J. M. N. T. 2017. Multiple solutions for granular flow over a smooth two-dimensional bump. *Journal of Fluid Mechanics*, **815**, 77–116.
- Watson, E. J. 1964. The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane. *Journal of Fluid Mechanics*, **20**(3), 481–499.
- White, F. M. 1994. Fluid Mechanics. *McGraw-Hill*.
- Zhou, G., & Prosperetti, A. 2022. Hydraulic jump on the surface of a cone. *Journal of Fluid Mechanics*, **951**, A20.