

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA
XXVII CONGRESO CHILENO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

**ESTUDIO PARAMÉTRICO DE LA INCERTIDUMBRE EN LA DESCRIPCIÓN
UNIDIMENSIONAL DE UN ACUÍFERO CONFINADO MEDIANTE LA
REPRESENTACIÓN DE KARHUNEN-LOÈVE**

GONZALO BUSTOS B.¹
RODRIGO MENESES P.²
JOAQUIN MEZA A.¹

RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio de la incertidumbre en medios porosos heterogéneos mediante un enfoque paramétrico aplicado a un modelo unidimensional de flujo en acuíferos confinados. La metodología aplicada combina la expansión de Karhunen-Loève, utilizada para representar la conductividad hidráulica como un campo aleatorio log-normal, con el uso de polinomios de Hermite para aproximar la respuesta estocástica del nivel piezométrico. El objetivo principal es establecer relaciones entre la carga hidráulica y los parámetros estadísticos que caracterizan la transmisividad, especialmente la longitud de correlación y el coeficiente de variación. El enfoque propuesto basado en aproximaciones semi-analíticas permite analizar de forma eficiente la influencia de la heterogeneidad en el comportamiento del sistema, incluso en escenarios con altos niveles de variabilidad. Los resultados muestran la capacidad del método para capturar efectos no triviales de la estructura espacial de la transmisividad, lo que lo convierte en una herramienta versátil para el análisis hidrogeológico en condiciones de incertidumbre.

¹ Departamento de Obras Civiles, Universidad Técnica Federico Santa María - email: gonzalo.bustos@sansano.usm.cl; joaquin.meza@usm.cl

² Escuela de Ingeniería Civil, Universidad de Valparaíso – email: rodrigo.meneses@uv.cl

1. INTRODUCCIÓN

Desde 2010, la zona central de Chile enfrenta un período prolongado de déficit pluviométrico. Este fenómeno ha implicado disminuciones anuales de precipitación entre un 25% y un 45% respecto de los promedios históricos (Garreaud et al., 2017). Esta situación se ha intensificado debido al cambio climático, el cual ha incrementado la frecuencia e intensidad de las olas de calor (Piticar, 2018), modificado la distribución espacial y temporal de las lluvias (Valdés-Pineda et al., 2016) y reducido significativamente los caudales en cuencas como la del río Maipo (McCarthy et al., 2022).

Las aguas subterráneas constituyen un recurso clave frente a la creciente escasez hídrica, principalmente por la gran capacidad de almacenamiento que ofrecen los acuíferos (Gleeson et al., 2016; UNESCO, 2022; Foster et al., 2013). Estas formaciones, integradas por sedimentos y rocas permeables, pueden sostener una proporción significativa del abastecimiento hídrico, tanto para el consumo humano como para usos agrícolas e industriales (Shamsudduha & Taylor, 2020; Loaiciga & Doh, 2023; UN-Water, 2022).

En este escenario, el estudio del flujo subterráneo en acuíferos confinados adquiere un papel central en hidrogeología, ya que permite modelar el comportamiento del recurso bajo diversas condiciones de extracción y recarga. La caracterización de acuíferos, y principalmente de la conductividad hidráulica, se ve afectada por múltiples fuentes de incertidumbre, derivadas principalmente de la elevada heterogeneidad espacial de sus propiedades hidrodinámicas (Albarrán Ordás & Zosseder, 2024; Ackerer et al., 2023). La variabilidad litológica genera cambios locales en propiedades como porosidad, permeabilidad y fracturación del subsuelo, lo que produce fluctuaciones significativas en la conductividad hidráulica, complejas de caracterizar mediante mediciones puntuales, tales como pruebas de bombeo aisladas o ensayos localizados de permeabilidad (Zhang & Lu, 2006; Moreno-Gómez et al., 2025; Gelhar, 1986), junto con la incertidumbre asociada a la escala de medición y por lo tanto en las mediciones en los ensayos de laboratorio, son algunas de las problemáticas en esta dirección.

En virtud de lo anterior, la aplicación de métodos computacionales se ha consolidado en las últimas décadas como una alternativa eficaz para el análisis y la modelación de acuíferos. Los avances en esta dirección resultan de gran interés tanto para la industria como para la academia, ya que permiten explorar diversos escenarios en problemas complejos propios de la hidrogeología moderna (Carrera & Neuman, 1986; Peeters & Middlemis, 2022).

Existen diversos y variados enfoques para incorporar la incertidumbre en la predicción de niveles piezométricos, dentro de los cuales es clásica y comúnmente utilizado corresponde el método de Monte Carlo (Dagan, 1981; Schiavo, 2024). Este tratamiento permite estimar estadísticos mediante simulaciones repetidas de manera robusta y poco invasiva, pero de alto costo computacional, lo cual limita su aplicación en problemas de alta resolución o gran complejidad (Townley & Wilson, 1985; Schiavo, 2024). Otro enfoque clásico corresponde al método de perturbaciones, el cual proporciona una aproximación analítica más eficiente al considerar pequeñas fluctuaciones

alrededor de un valor medio. No obstante, su validez se restringe a contextos con baja variabilidad (Freeze & Cherry, 1979; Gotovac et al., 2009). En décadas recientes, los métodos que representan la transmisividad mediante expansiones del tipo Karhunen–Loève (KL) se han consolidado como una herramienta eficaz para el tratamiento de variables aleatorias en modelos matemáticos, al transformar la formulación estocástica en un problema determinista equivalente mediante expansiones en bases ortogonales (Ghanem & Spanos, 1991; Stefanou, 2009). Estos enfoques han demostrado ser precisos y computacionalmente eficientes, especialmente cuando se combinan con técnicas de reducción de modelos o esquemas de colocación estocástica (Babuška et al., 2004; Shalimova et al., 2017). No obstante, aún presentan limitaciones al aplicarse a campos con heterogeneidades marcadas, distribuciones log-normales y correlaciones espaciales complejas (Renard & de Marsily, 1997; Le Maître & Knio, 2010).

El objetivo central de este trabajo es obtener relaciones que permitan describir explícitamente cómo la cota piezométrica depende de los parámetros característicos utilizados para describir la incertidumbre, en particular la longitud de correlación y su relación con la escala espacial del dominio del campo de transmisividad. La representación adecuada de la transmisividad resulta clave para comprender y predecir el comportamiento, especialmente en contextos donde la heterogeneidad del medio subterráneo desempeña un rol significativo. La problemática se aborda mediante una estrategia que combina dos herramientas principales: por un lado, la expansión de Karhunen–Loève, que permite representar el campo de transmisividad hidráulica como un campo aleatorio log-normal con estructura de correlación de decaimiento exponencial; por otro lado, los polinomios probabilísticos de Hermite, empleados para modelar la incertidumbre asociada al nivel piezométrico. Para ello, se adopta un modelo unidimensional que facilita el análisis detallado de estas dependencias paramétricas en las expresiones de la carga hidráulica y del flujo subterráneo.

2. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA Y FORMULACIÓN DEL MODELO

2.1. ECUACIÓN DE GOBIERNO PARA ACUÍFEROS CONFINADOS

Sea L la longitud característica del acuífero, y considérese el intervalo espacial $[0, L]$, donde x representa la posición a lo largo del acuífero. Bajo los supuestos de flujo de Darcy, la ecuación que gobierna la distribución del nivel piezométrico $H(x)$ en un acuífero confinado, en estado estacionario, está dada por:

$$\frac{d}{dx} \left(T(x, \theta) \frac{dH}{dx} \right) + Q(x, \theta) = 0 \quad (1)$$

donde $Q(x, \theta)$ es un término de fuente o sumidero [m^3/s] y $T(x, \theta)$ denota la transmisividad del medio [m^2/s], representada por la siguiente expresión:

$$T(x, \theta) = \int_{z_1}^{z_2} K(x, z, \theta) dz \quad (2)$$

La variabilidad del medio heterogéneo se modela como una incertidumbre estructurada, representada por la dependencia respecto al parámetro θ , que corresponde a una realización específica dentro del espacio de eventos aleatorios.

Para formular completamente un problema, es esencial especificar las condiciones de contorno. En este estudio, se asume que a partir de mediciones se cuenta con los valores de las cotas piezométricas en los límites del dominio $x = 0$ y $x = L$.

2.2. TRATAMIENTO ESPECTRAL PARA LA REPRESENTACIÓN DE LA TRANSMISIVIDAD HIDRÁULICA

2.2.1. DESCRIPCIÓN ESPACIAL DE LA HETEROGENEIDAD

La heterogeneidad del medio poroso puede describirse mediante modelos de correlación espacial, que permiten entender cómo se relacionan las propiedades hidrogeológicas a distintas distancias dentro del dominio. Para cuantificar, se utilizan funciones de covarianza $C(x, y)$, cuyo decaimiento con la distancia se ajusta con datos de campo. Entre los modelos más utilizados, el de decaimiento exponencial destaca por su capacidad para reproducir la variabilidad espacial observada en la transmisividad (Sánchez-Vila et al., 2006). Este modelo se expresa como sigue:

$$C(x, y) = \sigma_G^2 e^{-\frac{\|x-y\|}{l_c}} \quad (3)$$

siendo l_c es el largo de correlación entre los valores. En el contexto de representaciones espectrales (análisis de Fourier), se utilizan los valores y funciones propias $\sqrt{\lambda_n}$ y $\phi_n(x)$ del operador integral de covarianza:

$$\int_D C(x, y) \phi_n(y) dy = \lambda_n \phi_n(x) \quad (4)$$

En la próxima sección se utilizan estos elementos en el proceso de representación de $T(x, \theta)$.

2.2.2. EXPANSIÓN DE KARHUNEN - LÒEVE

La expansión de Karhunen-Lòeve (KL) utiliza la información de la estructura espacial para capturar las principales características de la variabilidad observada (Ghanem y Spanos, 1991; Zhang y Lu, 2004; Rubin, 2003). Esta representación se aplica sobre campos Gaussianos. Vinculamos este enfoque bajo el contexto que el logaritmo del campo $T(x, \theta)$ es un campo normal, lo que garantiza su positividad y produce una distribución lognormal para la transmisividad. Para $T(x, \theta) = \exp(G(x, \theta))$, la descripción se induce desde:

$$H(x, \theta) = \mu(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \phi_n(x) \xi_n(\theta) \quad (5)$$

donde $\mu(x)$ representa la media del campo, $\xi_n(\theta) \sim N(0,1)$ denotan los ruidos blancos utilizados en la descripción. De este modo se tiene la siguiente representación paramétrica:

$$T(x, \xi) = \exp\left(\mu(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \phi_n(x) \xi_n\right) \quad (6)$$

Remarcamos que en (6) se obtiene además una representación paramétrica ξ para el tratamiento de la incidencia de la incertidumbre, antes tratada desde las realizaciones θ en la ecuación 1. Este punto es fundamental para el enfoque adoptado en este trabajo, donde las descripciones de la carga hidráulica se desarrollan sobre un modelo determinista equivalente, pero de dimensión que involucra la variable espacial y el parámetro estocástico ξ . Este punto es abordado en la próxima sección.

2.3. TRATAMIENTO ESPECTRAL PARA LA REPRESENTACIÓN DE LA COTA PIEZOMÉTRICA

Para caracterizar esta dependencia y capturar cómo la incertidumbre en la transmisividad afecta la cota piezométrica, se recurre a la expansión en polinomios del caos, utilizando polinomios ortogonales de Hermite. Esta elección es especialmente adecuada, ya que los polinomios de Hermite son ortogonales respecto a la función peso gaussiana (Ghanem & Spanos, 1991). Así, la cota piezométrica $h(x, \xi)$ se representa mediante la siguiente expansión:

$$h(x, \xi) = \sum_{i=1}^N h_i(\xi) \varphi_i(x); \quad h_i(\xi) = \sum_{|a=0|}^P h_{i,a} \psi_a(\xi) \quad (7)$$

La expresión mostrada representa la cota piezométrica $h(x, \xi)$ como una combinación de funciones de forma espaciales $\varphi_i(x)$, provenientes de la discretización mediante elementos finitos, cuyos coeficientes $h_i(\xi)$ incorporan la incertidumbre de la transmisividad. Esta incertidumbre se describe expandiendo $h_i(\xi)$ en términos de polinomios del caos $\psi_a(\xi)$, de modo que los coeficientes $h_{i,a}$ capturan la dependencia conjunta espacial y estocástica de la cota piezométrica.

Mencionamos que la presentación en (7) se ha entregado en términos de la solución que se obtiene de la aplicación de la metodología que se presenta en la siguiente sección. En esta dirección, mencionamos que N denota el número de nodos, y por lo tanto $N + 1$ es el número de elementos, mientras que P representa el número de funciones en la base escogida para las representaciones de la dependencia paramétrica. Este valor se expresa por $P = (M + p)! / (M! p!)$ siendo " M " el número de parámetros (ruidos blancos) y " p " el grado máximo de los polinomios considerados.

3. METODOLOGÍA

3.1. APROXIMACIÓN DE GALERKIN MIXTA: SEMI-ANALYTICAL STOCHASTIC METHOD (SASM)

A partir de la ecuación diferencial que gobierna el flujo en acuíferos confinados, se busca obtener una solución que permita analizar el efecto de la incertidumbre de los parámetros hidrogeológicos

sobre la cota piezométrica. Para esto se recurre a la formulación débil del problema, que se presenta a continuación:

$$\int_{\mathcal{D}} T(x, \theta) \frac{dh}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_{\mathcal{D}} v(x) q(x, \theta) dx \quad (8)$$

En esta formulación se han homogeneizado las condiciones de borde, a través de una sustitución, para facilitar el tratamiento numérico. Para la resolución numérica, se emplea un enfoque Galerkin mixto, en el cual el dominio se subdivide en elementos y las ecuaciones de los coeficientes se obtienen mediante proyecciones sobre las funciones de forma locales. En el caso unidimensional, se emplean funciones lineales por tramos, que garantizan continuidad entre los elementos y permiten construir una base adecuada para la aproximación. Al reemplazar estas en la Ec. (8), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{|\alpha=0|}^P \int_0^L \prod_{k=1}^M \mathbb{E}_{\mathbb{R}} [e^{\tilde{\phi}_k(x)\xi_k} \psi_a(\xi) \psi_b(\xi)] h_{i,a} \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) e^\mu dx \\ = - \left(\frac{H_L - H_0}{L} \right) \int_0^L \prod_{k=1}^M \mathbb{E}_{\mathbb{R}} [e^{\tilde{\phi}_k(x)\xi_k} \psi_b(\xi)] \varphi'_j(x) e^\mu dx + \int_0^L Q(x) \varphi_j dx \end{aligned} \quad (9)$$

Con $\sqrt{\lambda_k} \phi_k(x) = \tilde{\phi}_k(x)$. Mediante el método de Galerkin-Mixto se puede transformar esta expresión en un sistema lineal, proyectando la ecuación sobre el espacio de los polinomios del caos y sobre el espacio generado por las funciones de forma.

3.2. FORMULACIÓN DEL SISTEMA LINEAL

A través del procedimiento de proyección indicado anteriormente, se deduce el sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes espectrales en la ecuación 7, el cual se define de la siguiente manera:

$$Kh = F \quad (10)$$

Se resuelve la dependencia en ξ presente en la Ec (9) de manera exacta considerando:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{R}} [e^{\tilde{\phi}_k(x)\xi_k} \psi_a(\xi) \psi_b(\xi)] = \left(\frac{m_k!}{\sqrt{\alpha_k! \beta_k!}} \right) (\tilde{\phi}_k(x))^{n_k - m_k} L_{m_k}^{n_k - m_k} \left(-(\tilde{\phi}_k(x))^2 \right) e^{\frac{(\tilde{\phi}_k(x))^2}{2}} \quad (11)$$

De manera análoga, para el término de fuente, se tiene:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{R}} [e^{\tilde{\phi}_k(x)\xi_k} \psi_b(\xi)] = - \left(\frac{H_L - H_0}{L} \right) \int_0^L \left(\frac{e^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M (\tilde{\phi}_k(x))^2}}{(\beta_1! \dots \beta_M!)^{1/2}} (\tilde{\phi}_1(x))^{\beta_1} \dots (\tilde{\phi}_M(x))^{\beta_M} \right) \quad (12)$$

A través de (11) y (12), se obtiene la dependencia espacial explícita y, por lo tanto, el sistema (10) es analizado con las herramientas clásicas de Elementos Finitos. La integral sobre el dominio

espacial se aproxima mediante el método de cuadratura de Gauss-Legendre. Una vez obtenidas la matriz K y el vector F , se resuelve el sistema de ecuaciones resultante para determinar los coeficientes $h_{i,a}$. Estos coeficientes permiten reconstruir la solución aproximada para la cota piezométrica en todo el dominio, así como calcular los momentos estadísticos de interés, como la media y la varianza.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Con el objetivo de distinguir relaciones entre la transmisividad y la carga hidráulica, como también la dependencia de los parámetros en las descripciones, se utiliza el ejemplo presentado por Li y Zhang (2007). En dicho estudio, los autores examinan un flujo en medios porosos considerando un dominio espacial de longitud $10[m]$, con condiciones de borde especificadas en $7[m]$ al inicio del dominio ($x = 0$) y $5[m]$ al final ($x = 10$). Las simulaciones mediante Montecarlo se obtienen considerando $N_{MC} = 10000$ realizaciones.

4.1. ESTUDIO PRELIMINAR SOBRE LA TRANSMISIVIDAD

Para cuantificar el grado de representatividad alcanzado por la expansión de Karhunen-Loève, es fundamental analizar cuántos términos es necesario considerar en la ecuación 7 para representar de manera adecuada el campo aleatorio. Para ello, se comienza con la representación de la varianza total $D\sigma_G^2$ según:

$$D\sigma_G^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \quad (13)$$

Utilizamos esta relación para la selección del número de términos en la expansión, y por lo tanto la cantidad de parámetros ξ (dimensión paramétrica).

Específicamente, se estudia cómo la razón entre el largo de correlación y la extensión del dominio determina la cantidad de términos necesarios a utilizar para capturar las estructuras espaciales de correlación presentes en el campo de transmisividad (ecuación 7). A continuación, se presenta una figura que permite observar el decaimiento de los valores propios normalizados, en función de la relación entre el largo de correlación y el largo del dominio ($L = 10$).

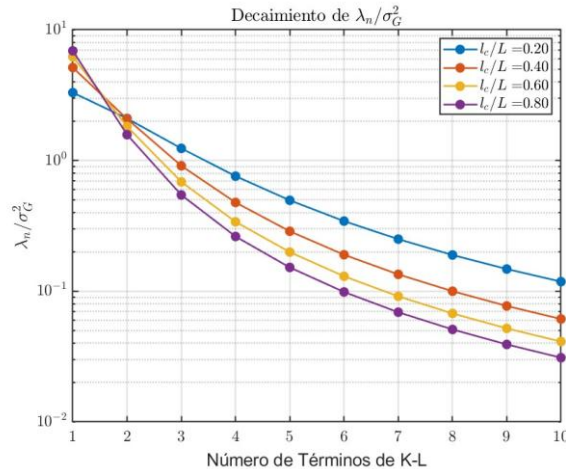


Figura 1: Decaimiento de los valores propios normalizados λ_n/σ_G^2 para distintas razones de correlación l_c/L con $\lambda_n = 2l_c\sigma_G^2/l_c^2\omega_n^2 + 1$.

En la figura 1 se presenta el decaimiento de los valores propios normalizados (λ_n/σ_G^2). Razones l_c/L más pequeñas corresponden a campos con menor correlación espacial, donde los valores de transmisividad pueden variar rápidamente a lo largo del dominio; en este caso, se observa que el decaimiento de los valores propios es más lento, indicando que se requiere una mayor cantidad de términos en la ecuación 6 para capturar adecuadamente la incidencia de la incertidumbre del sistema (ecuación 1).

Por el contrario, cuando l_c/L se aproxima a uno, se traduce en un decaimiento mucho más rápido de los valores propios, evidenciando que solo los primeros términos de la expansión aportan significativamente a la representación de la varianza. En consecuencia, en dominios altamente correlacionados, basta con emplear un número reducido de términos estocásticos para reconstruir la mayor parte de la variabilidad del campo.

4.2. ESTUDIO SOBRE LA COTA PIEZOMÉTRICA.

Para evaluar la respuesta de la cota piezométrica, se ejecutan múltiples pruebas variando la combinación del grado máximo del polinomio del caos utilizado (p) y la dimensión del espacio paramétrico (M) que se emplea en la aproximación de la transmisividad a través de la expansión KL. Las comparaciones se realizan con los resultados obtenidos mediante simulación de Monte Carlo.

Se comienza con el estudio de la incidencia del grado p para el caso $l_c/L = 0.4$. En la Figura (2) se muestran las gráficas de las varianzas obtenidas considerando $M = 2,3,4$.

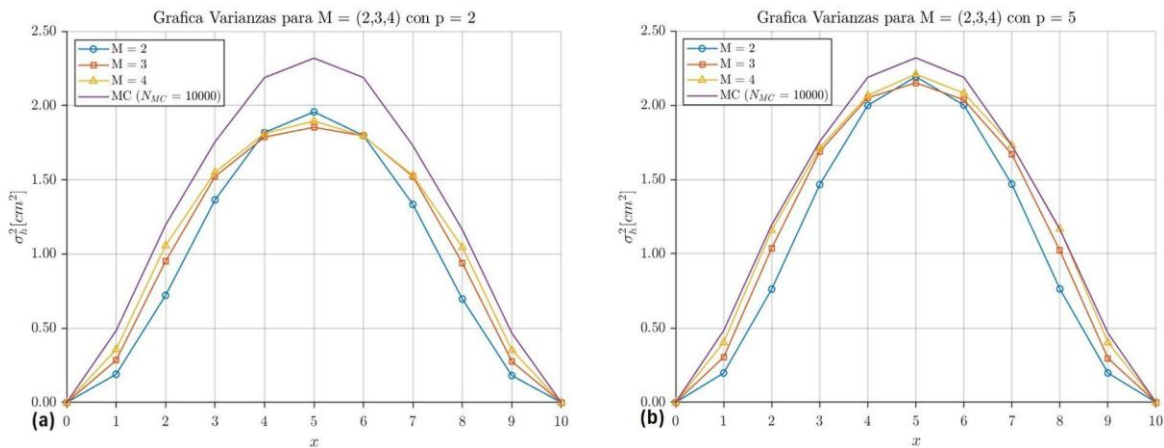


Figura 2: Comparación de la varianza de h obtenida para distintos números de variables aleatorias ($M = 2,3,4$) y grado máximo del polinomio: (a) $p = 2$, (b) $p = 5$. Se incluye como referencia la solución de Monte Carlo (MC) $N_{MC} = 10000$ simulaciones.

Utilizando los resultados obtenidos por simulación MC, a partir de las gráficas en la Figura (2) se aprecia una dependencia de las aproximaciones con respecto al valor p . Comparativamente, las diferencias se reducen a medida que aumenta el orden del polinomio " p " para la representación de

la cota piezométrica. Por otra parte, para $p = 5$ los resultados obtenidos para $M = 3,4$ no presentan diferencias significativas. Con respecto al análisis anterior, en la tabla 1 se muestra el porcentaje de la varianza espacial del campo de transmisividad recuperada en función del número de componentes aleatorios empleados. Se aprecia que el incremento de M desde 2 hasta 4 produce una mejora significativa en la varianza representada del campo de transmisividad, pasando del 72% al 86%. Por lo tanto, los resultados de la figura 2 indican una mejora en la estimación de la varianza de la cota piezométrica, producto de una mejor representación del campo de transmisividad.

Tabla 1: Porcentaje de la varianza recuperada para distintos valores de M y razón de correlación $l_c/L = 0.4$.

M	2	3	4
$\% \sigma_h^2$	72	81	86

El segundo análisis tiene por objetivo estudiar la incidencia de la razón l_c/L . Se consideran los casos $l_c/L = 0.2$ y $l_c/L = 0.8$. Los resultados se presentan en la Ilustración 3 donde fueron considerados $M = 2,3,4$ y $p = 3$.

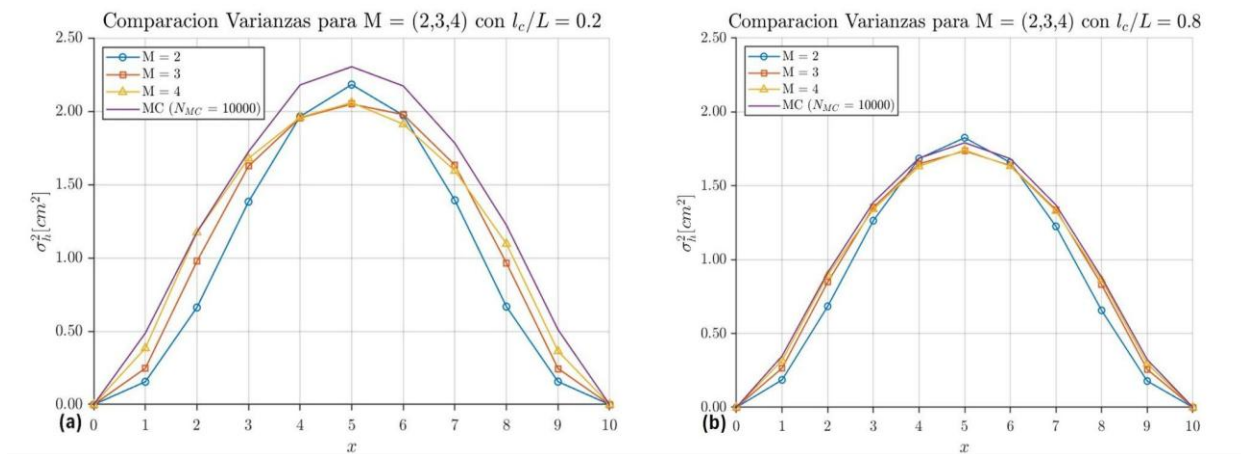


Figura 3: Comparación de la varianza de h para diferentes razones de correlación espacial: (a) $l_c/L = 0.2$, (b) $l_c/L = 0.8$ considerando distintos números de variables aleatorias ($M = 2,3,4$) y $p = 3$. Se incluye como referencia la solución de Monte Carlo (MC) con $N_{MC} = 10000$ simulaciones.

Junto con estas gráficas, la tabla 2 resume el porcentaje de la varianza total que es posible reconstruir en cada caso a medida que se incrementa el número de parámetros aleatorios considerados.

Tabla 2 Porcentaje de la varianza recuperada para distintos valores de M y razones de correlación $l_c/L = 0.2$ y $l_c/L = 0.8$.

M	2	3	4
$\% \sigma_h^2$ con $l_c/L = 0.2$	54	66	74
$\% \sigma_h^2$ con $l_c/L = 0.8$	85	90	93

Los resultados muestran que a medida que aumenta la relación entre el largo de correlación y el largo del dominio (l_c/L), la incidencia de la incertidumbre del sistema puede representarse de manera precisa utilizando un menor número de términos en la expansión. Por ejemplo, para $l_c/L = 0.8$, incluso con solo $M = 2$ términos se capturan el 85% de la varianza, y con $M = 4$ se alcanza el 93%. En contraste, para dominios con baja correlación espacial ($l_c/L = 0.2$), la tasa de recuperación de la varianza es considerablemente menor con el mismo número de parámetros aleatorios. A partir de estos resultados, se concluye que en medios menos correlacionados es necesario emplear un espacio paramétrico de dimensión mayor para lograr una representación apropiada de la incertidumbre espacial del campo de transmisividad.

5. CONCLUSIONES

El enfoque empleado en este trabajo permite modelar la incertidumbre de manera controlada y eficiente. El procedimiento se desarrolla mediante ajustes de los parámetros M y p en función de la correlación observada en el sistema l_c/L . La metodología desarrollada presenta un buen desempeño en la aproximación de la varianza de la cota piezométrica y resultó suficientemente adecuada en los problemas con altos coeficientes de correlación hidráulica, donde métodos tradicionales como las técnicas de perturbaciones o de Monte Carlo tienden a ser menos efectivos.

A partir de los experimentos numéricos realizados, se observa que el largo de correlación es un parámetro crucial en la determinación del número de términos adecuados para representar la incidencia de la incertidumbre en el campo aleatorio de transmisividad. Esto implica que, en dominios altamente correlacionados, el modelo permite reducir la dimensionalidad estocástica sin sacrificar precisión, optimizando así los recursos computacionales. Por el contrario, para relaciones l_c/L más pequeñas, es decir, cuando el campo presenta menor correlación espacial, se requiere un mayor número de parámetros aleatorios para alcanzar una buena aproximación de la varianza y capturar la variabilidad del campo estocástico.

REFERENCIAS

- Ackerer, P., Carrera, J., & Delay, F. (2023). Identification of aquifer heterogeneity through inverse methods. *Comptes Rendus Géoscience*, 355(S1), 45–58. <https://doi.org/10.5802/crgeos.162>
- Albarrán Ordás, A., & Zosseder, K. (2024). Estimation of 3 D hydraulic conductivity fields from fictive grain size distributions derived from 3 D geological modeling. *Hydrogeology Journal*, 32, 2121–2145.
- Babuška, I., Tempone, R., & Zouraris, G. E. (2004). Galerkin finite element approximations of stochastic elliptic partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(2), 800–825. <https://doi.org/10.1137/S0036142902418680>
- Carrera, J., & Neuman, S. P. (1986). Estimation of aquifer parameters under transient and steady state conditions: 2. Uniqueness, stability, and solution algorithms. *Water Resources Research*, 22(2), 211–227. <https://doi.org/10.1029/WR022i002p00211>
- Dagan, G. (1981). Analysis of flow through heterogeneous random aquifers by the method of embedding matrix: 1. Steady flow. *Water Resources Research*, 17(1), 107–122. <https://doi.org/10.1029/WR017i001p00107>

- Foster, S., Chilton, J., Nijsten, G., & Richts, A. (2013). Groundwater – a global focus on the ‘local resource’. *Current Opinion in Environmental Sustainability*, 5(6), 685–695. <https://doi.org/10.1016/j.cosust.2013.10.010>
- Freeze, R. A., & Cherry, J. A. (1979). *Groundwater*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Garreaud, R. D., Álvarez-Garretón, C., Barichivich, J., Boisier, J. P., Christie, D., Galleguillos, M., LeQuesne, C., McPhee, J., & Zambrano-Bigiarini, M. (2017). The 2010–2015 megadrought in central Chile: Impacts on regional hydroclimate and vegetation. *Hydrology and Earth System Sciences*, 21(12), 6307–6327. <https://doi.org/10.5194/hess-21-6307-2017>
- Gelhar, L. W. (1986). Stochastic subsurface hydrology from theory to applications. *Water Resources Research*, 22(9S), 135S–145S. <https://doi.org/10.1029/WR022i09Sp0135S>
- Ghanem, R. G., & Spanos, P. D. (1991). *Stochastic finite elements: A spectral approach*. New York, NY: Springer-Verlag.
- Gleeson, T., Befus, K. M., Jasechko, S., Luijendijk, E., & Cardenas, M. B. (2016). The global volume and distribution of modern groundwater. *Nature Geoscience*, 9, 161–167. <https://doi.org/10.1038/ngeo2590>
- Gotovac, H., Cvetković, V., & Andricević, R. (2009). Flow and travel time statistics in highly heterogeneous porous media. *Water Resources Research*, 45(7), W07402. <https://doi.org/10.1029/2008WR007168>
- Le Maître, O. P., & Knio, O. M. (2010). *Spectral Methods for Uncertainty Quantification, with Applications to Computational Fluid Dynamics*. Springer.
- Li, H., & Zhang, D. (2007). Probabilistic collocation method for flow in porous media: Comparisons with other stochastic methods. *Water Resources Research*, 43, W09409. <https://doi.org/10.1029/2006WR005673>
- Loaiciga, H. A., & Doh, R. (2023). Groundwater for people and the environment: A globally threatened resource. *Groundwater*, 62(1), e13376. <https://doi.org/10.1111/gwat.13376>
- McCarthy, M., Meier, F., Fatichi, S., Stocker, B. D., Shaw, T. E., Miles, E., Dussaillant, I., & Pellicciotti, F. (2022). Glacier contributions to river discharge during the current Chilean megadrought. *Earth's Future*, 10(10), e2022EF002852. <https://doi.org/10.1029/2022EF002852>
- Moreno Gómez, M., Ghysels, G., Mustafá, S. M. T., Six, S., & Vandenhede, A. (2025). Spatial variability of hydraulic conductivity of the Cretaceous aquifer in Belgium. *Journal of Hydrology: Regional Studies*, 60, Article 102462. <https://doi.org/10.1016/j.ejrh.2025.102462>
- Peeters, L. J. M., & Middlemis, H. (2022). Information guidelines explanatory note: Uncertainty analysis for groundwater modelling. Commonwealth of Australia, Department of Climate Change, Energy, the Environment and Water.
- Piticar, A. (2018). Changes in heat waves in Chile. *Global and Planetary Change*, 169, 234–246. <https://doi.org/10.1016/j.gloplacha.2018.08.007>
- Renard, P., & de Marsily, G. (1997). Calculating equivalent permeability: A review. *Advances in Water Resources*, 20(5–6), 253–278. [https://doi.org/10.1016/S0309-1708\(96\)00050-4](https://doi.org/10.1016/S0309-1708(96)00050-4)
- Rubin, Y. (2003). *Applied Stochastic Hydrogeology*. Oxford University Press.
- Sánchez-Vila, X., Guadagnini, A., & Carrera, J. (2006). Representative hydraulic conductivities in saturated groundwater flow. *Reviews of Geophysics*, 44(3), RG3002. <https://doi.org/10.1029/2005RG000169>

Schiavo, M. (2024). Numerical impact of variable volumes of Monte Carlo simulations of heterogeneous conductivity fields in groundwater flow models. *Journal of Hydrology*, 634, 131072. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2024.131072>

Shalimova, I. A., & Sabelfeld, K. K. (2017). Stochastic polynomial chaos expansion method for random Darcy equation. *Monte Carlo Methods and Applications*, 23(2), 101–110. <https://doi.org/10.1515/mcma-2017-0109>

Shamsudduha, M., & Taylor, R. G. (2020). Groundwater storage dynamics in the world's large aquifer systems from GRACE: Uncertainty and role of extreme precipitation. *Earth System Dynamics*, 11(3), 755–774. <https://doi.org/10.5194/esd-11-755-2020>

Stefanou, G. (2009). The stochastic finite element method: Past, present and future. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, 1031–1051. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.11.007>

Townley, L. R., & Wilson, J. L. (1985). Computationally efficient algorithms for parameter estimation and uncertainty propagation in numerical models of groundwater flow. *Water Resources Research*, 21(12), 1851–1860. <https://doi.org/10.1029/WR021i012p01851>

UNESCO. (2022). *The United Nations World Water Development Report 2022: Groundwater: Making the invisible visible*. UNESCO, World Water Assessment Programme. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000380721>

UN-Water. (2022). *Groundwater: Making the invisible visible - Factsheet on agriculture and industry*. United Nations Water. <https://www.unwater.org/publications/un-world-water-development-report-2022>

Valdés-Pineda, R., Valdés, J. B., Díaz, H. F., & Pizarro-Tapia, R. (2016). Analysis of spatio-temporal changes in annual and seasonal precipitation variability in South America—Chile and related ocean—atmosphere circulation patterns. *International Journal of Climatology*, 36(8), 2979–3001. <https://doi.org/10.1002/joc.4532>

Zhang, D., & Lu, Z. (2004). An efficient, high-order perturbation approach for flow in random porous media via Karhunen–Loève and polynomial expansions. *Journal of Computational Physics*, 194(2), 773–794.

Zhang, D., & Lu, Z. (2006). Stochastic uncertainty analysis for unconfined flow systems. *Water Resources Research*, 42(9), W09412. <https://doi.org/10.1029/2005WR004766>