

# PROBLEMA INVERSO PARA LA ECUACIÓN DE SHALLOW-WATER EN EL CONTEXTO GEOMORFOLÓGICO DEL RÍO BÍO-BÍO

Fernando Campos<sup>1</sup>, Mauricio Sepúlveda<sup>2</sup>, Rodrigo Abarca-del-Río<sup>3</sup>,  
Cristóbal Andrés Caro Ramírez<sup>4</sup>

<sup>1</sup>CI2MA, Universidad de Concepción - email: fcamposg@udec.cl

<sup>2</sup>CI2MA y Departamento de Ingeniería Matemática,  
Universidad de Concepción – email: maursepu@udec.cl,

<sup>3</sup>Departamento de Geofísica, Universidad de Concepción  
- email: rabarcadelrio.univ@gmail.com

<sup>4</sup>Facultad de Ciencias Ambientales, Universidad de Concepción  
-email: ccaro2017@udec.cl

8 de octubre de 2025

## RESUMEN

En este trabajo, se presenta un método para la identificación de parámetros en el sistema de ecuaciones de aguas poco profundas (Shallow Water). En particular, a partir de observaciones experimentales obtenidas por satélite mediante la plataforma SWOT se identifica la batimetría y coeficientes de fricción del suelo. El método consiste en la minimización de una función costo mediante un método de gradiente calculado en base al esquema numérico para el sistema de ecuaciones de Shallow Water unidimensional. En este caso consideramos un esquema de segundo orden usando limitadores de pendientes, y mediante un método de Lagrangiano, se obtiene un esquema adjunto lineal a 5-puntos asociado al esquema numérico de segundo orden. Por otro lado, y a fin de evitar errores de programación se utiliza la plataforma TAPENADE para el cálculo del esquema adjunto y del gradiente exacto de la función costo discretizada. A fin de testear la eficacia del método se utiliza como dato experimental, los resultados simulados en Dong y Fang Li (2019). y se compara el cálculo de gradiente con un método de secante simple. La comparación muestra que este método es preciso con errores relativos que no superan  $10^{-7}$ . Se testea la eficiencia del método la identificación de una batimetría simple con los datos experimentales de Dong y Fang Li (2019). El siguiente objetivo será utilizar este método en un escenario real de la cuenca del Bío-Bío con las observaciones satelitales.

## 1. INTRODUCCIÓN

El sistema de ecuaciones de aguas someras es ampliamente reconocido como un marco confiable para modelar la dinámica de ríos, lagos, océanos y humedales (Chow. V., 1964).

Sea  $A$  el área mojada de la sección transversal [ $m^2$ ], y  $Q$  el caudal [ $m^3/s$ ]. El sistema unidimensional de Saint-Venant describe el comportamiento hidráulico de un río mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\partial_t A + \partial_x Q &= 0, \\ \partial_t Q + \partial_x(Q^2/A) + gA\partial_x z &= -gAS_f(A, Q; K),\end{aligned}$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad [ $m/s^2$ ], y  $z$  es la elevación de la superficie del agua [ $m$ ], dada por  $z = b + h$ , con  $b$  representando la elevación del lecho del río (batimetría) y  $h$  la profundidad del agua, ambas en metros. El término  $S_f$  denota la pendiente de fricción, típicamente modelada como una función de  $A$ ,  $Q$  y un coeficiente de rugosidad  $K$ .

Recientemente, la misión SWOT (Surface Water and Ocean Topography), desarrollada por CNES y NASA, ha proporcionado mediciones globales de alta resolución de las características de la superficie fluvial, incluyendo elevación, ancho y pendiente de la superficie, con una precisión del orden de decímetros y alta frecuencia temporal. Estos avances ofrecen una oportunidad única para inferir la batimetría subyacente y calibrar parámetros del modelo, como los coeficientes de fricción, con una precisión sin precedentes.

Nuestro objetivo principal será emplear las medidas de SWOT en la desembocadura del río Bío Bío para poder hacer estimaciones de su batimetría. En este trabajo, se explica el marco teórico de la metodología que se utilizará y se muestran ejemplos numéricos simples para mostrar las posibilidades de este método. SWOT entrega información de los ríos por nodos, que están separados por aproximadamente 200 m. entre sí. En la Figura 1, se muestra el área que se quiere considerar, presentándose la posición de los nodos de SWOT y de la estación en la desembocadura.

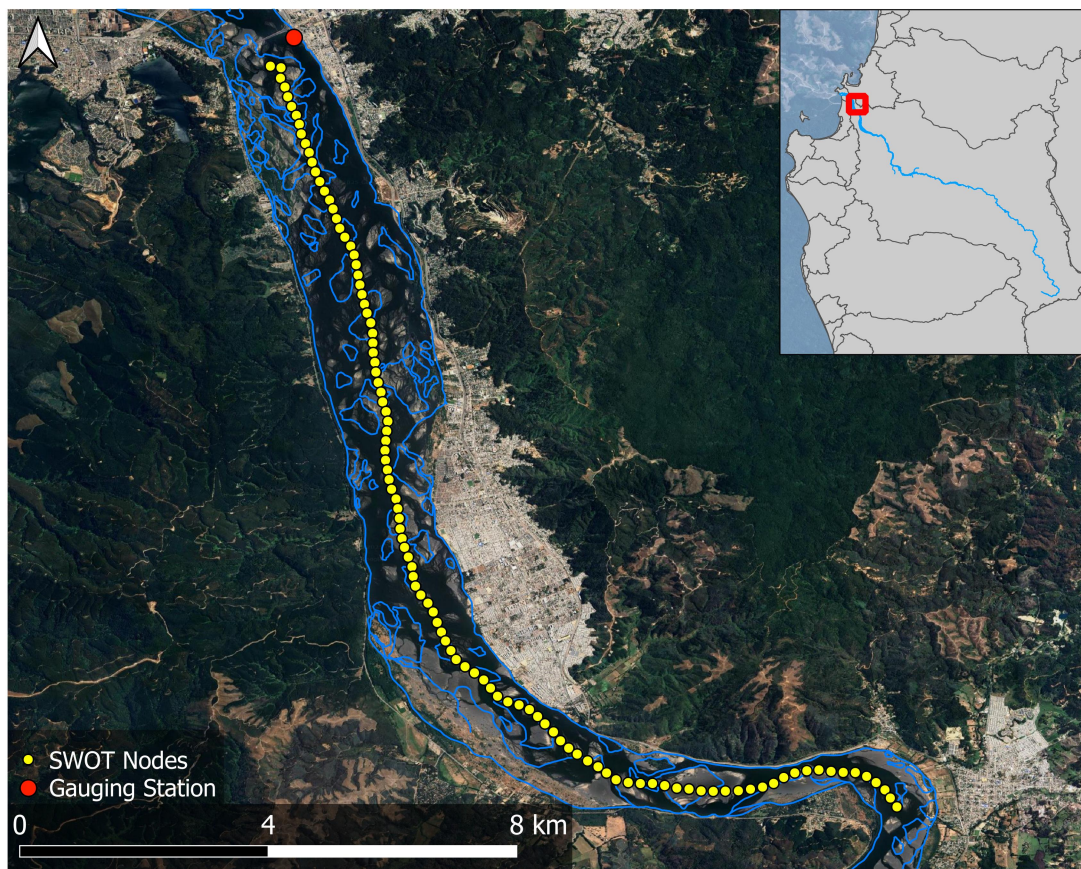


Figura 1: Mapa del área a considerar. Se muestran los nodos medidos por SWOT (SWOT Nodes) en amarillo y la estación en la desembocadura (Gauging Station) en rojo.

## Problema Inverso

El problema inverso consiste en: *"Determinar la batimetría del lecho del río y el coeficiente de fricción a partir de observaciones satelitales de la altura, el ancho y la pendiente de la superficie de la agua"*.

Varios estudios han abordado exitosamente el problema de identificación de parámetros y calibración de modelos. Por ejemplo, en Larnier et al. (2021), y en Oubanas et al. (2018), se aborda este mismo problema inverso, con el objetivo adicional de estimar el caudal aguas arriba (entrada). Los autores emplean técnicas de asimilación de datos, incorporando incertidumbres y matrices de covarianza en la funcional de costo a minimizar (como se describe en la Sección 1 de esta propuesta). Ambos estudios utilizan el paquete de software DassFlow para resolver el problema de optimización y aplican

el esquema de Preissmann para el problema directo.

En contraste, nuestro objetivo es emplear un esquema de volúmenes finitos bien balanceado de segundo orden descrito en Bouchut (2004), para el problema directo. Esta elección facilita la extensión a modelos bidimensionales, lo que nos permite abordar problemas inversos similares en lagos y, en particular, en humedales, donde la dinámica del agua interactúa con la actividad biológica. Para el modelo adjunto, proponemos utilizar la herramienta de diferenciación automática TAPENADE (ver Hascoet, L., y Pascual, V., 2013), debido a la complejidad de derivar analíticamente las ecuaciones adjuntas.

También cabe destacar que los trabajos en Larnier et al. (2021), y en Oubanas et al. (2018), se centran en ríos europeos como el Garona (Francia) y el Po (Italia). En cambio, el río Bío-Bío, ubicado en la Región del Bío-Bío en Chile, presenta características geomorfológicas distintivas: una cuenca hidrográfica extensa, un régimen hidrológico mixto con crecidas en invierno y primavera, y una longitud total de 380 *km* (ver Link et al., 2002). Además, el transporte de sedimentos en la desembocadura del río como se describe en Link et al (2002), puede influir significativamente en el modelo si tales procesos se incorporan en las ecuaciones que gobiernan el sistema.

## 2. METODOLOGÍA

### Problema directo

El problema directo consiste en resolver las ecuaciones de Shallow Water mediante un esquema de volúmenes finitos, dados ciertos parámetros de interés. Si se considera un área mojada de sección transversal rectangular de dimensiones constantes, el sistema de Saint-Venant en una dimensión se reduce a

$$\begin{aligned}\partial_t h + \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + gh\partial_x b &= S,\end{aligned}$$

donde  $u = Q/A$  es la velocidad del fluido [*m/s*] y  $S$  es el término de fricción. Para la fricción, consideramos la fórmula de Manning:

$$S = C|u|,$$

donde  $C$  está dada por

$$C = \frac{gm^2}{h^{1/3}},$$

y donde  $m$  es la constante de Manning. En la Figura 2, se presenta un gráfico con la representación física para las ecuaciones de Shallow Water.

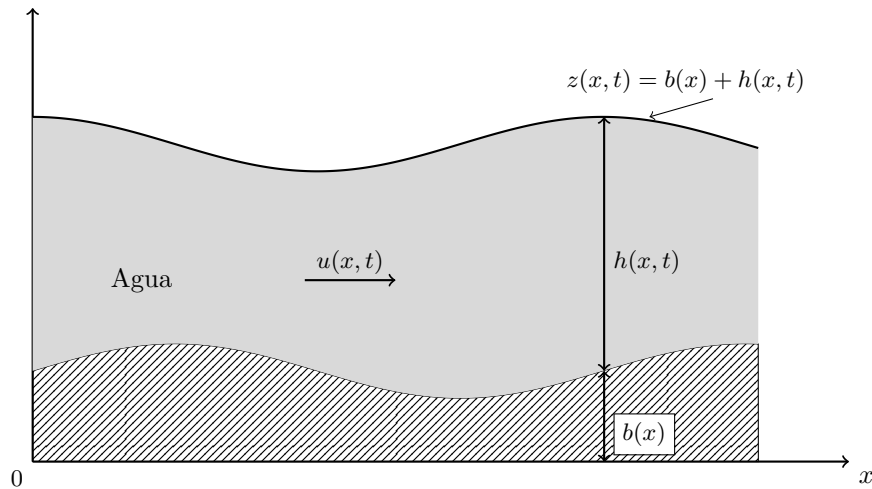


Figura 2: Esquema físico para las ecuaciones de Shallow Water.  $u$  es la velocidad del agua,  $b$  es la batimetría,  $h$  la profundidad de agua y  $z = b + h$  es la elevación de la superficie de agua.

Definiendo  $\hat{b} = gb$ , el sistema de ecuaciones de Shallow Water se puede re-escribir de la forma

$$\partial_t U + \partial_x(F(U)) + B(U)\partial_x \hat{b} = M(U)$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}, \quad B(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}, \quad M(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{gm^2 u |u|}{h^{1/3}} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Consideremos como dominio espacial unidimensional un intervalo  $I$  que se discretiza en una malla uniforme formada de celdas  $C_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ ,  $j = 1, \dots, N_x$ , de tamaño  $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ . Consideramos una discretización temporal  $t_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , con un paso temporal  $\Delta t$  dado por la condición CFL. Entonces, se tienen los valores discretos que aproximan el valor promedio de la solución en la celda

$$U_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} U(x, t_n) dx.$$

Se considera el siguiente esquema de volúmenes finitos

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2-} + F_{i-1/2+}), \quad (2)$$

donde  $F_{i+1/2-}$  y  $F_{i-1/2+}$  son los flujos numéricos a izquierda y a derecha, respectivamente. Para incorporar la batimetría en el esquema bien balanceado se emplea reconstrucción hidrostática como es propuesto en Bouchut (2004). Se tiene que

$$F_{i+1/2-} = F_l(U_i^n, U_{i+1}^n, \hat{b}_i, \hat{b}_{i+1}), \quad F_{i-1/2+} = F_r(U_i^n, U_{i+1}^n, \hat{b}_i, \hat{b}_{i+1})$$

donde

$$F_l(U_l, U_r, \hat{b}_l, \hat{b}_r) = \mathcal{F}(U_l^*, U_r^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{gh_l^2}{2} - \frac{g(h_l^*)^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$F_r(U_l, U_r, \hat{b}_l, \hat{b}_r) = \mathcal{F}(U_l^*, U_r^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{gh_r^2}{2} - \frac{g(h_r^*)^2}{2} \end{pmatrix}$$

Aquí,  $\mathcal{F}$  es un flujo numérico consistente para las ecuaciones de Shallow Water sin batimetría, y los estados reconstruidos  $U_l^* = (h_l^*, h_l^* u_l)$  y  $U_r^* = (h_r^*, h_r^* u_r)$  están dados por

$$h_l^* = \max(0, gh_l + \hat{b}_l - \hat{b}_s)/g$$

$$h_r^* = \max(0, gh_r + \hat{b}_r - \hat{b}_s)/g$$

con

$$\hat{b}^* = \max(\hat{b}_l, \hat{b}_r).$$

Como flujo numérico se considera el flujo HLL dado por

$$\mathcal{F}(U_l, U_r) = \begin{cases} U_l & \text{si } 0 < c_1, \\ \frac{c_2 U_r - F(U_r)}{(c_2 - c_1)} + \frac{-c_1 U_l + F(U_l)}{(c_2 - c_1)} & \text{si } c_1 < 0 < c_2, \\ U_r & \text{si } c_2 < 0, \end{cases}$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son estimaciones de la velocidad de onda dadas por  $c_1 = \min(u_l - \sqrt{gh_l}, u_r - \sqrt{gh_r})$  y  $c_2 = \max(u_l + \sqrt{gh_l}, u_r + \sqrt{gh_r})$ , y  $F(U)$  es la función de flujo dada en (1).

La condición CFL para el método está dada por

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\lambda_{max}},$$

donde  $\lambda_{max} = \max(\lambda_l, \lambda_r)$ , con  $\lambda_l = \max_i(u_i - \sqrt{gh_i})$  y  $\lambda_r = \max_i(u_i + \sqrt{gh_i})$ .

Para el término de fricción se emplea splitting según se propone en Dong y Fang Li (2019), teniendo

$$(hu)_i^{n+1} = \frac{(h_i^{n+1})^{7/3} (\widetilde{hu})_i^{n+1}}{(h_i^{n+1})^{7/3} + \Delta t g m^2 |(\widetilde{hu})_i^{n+1}|},$$

donde  $h_i^{n+1}$  y  $(\widetilde{hu})_i^{n+1}$  se obtiene del esquema (2).

También se consideró un esquema de segundo orden mediante limitadores de pendiente y splitting para la discretización temporal, como también se ha desarrollado en Bouchut (2004). Se programó tanto el esquema de primer orden como el de segundo orden en Fortran, comparándose los resultados con los de Dong y Fang Li (2019), como se muestra en la siguiente sección.

Mediante estos esquemas de volúmenes finitos, se tienen modelos que resuelven las ecuaciones de Shallow Water unidimensional, entregando valores discretos que aproximan los valores promedios de la profundidad de agua y del caudal en las celdas de la malla. Estos valores se pueden emplear para definir una función de costo que incluya observaciones como las entregadas por SWOT. La solución numérica dada por el modelo directo depende de los parámetros del modelo, entre los que están el coeficiente de fricción y la batimetría.

La función de costo a utilizar dependerá de los datos disponibles. Basándose en los datos disponibles de SWOT, una posible función de costo sencilla sería

$$J(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |z_{obs} - z_i|^2,$$

donde  $z = b + h$  es el nivel de agua obtenido con el método del problema directo en un tiempo  $T$  y  $z_{obs}$  son las medidas del nivel de agua observadas por SWOT para ese tiempo. La función  $J$  mide la diferencia entre la solución numérica dada por el problema directo y las observaciones.  $v$  es el vector de control, esto es, los parámetros que se desean determinar. Para este problema, nos ha interesado tomar como  $v = (b_1, \dots, b_{N_x})$ , la batimetría en la discretización del esquema de volúmenes finitos. Otro problema de interés es tomar  $v = m$  para determinar la constante de fricción de Manning.

El objetivo es resolver el siguiente problema de optimización:

$$\min_v J(v).$$

Es decir, hallar los valores de  $v$  que minimizen la función de costo  $J$ . Al resolver este problema, se puede estimar de los datos medidos los parámetros reales (fricción o batimetría).

## Método adjunto

Para resolver el problema de optimización, se usa un método de máximo descenso, el cual requiere del gradiente de  $J$  respecto a  $v$ . Para obtener el gradiente de manera eficiente, se usa la herramienta de diferenciación automática TAPENADE, la cual entrega el adjunto del programa que resuelve el problema directo mediante el esquema de volúmenes finitos.

Sea  $V$  el espacio de parámetros (o de variables de control) e  $Y$  el espacio de llegada del modelo directo, que denominamos espacio de estados. En el caso analizado,  $v \in V$  será  $v = (b_1, \dots, b_{N_x})$  o  $v = m$ , e  $y = U_i^n = (h_i^n, (hu)_i^n) \in Y$ ,  $i = 1, \dots, N_x$ ,  $n \in \mathbb{N}$  es la solución numérica del problema directo mediante el esquema de volúmenes finitos. Entonces, el problema directo puede ser escrito como:

$$\begin{cases} \text{Dado } v \in V, \text{ hallar } y \in Y \text{ tal que} \\ e(v, y) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

donde  $e$  representa las ecuaciones dadas por el esquema de volúmenes finitos considerado. Para el problema de optimización, se puede considerar el sistema (3) como una restricción, lo que sugiere considerar el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}(v, y, \lambda) = J(v) + \langle e(v, y), \lambda \rangle$$

donde  $\lambda$  son los multiplicadores de Lagrange o variable adjunta de  $y$ . Entonces, se tiene  $\forall \partial x \in E$

$$\langle \nabla J, \partial v \rangle_V = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v}(v, y^v, \lambda^v) \partial x$$

donde  $y^v$  es la solución del problema directo (3) dado  $v \in V$  y  $\lambda^v$  es la solución del problema adjunto

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(v, y^v, \lambda^v) \partial y = 0, \quad \forall \partial y \in Y.$$

Así, se puede obtener el gradiente de  $J$  explícitamente mediante el problema adjunto. Observamos que cuando el número de parámetros es muy grande, este método permite calcular de manera eficiente el gradiente  $J$ , ya que la resolución del problema adjunto es independiente del número de parámetros.

Para evitar errores en la programación del esquema adjunto, se usó TAPENADE, que es una herramienta de diferenciación automática. Se corrieron test para verificar la precisión de este programa para obtener el gradiente de la función costo, obteniéndose resultados satisfactorios. De esta manera, se puede emplear un método de minimización, como L-BFGS, para resolver el problema inverso.

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Se verificó el método de primer y segundo orden con los ejemplos experimentales que se muestran en Dong y Fang Li (2019). Se presentan los resultados para el esquema de primer orden, los de segundo orden son similares. Se observa que concuerdan con los resultados obtenidos en el paper.

Primero, se consideró flujo sobre una superficie con pendiente. Se toma el intervalo espacial  $[0, 2.5]$ . La batimetría está dada por

$$b(x) = -0.01(x - 2.5).$$

y la altura inicial está dada por

$$h(x, 0) = \begin{cases} 1.2h_0, & \text{si } 1 \leq x \leq 1.25, \\ h_0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $h_0 = 0.09564$ . La condición inicial es  $hu(x, 0) = 0.1$ , y el coeficiente de Manning es  $m = 0.02$ . Las condiciones de borde son  $hu(0, t) = 0.1$  y  $h(2.5, t) = h_0$ . Los resultados se muestran en las Figuras 3 a 5. Se observa que la perturbación se mueve a la derecha y cambia su forma hasta dejar el dominio, llegándose a un estado estacionario después de un largo período de tiempo. Este comportamiento concuerda con lo presentado en Dong y Fang Li (2019).

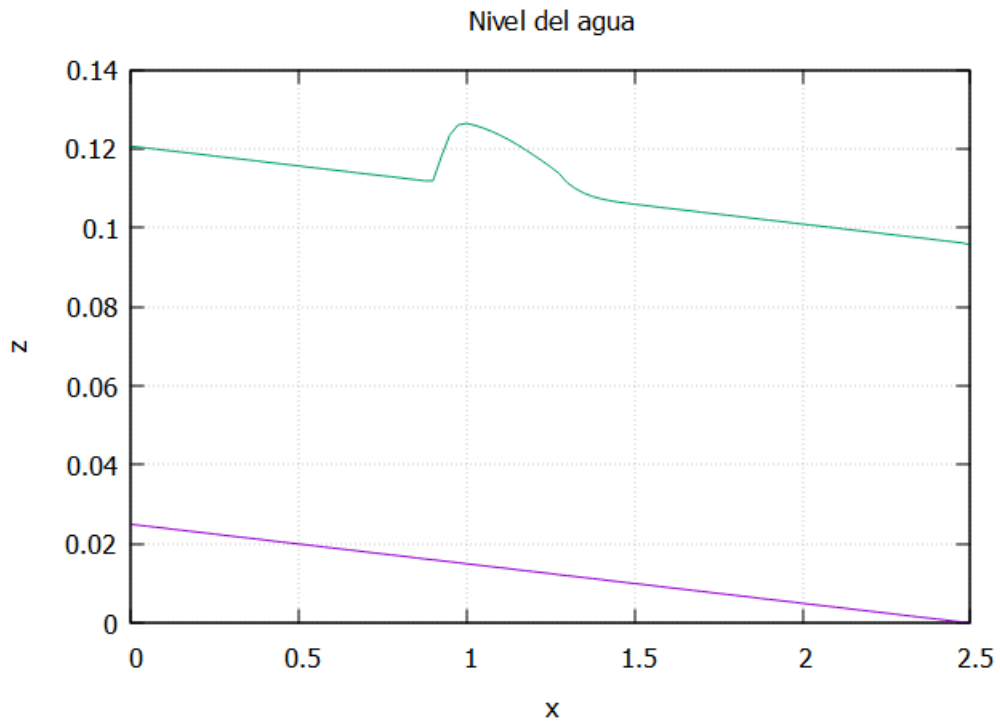


Figura 3: Solución para  $t = 1.0$  s.

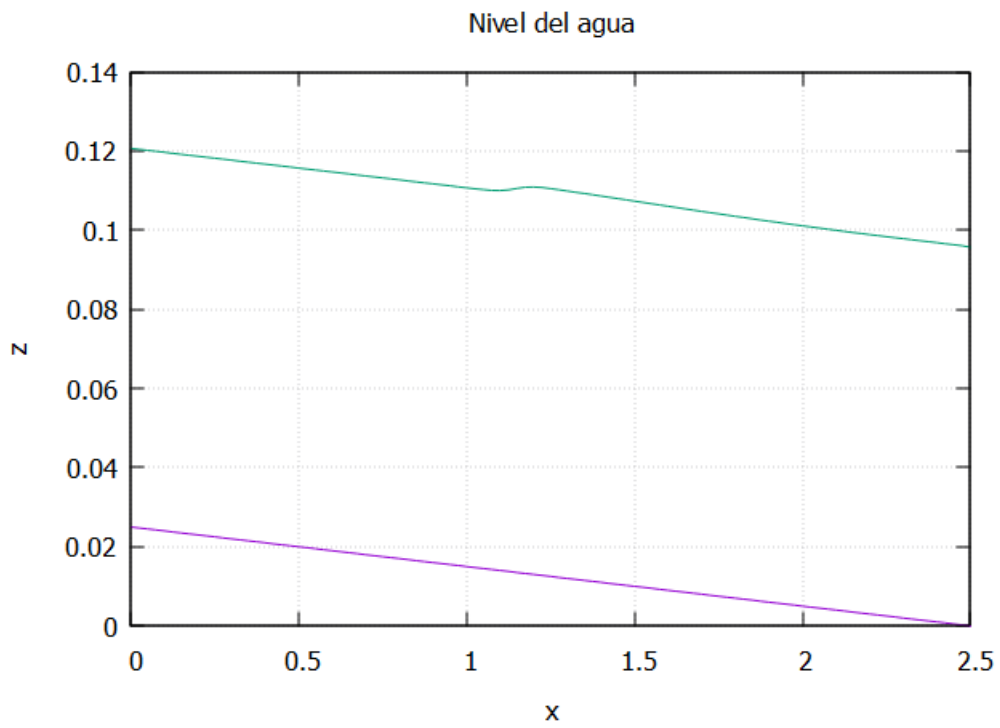


Figura 4: Solución para  $t = 10.0$  s.

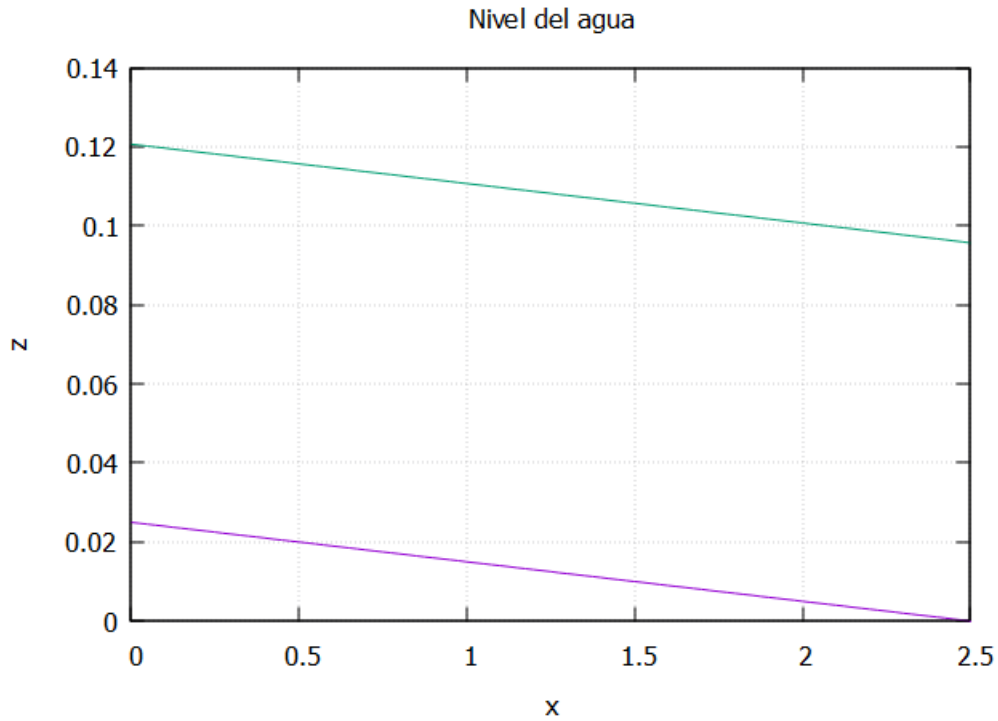


Figura 5: Solución para  $t = 100.0$  s.

Luego, se analizó un problema con la misma batimetría, pero con otros parámetros y condiciones. Se consideró  $h_0 = 0.02402$ . Se tomó como condición inicial de  $hu(x, 0) = 0.002$  y un coeficiente de Manning  $m = 0.1$ . Las condiciones de borde son  $hu(0, t) = 0.002$  y  $h(2.5, t) = h_0$ . Los resultados se muestran en las Figuras 6 a 8. Se observa que la forma de la propagación de la perturbación es distinta a la del primer ejemplo y que finalmente deja el dominio. Después de un largo tiempo, el flujo converge a un estado estacionario. De nuevo, estos resultados se condicen con lo obtenido en Dong y Fang Li (2019).

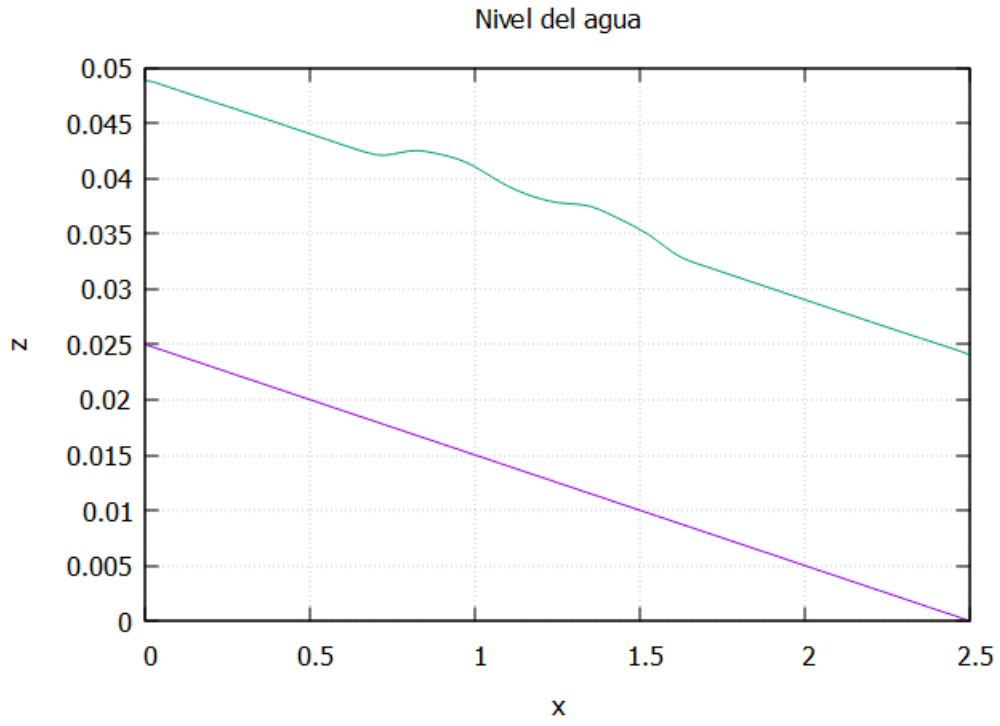


Figura 6: Solución para  $t = 0.5$  s.

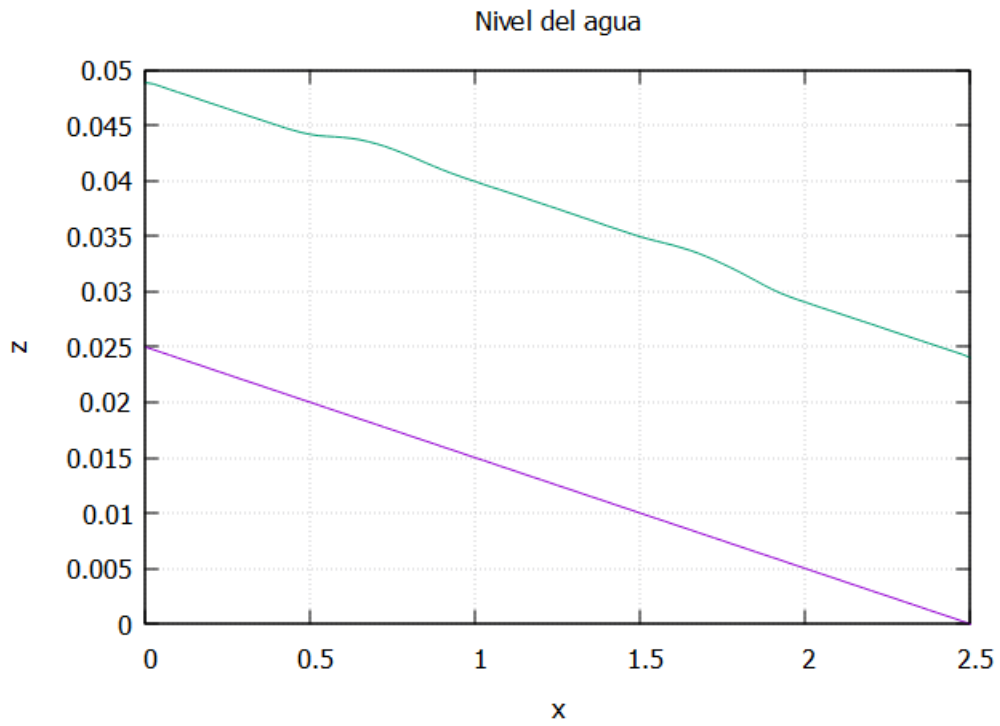


Figura 7: Solución para  $t = 1.0$  s.

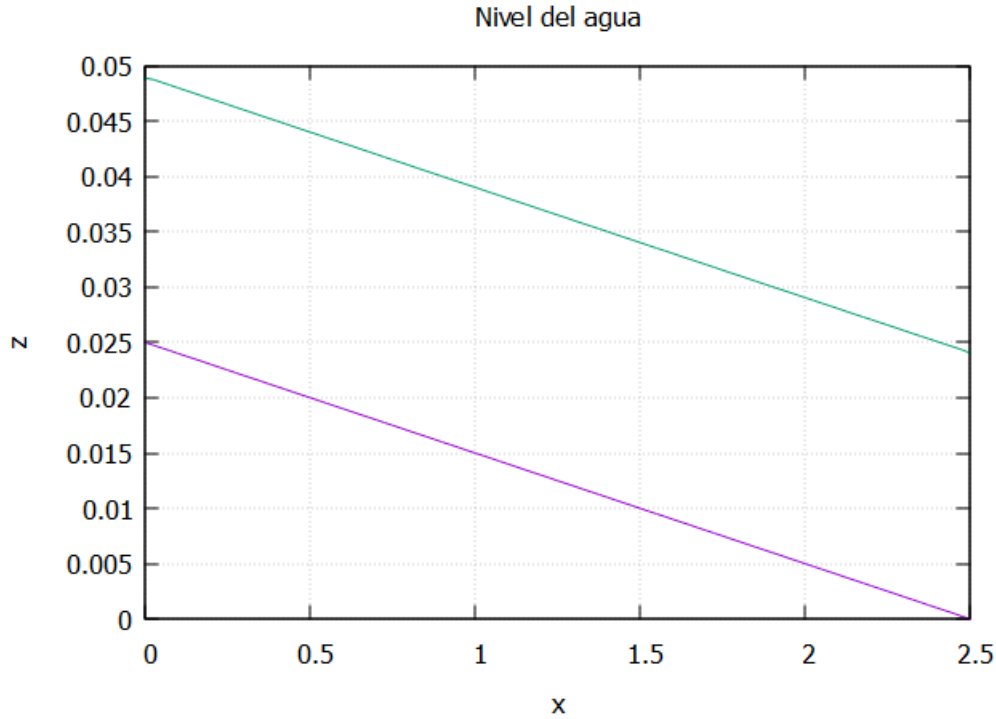


Figura 8: Solución para  $t = 100.0$  s.

Ahora, se procede a presentar un test que se realizó para verificar la precisión de TAPENADE en calcular el gradiente de la función de costo mediante el esquema adjunto. En términos prácticos, se tiene un código (que en nuestro caso fue escrito en el lenguaje de programación Fortran) que recibe unos parámetros (vector de control  $v$ ) y entrega la función costo  $w = J(v)$  asociada a la solución del problema directo con esos parámetros. Para obtener el gradiente  $\nabla J$  se puede emplear el modelo tangente lineal. Dada una variación  $\partial v$  en el vector de control, este modelo entrega la variación lineal  $\partial w$ . Esto es, si  $v = (v_1, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^p$ , entonces

$$\partial w = \nabla J \partial v = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial v_1} & \frac{\partial J}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial J}{\partial v_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial v_1 \\ \partial v_2 \\ \vdots \\ \partial v_p \end{pmatrix}$$

TAPENADE puede entregar el modelo tangente lineal del código del programa para el problema directo. Así, corriendo este programa para el  $i$ -ésimo vector canónico  $e_i = (0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0)$  (vector unitario con 1 en posición  $i$ ) para  $i = 1, \dots, p$  se pueden obtener las componentes del gradiente de  $J$ .

Una forma más eficiente de obtener el gradiente es usar el modelo adjunto que TAPENADE también entrega. Dada una variación  $\partial w^*$ , este programa entrega el gradiente del programa directo mediante la traspuesta del producto del jacobiano de  $J$  con  $\partial w^*$ . Se tiene

$$\begin{pmatrix} \partial v_1^* \\ \partial v_2^* \\ \vdots \\ \partial v_p^* \end{pmatrix} = \nabla J^* \partial w^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial v_1} \\ \frac{\partial J}{\partial v_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial v_p} \end{pmatrix} \partial w^*$$

Así, corriendo el programa con  $\partial w^* = 1$ , se obtiene inmediatamente el gradiente de  $J$ .

En la Figura 9 se muestra el resultado del test que se empleó para comprobar la precisión del gradiente obtenido con el modelo adjunto dado por TAPENADE para la función de costo respecto a

la batimetría. Se consideró el primer ejemplo numérico de esta sección. El esquema que se utilizó fue el de primer orden. La función de costo considerada fue

$$J(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_x} z_i^2,$$

donde  $v = (b_1, \dots, b_{N_x})$ , la batimetría del problema en los puntos de la discretización del esquema numérico. Aquí,  $z_i = h_i + b_i$ , donde  $h_i, i = 1, \dots, N_x$  es la solución numérica entregada por el esquema de volúmenes finitos para  $T = 100$  segundos. Para comparar, se realizó una aproximación por diferencias finitas, dada por

$$(\nabla J)_i \approx \frac{J(v + \varepsilon e_i) - J(v)}{\varepsilon}.$$

Se consideró  $\varepsilon = 10^{-7}$  para esta aproximación.

En la Figura 9, los puntos representan los valores del gradiente en los puntos para la batimetría dados por el modelo adjunto y el modelo lineal tangente, ambos entregados directamente por TAPE-NADE. La línea continua es la aproximación del gradiente obtenida por diferencias finitas. Vemos que los resultados son muy cercanos. En la práctica se tuvieron errores del orden de  $10^{-7}$  a  $10^{-9}$ .

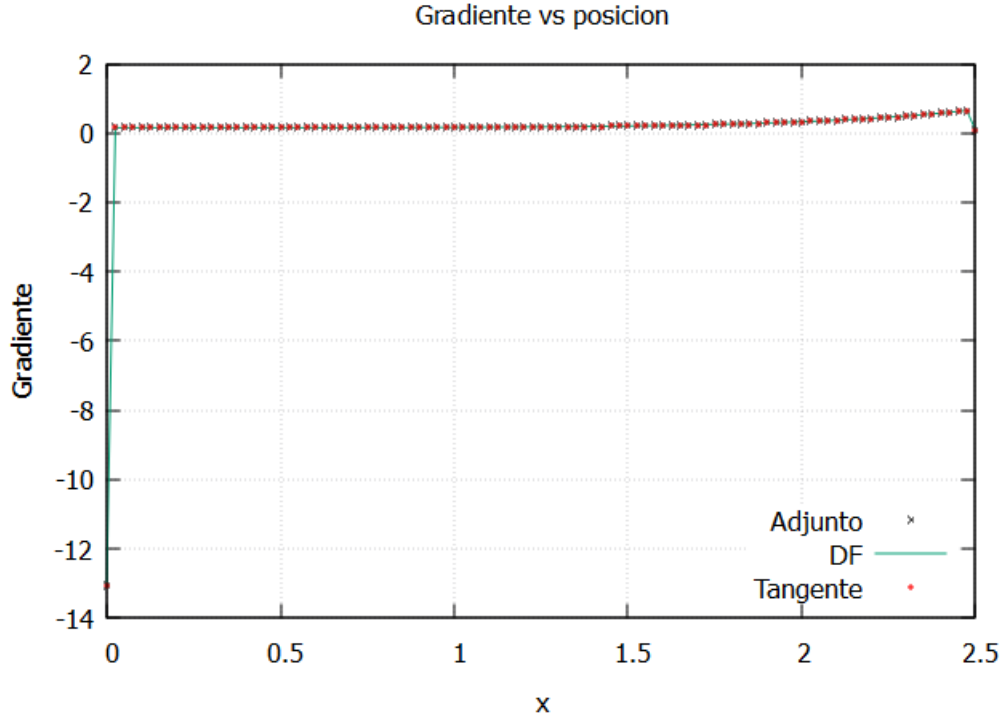


Figura 9: Gradiente de la función de costo respecto a los puntos de la batimetría obtenidas con el modelo adjunto, tangente lineal y aproximación por diferencias finitas (DF).

A continuación, se presenta la aplicación de este método para la estimación de batimetría en un caso sencillo. Para ello, se considera el segundo ejemplo numérico de esta sección. La estimación se realizará mediante el esquema de volúmenes finitos de primer orden, empleando una malla de  $N_x = 100$  elementos y tomando como tiempo final  $T = 0.5$  segundos. La función de costo fue

$$J(v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_x} |z_{obs} - z_i|^2,$$

El objetivo es estimar la batimetría en los puntos de discretización del método numérico. Para definir las observaciones  $z_{obs}$ , se empleó los resultados de nivel de agua obtenidos por el método

de volúmenes de primer orden para  $T = 0.5$  segundos con la batimetría real (ver Figura 5). Así, la función objetivo entrega la diferencia entre los resultados con la batimetría real y la batimetría considerada. Minimizando esta función, se llega a una aproximación de la batimetría exacta. El método de optimización empleado fue L-BFGS-B y el cálculo del gradiente de  $J$  para este método se realizó mediante el esquema adjunto dado por TAPENADE. Como batimetría inicial para el método de optimización se consideró  $b(x) = 0, \forall x \in [0, 2.5]$ . En la Figura 10, observamos que los resultados de la batimetría estimada concuerdan de buena forma con la batimetría real.

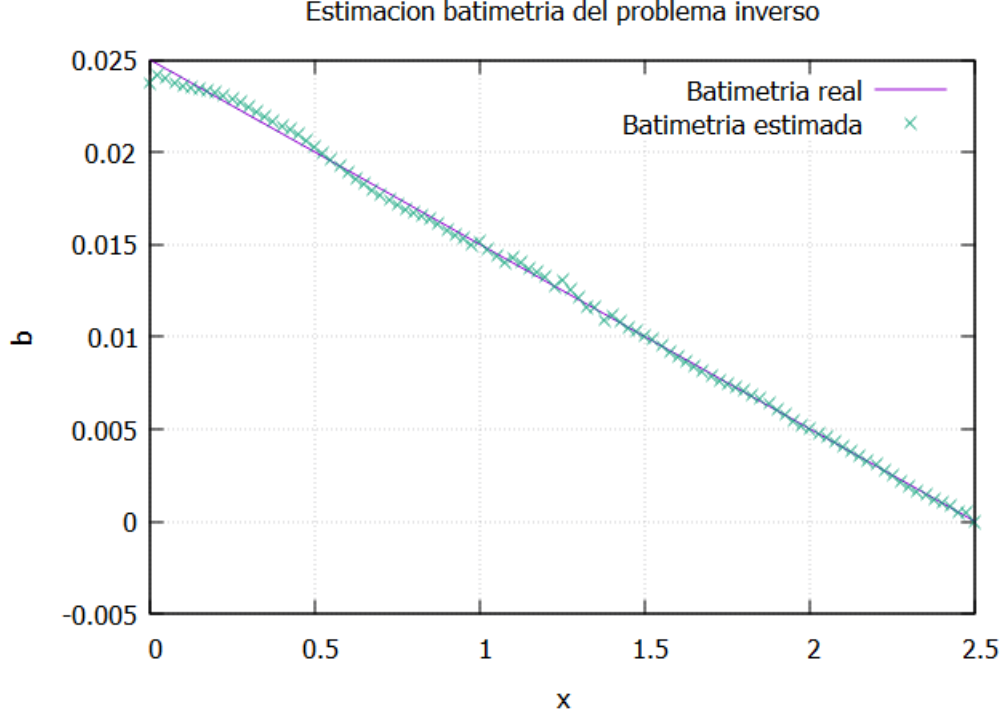


Figura 10: Batimetría real y batimetría estimada mediante método de optimización L-BFGS-B.

Ahora, presentamos otro ejemplo simple de estimación de batimetría. Se considera una malla de  $N_x = 250$  elementos. Se considerará un ejemplo presentado en Bouchut (2004). El dominio es  $[0, 25]$  y la batimetría está dada por

$$b(x, 0) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2, & \text{si } 8 \leq x \leq 12, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La altura inicial es  $h(x, 0) = 0.33$  y la velocidad inicial es  $u(x, 0) = 0.18/0.33$ . Las condiciones de borde son  $hu(0, t) = 0.18$  y  $h(25, t) = 0.33$ . Se considera que no hay presencia de fricción ( $m = 0$ ). El método a utilizar como problema directo fue el esquema de volúmenes finitos de primer orden.

El vector de control es  $v = (b_1, \dots, b_{N_x})$ . Para la función de costo, no se considerará observaciones en un sólo tiempo, sino que se tomarán observaciones para distintos tiempos  $T_j$ , con  $j = 1, \dots, N_T$ . En este caso, tomaremos  $N_T = 3$  y  $T_1 = 1, T_2 = 2$  y  $T_3 = 3$ , en segundos. Así, la función de costo será

$$J(v) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_T} \sum_{i=1}^{N_x} |z_{obs}^{(j)} - z_i^{(j)}|^2,$$

donde  $z_i^{(j)}$  y  $z_{obs}^{(j)}$  son los resultados del esquema numérico y las observaciones para  $T_j$ , respectivamente. De forma análoga al ejemplo anterior, emplearemos los niveles de agua  $z$  obtenidos mediante el método de volúmenes finitos con la batimetría real como observaciones. Para el método de optimización L-BFGS-B, se utilizó como batimetría inicial  $b(x) = 0, \forall x \in [0, 25]$ . Los resultados se muestran en la Figura 11. Se observa que la batimetría estimada se corresponde bastante bien con la batimetría

real. Destacar que agregar información de varios tiempos ayuda con la precisión del método. Por esto, una mayor cantidad de observaciones ayuda a mejorar las estimaciones de los parámetros.

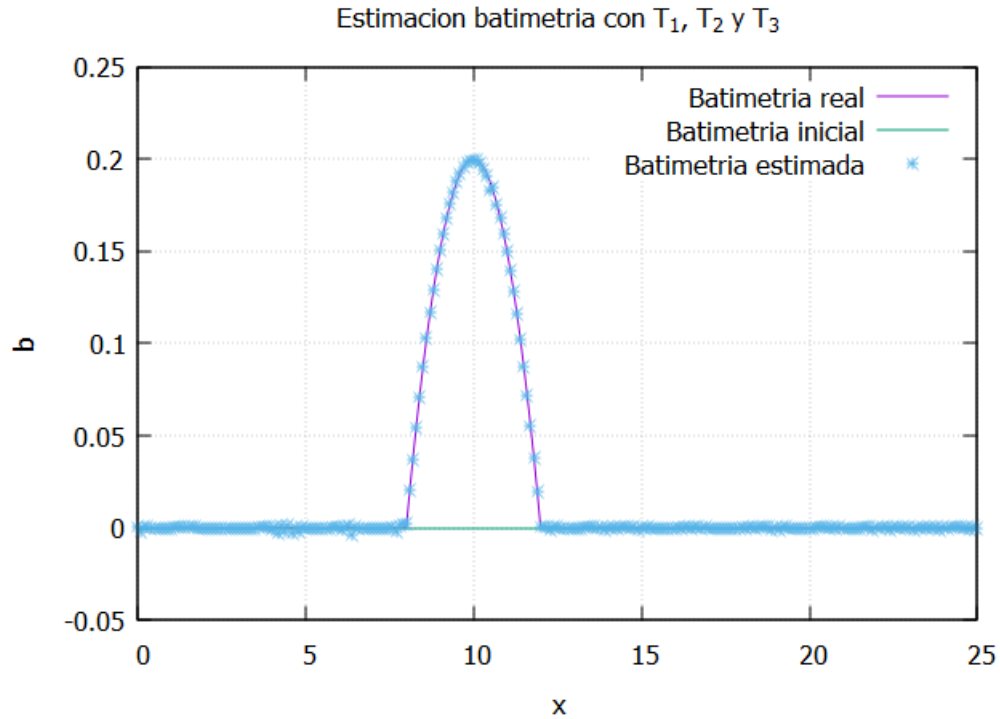


Figura 11: Batimetría real y batimetría estimada mediante método de optimización L-BFGS-B. Función de costo incluye observaciones para  $T_1 = 1$  s,  $T_2 = 2$  s y  $T_3 = 3$  s.

## 4. TRABAJO A FUTURO

Teniendo una forma precisa y eficiente de obtener el gradiente de la función de costo, se puede emplear un método de máximo descenso como L-BFGS para resolver el problema de minimización y estimar el parámetro de interés de los datos reales obtenidos por SWOT. Se propone testear este método en situaciones manufacturadas para validación y luego aplicarlo en una situación real como el río Bío-Bío. Destacar que la generalidad del método permita a adaptarlo a otras ecuaciones que describan las características particulares del problema real, para obtener así estimaciones más útiles a las condiciones reales presentes.

## AGRADECIMIENTOS

Se agradece el financiamiento de Fondecyt 1220869 y del proyecto BASAL FB210005, CMM, Universidad de Chile.

## ANEXO

Tabla de definiciones			
Símbolo	Definición	Unidad de medida	Fórmula
$A$	Área mojada de sección transversal	$m^2$	
$Q$	Caudal	$m^3/s$	
$g$	Aceleración de gravedad	$m/s^2$	
$h$	Profundidad del agua	$m$	
$b$	Batimetría (topografía del lecho del río)	$m$	
$z$	Elevación de la superficie del agua	$m$	$z = h + b$
$u$	Velocidad del agua	$m/s^2$	$u = Q/A$
$m$	Coefficiente de Manning	$s/m^{1/3}$	

## REFERENCIAS

Bouchut F. (2004). Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources. Front. Math. Birkhäuser Verlag, Basel, viii+135 pp.

Chow. V. (1964). Handbook of applied hydrology. New York: McGraw-Hill Book; 1467.

Hascoet, L., y Pascual, V. (2013). The Tapenade automatic differentiation tool: Principles, model, and specification ACM. Transactions on Mathematical Software (TOMS), 39(3), Article No.: 20, 1-43

Larnier, K., Monnier, J. Garambois, P.-A., y Verley J. (2021). River discharge and bathymetry estimation from SWOT altimetry measurements, Inverse Problems in Science and Engineering, 29:6, 759-789.

Link, O., Cecioni, A., Duyvestein, A., Vargas, J. (2002). Hydrology of the Bío-Bío River. Zeitschrift fur Geomorphologie, Supplementband, 129, 31-39

Oubanas, H., Gejadze, I., Malaterre, P.-O., Mercier, F. (2018). River discharge estimation from synthetic SWOT-type observations using variational data assimilation and the full Saint-Venant hydraulic model. Journal of Hydrology 559, 638–647.

Dong J., Fang Li D. (2019) A reliable second-order hydrostatic reconstruction for shallow water flows with the friction term and the bed source term. Journal of Computational and Applied Mathematics 376, 1-16.