



**Revista de la Sociedad Chilena
de Ingeniería Hidráulica**



ISSN 0716-3746 Volumen 38 Número 2, 2023

REVISTA DE LA
SOCIEDAD CHILENA DE
INGENIERÍA HIDRÁULICA

SOCHID

Sede Instituto de Ingenieros de Chile – San Martín 352 – Fono 2 2698 4028 – Santiago CHILE

Revista de la Sociedad Chilena de Ingeniería Hidráulica

ISS 0716-3746

Volumen 38, Número 2, 2023

DIRECTORIO SOCHID

Presidente: Hernán Alcayaga S.
Vicepresidenta: Pamela Muñoz
Tesorero: Damaris Orphanópoulos S.
Directores: Karla González N.
Cristián Núñez R.
Aldo Tamburrino T.
Secretario General: Francisco Romero B.

DIRECTORES HONORARIOS

Francisco J. Domínguez S. (Q.E.P.D.)
Horacio Mery M.
Eduardo Varas C.
Sergio Radrigán V.
Humberto Peña T.
Ernesto Brown F. (Q.E.P.D.)
Bonifacio Fernández L.
Jorge Bravo S
Luis Ayala R.
Ludwig Stowhas B.
Ricardo González V.
José Vargas B.
Luis Estellé A.
Raúl Demangel C.

EDITOR DE LA REVISTA

Aldo Tamburrino Tavantzis
atamburr@ing.uchile.cl
San Martín 352, Santiago
Fono 2 2698 4028
www.sochid.cl

Imagen de la portada: Diseño usado en el primer número de la Revista en 1986

REVISTA DE LA SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

ÍNDICE

Editorial	1
Columna de Opinión: Extracción de áridos y sostenibilidad Scarlett Vásquez Paulus	3
Distribución fractal de la nieve en los andes extratropicales Pablo A. Mendoza, Thomas Shaw, James Mcphee, Shelley Macdonell	5
Un nuevo modelo para flujos granulares densos Rodolfo Morales, Aldo Tamburrino, Sergio Palma	23
Hidro-Grafía Aldo Tamburrino Tavantzis	45

EDITORIAL

Damos la bienvenida a la ingeniera Pamela Muñoz, quien se ha incorporado como Directora de la SOCHID en reemplazo del ingeniero Cristián Escauriaza, por haber cumplido el periodo por el que fue elegido.

Se acerca el XXVI Congreso Chileno de Ingeniería Hidráulica, a desarrollarse los días 18, 19 y 20 de octubre en Valdivia, organizado por primera vez por la Universidad Austral y en formato presencial. La convocatoria ha sido todo un éxito y se han recibido más de 90 artículos, los que están siendo revisados por el Comité Científico del Congreso.

En este segundo número de la Revista para el año 2023, además de una Columna de Opinión que se refiere a la sostenibilidad de la industria de extracción de áridos, tenemos un artículo relativo a la estructura autosimilar de la cobertura nival en los Andes extratropicales. Un segundo artículo presenta un modelo analítico de flujos granulares densos, aplicado a tres casos muy distintos y cuyos resultados se comparan con datos experimentales.

Como ya es costumbre, la Revista termina con la sección Hidro-Grafía y extendiendo una cordial invitación a todos quienes están interesados en las distintas áreas de la ingeniería hidráulica para que colaboren con artículos y opiniones. Por último, agradeceremos la difusión de la Revista, cuyos números anteriores pueden descargarse del sitio web de la SOCHID, www.sochid.cl/publicaciones-sochid/revista-sochid/

Aldo Tamburrino Tavantzis
Editor

COLUMNA DE OPINIÓN

EXTRACCIÓN DE ÁRIDOS Y SOSTENIBILIDAD

La extracción de áridos es una actividad esencial para el desarrollo del país pues provee el principal insumo para la construcción de infraestructura. A su vez, el sector de la construcción es un motor fundamental para la reactivación económica, prioritaria para el país después de la crisis sanitaria y social vivida en los últimos años, además de los efectos del cambio climático a través de incendios y posteriores crecidas de gran intensidad que este año 2023 impactaron fuertemente la infraestructura crítica de Chile. Los esfuerzos y recursos impulsados desde el Estado para fortalecer este sector debiesen ser acompañados de una estrategia que permita avanzar hacia un desarrollo sostenible de la infraestructura que incorpore de manera conjunta la dimensión ambiental, económica, social e institucional.

Esto nos desafía a tener una mirada ambiciosa y de futuro respecto a la extracción de áridos, haciéndonos cargo del destino de los residuos generados por la industria de la construcción y que corresponden a 6,8 MM de toneladas al año, de las cuales un 70% son áridos (Fundación Chile, 2020). A su vez, la no reutilización de este material implica un gasto para las constructoras de más de 50 mil millones de pesos al año (sólo en áridos que son desperdiciados como residuos) y un incentivo a su extracción ilegal para suplir la demanda no cubierta por las plantas formales, las que tienen capacidad para proveer 4 millones de metros cúbicos por año mientras que la demanda es de 11 millones al año (Construye 2025, 2019).

Respecto de la fuente del recurso, la extracción de áridos desde los cauces de los ríos afecta su equilibrio sedimentológico. El río tiende a reequilibrar su pendiente depositando material nuevo en la sección intervenida, generándose un desbalance respecto del material transportado. Este efecto puede ser más o menos generalizado, impactando fuertemente en ecosistemas, amenazando la biodiversidad e incluso a la infraestructura relacionada con el cauce, como cepas de puentes o bocatomas, junto con una disminución del aporte de sedimentos a la zona costera. Por otro lado, la producción de sedimentos está lejos de ser regular e infinita como se insinuaba hace no tantos años: depende de las precipitaciones y particularmente de los eventos extremos, en los que además se han evidenciado efectos derivados del cambio climático, en la cantidad, intensidad y frecuencia de la precipitación.

La sostenibilidad en la industria de los áridos requiere de una mirada estratégica. La extracción de áridos debe formar parte de la planificación territorial, de manera de considerar potenciales conflictos con otras actividades, definición de usos de las tierras, y, a raíz de lo mismo, el poder recomendar aquellas áreas aptas para la extracción y disuadir el uso de otras. A su vez, se podría definir zonas de extracción que consideren la distancia hacia futuras zonas de desarrollo inmobiliario. El agua, el polvo, los ruidos y las emisiones relacionadas con el

transporte deben minimizarse si se tiene la intención de que una cantera logre una huella ambiental pequeña, considerando además su correcto cierre una vez que ha cumplido su vida útil.

La propia dinámica de los ríos determina que los planes territoriales deben estar relacionados con las cuencas hidrográficas, y las entidades que definan los contenidos de dichos planes naturalmente deben estar constituidas intersectorialmente e idealmente ser lideradas por los Gobiernos Regionales, incluyendo por cierto a los futuros consejos de cuenca u organismos locales equivalentes. La fiscalización correspondiente también debiese responder a esta gobernanza, junto con otros instrumentos como, por ejemplo, una certificación de origen que apoye el control de la extracción.

Actualmente se está tramitando una nueva ley de áridos, pero lamentablemente esta no ha incorporado en ninguna parte la planificación del territorio ni una gestión acorde a esa lógica, manteniendo la concepción fragmentada, absolutamente sectorial y centralizada que ha prevalecido históricamente en este campo. Pese a ello, la elaboración de los planes sectoriales y regionales de adaptación y mitigación del cambio climático mandados en la Ley Marco de Cambio Climático, representa una oportunidad importante de incorporar esta actividad en la planificación territorial, entendiendo que la adaptación no pasa sólo por la incorporación del concepto de economía circular respecto de los residuos de la construcción, sino que es fundamental, además, considerar el lugar desde dónde se extraen los áridos, ya que las dinámicas de cada río son únicas y también sus afectaciones; por lo mismo, es necesario estudiarlas integralmente. Por el contrario, la definición de lugares de extracción a partir de descripciones generales en que se indiquen determinados períodos de retorno o algunas centenas de metros de resguardo a las intervenciones y estudios fluviales acotados, resultan ser muy insuficientes considerando el actual nivel de conocimiento, profesionales y herramientas tecnológicas de las que dispone nuestro país.

Por otra parte, esta planificación debe ir de la mano de políticas públicas que dinamicen el sector, fomentando la economía circular en los áridos e incentivando el uso de tecnologías ya existentes y que poseen mercados ampliamente desarrollados en Europa producto del impulso importante que generaron las políticas que emergieron de la mano de la Directiva Marco del Agua de la UE del año 2002.

El desafío es grande y queda un largo camino por recorrer en este tema, pero si no comenzamos de manera decidida ahora, el costo de la inacción será muy significativo.

SCARLETT VÁSQUEZ PAULUS
scarlett.vasquez@confluencias.cl
Ingeniera Civil Hidráulica, U. de Chile
Socia CONFLUENCIAS
www.confluencias.cl

DISTRIBUCIÓN FRACTAL DE LA NIEVE EN LOS ANDES EXTRATROPICALES

PABLO A. MENDOZA¹, THOMAS SHAW², JAMES MCPHEE², SHELLEY
MACDONELL²

¹Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile
Advanced Mining Technology Center (AMTC), Universidad de Chile
pamendoz@uchile.cl

ORCID: 0000-0002-0263-9698

²Advanced Mining Technology Center (AMTC), Universidad de Chile
Ahora en Swiss Federal Institute, WSL, Birmensdorf, Switzerland
thomas.shaw@wsl.ch

ORCID: 0000-0001-7640-6152

³Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile
Advanced Mining Technology Center (AMTC), Universidad de Chile
jmcphee@uchile.cl

ORCID: 0000-0002-7547-0926

⁴Centro de Estudios Avanzados en Zonas Áridas (CEAZA)
shelley.macdonell@ceaza.cl

RESUMEN

En este trabajo, se presenta una caracterización de la distribución espacial de la profundidad de nieve, a la escala de ladera, en base a mediciones lidar (*Light Detection and Ranging*) de alta resolución adquiridas en tres cuencas de montaña: (i) Tascadero (-31.26°N, 3270-3790 m), (ii) Las Bayas (-33.31°N, 3218-4022 m); y (iii) Valle Hermoso (VH) (-36.91°N, 1449-2563 m). Para este último sitio, se cuenta con dos áreas escaneadas, una de las cuales tiene arbustos (VH oeste), mientras que la otra carece de cobertura vegetal (VH este). Las cuatro áreas escaneadas son analizadas en cuanto a la distribución altitudinal, su distribución probabilística y el grado de escalamiento espacial. Los resultados indican que – salvo en la zona de VH oeste – no existe un gradiente altitudinal claro, y que la distribución Gamma es la que mejor se ajusta a valores positivos de profundidad de nieve. Además, el análisis de variograma indica que la profundidad del manto en los Andes extratropicales presenta un comportamiento autosimilar (i.e., fractal) en más de un rango de distancias, y que las magnitudes halladas para los quiebres de escala son comparables a otros sitios del mundo (e.g., Colorado Rockies, los Alpes Suizos o los Pirineos en España). Los resultados presentados acá tienen implicancias prácticas para la configuración espacial de modelos hidrológicos, tanto de macro-escala como de resolución fina.

Palabras claves: profundidad de nieve, fractal, escalamiento espacial, Andes extratropicales.

1. INTRODUCCIÓN

En regiones montañosas del mundo, el agua acumulada en forma de nieve es de vital importancia para el desarrollo de la sociedad humana (Daniel Viviroli *et al.*, 2007, D. Viviroli *et al.*, 2011). En dichos dominios, la nieve es una componente fundamental del ciclo hidrológico, cuya presencia afecta directamente el balance de agua y energía (Marks y Dozier, 1992; Andreadis *et al.*, 2009). Además, cualquier variación en la distribución espacial del manto nival es determinante para la generación de escorrentía por efecto del derretimiento (Freudiger *et al.*, 2017). Es por ello que numerosos investigadores han puesto sus esfuerzos en comprender la estructura espacial de la profundidad de nieve o de su equivalente en agua (EAN) (e.g., Shook y Gray, 1996; Kuchment y Gelfan, 2001; Arnold y Rees, 2003; Deems *et al.*, 2006; Trujillo *et al.*, 2007; Lehning *et al.*, 2011; Helfricht *et al.*, 2014; Clemenzi *et al.*, 2018), así como de los factores climáticos, meteorológicos y/o físicos que la moldean (e.g., Clark *et al.*, 2011, Scipiòn *et al.*, 2013, Revuelto *et al.*, 2014, Gerber *et al.*, 2018, Rebecca Mott *et al.*, 2018). Estudios de esta naturaleza cobran más relevancia que nunca en la actualidad, dada la robusta evidencia de una intensificación del ciclo del agua a nivel global (Huntington, 2006), así como de sus posibles efectos sobre la criósfera (e.g., Barnett *et al.*, 2005, Mankin *et al.*, 2015).

Por supuesto, Chile no ha quedado fuera de iniciativas de esta naturaleza. Debido a su emplazamiento geográfico, la Cordillera de los Andes constituye nuestro principal embalse natural, donde el agua acumulada en el manto nival durante los meses de invierno (principalmente entre los meses de mayo y septiembre) es crucial para gran parte de nuestros ríos y embalses, haciendo posible el desarrollo de actividades socioeconómicas (Mendoza *et al.*, 2014) y la existencia de diversos ecosistemas (Cornwell *et al.*, 2016). A pesar de que el estudio la nieve en Chile ha sido históricamente difícil por la escasez de observaciones en alta montaña (Cornwell *et al.*, 2016), muchos autores han contribuido a una mejor comprensión de la distribución espacio-temporal de la profundidad de nieve o del EAN. El trabajo de Escobar y Anabalón (1991) – realizado para la Dirección General de Aguas (DGA) – es quizás el primer esfuerzo a nivel nacional, en el cual se compilaron estadígrafos de las rutas de nieve, documentando además relaciones entre EAN, precipitación y volúmenes de deshielo. Estudios posteriores han examinado patrones espaciales de EAN o profundidad de nieve a lo largo de los Andes, utilizando mediciones in situ (Ayala *et al.*, 2014) y/o modelos numéricos (e.g., Gascoin *et al.*, 2013; Cornwell *et al.*, 2016; Cortés *et al.*, 2016; Cortés y Margulis, 2017; Mernild *et al.*, 2017; Shaw *et al.*, 2020) que, en resumen, dan cuenta de la dependencia de los montos de nieve acumulados con variables topográficas (e.g., elevación, orientación), y factores meteorológicos (e.g., radiación, viento), además de la variabilidad interanual y estacional.

A pesar de todo el conocimiento generado durante las últimas tres décadas, es poco lo que se conoce sobre la distribución espacial de la nieve en los Andes a escalas de ladera (i.e., 1-100 m, como indican Clark *et al.*, 2011) o inferior, siendo Ayala *et al.* (2014) los únicos que habían incluido, hasta hace poco, mediciones con espaciamientos en ese rango (> 60 m). Recientemente, Shaw *et al.* (2020) presentaron por primera vez mediciones de profundidad de nieve a alta resolución (1-m) con tecnología *lidar* (*Light Detection and Ranging*) en un

sub-dominio de 0,74 km² ubicado dentro de la cuenca del río Yeso. Si bien se documentó la relación de esta variable con la elevación, pendiente y ángulo de orientación, el objetivo principal fue la validación de productos satelitales Pléiades a una resolución horizontal de 4 m.

A pesar de su reciente aparición y limitado uso para estudiar la criósfera en Chile, la tecnología *lidar* ha sido ampliamente utilizada para estudiar la nieve y los glaciares en el mundo durante las últimas dos décadas debido a la innegable ventaja de entregar millones de mediciones en un intervalo de tiempo bastante acotado (Deems *et al.*, 2013, Currier *et al.*, 2019). Entre las numerosas investigaciones que la literatura reporta, destacan aquellas iniciativas orientadas a (1) explorar su modelamiento estadístico (e.g., López-Moreno *et al.*, 2015), y (2) detectar patrones de escalamiento (e.g., Fassnacht y Deems, 2006), con el fin último de guiar la configuración espacial de modelos numéricos para la simulación de la acumulación y el derretimiento nival. Dentro del primer grupo, destacan las contribuciones de Helbig *et al.* (2015) y Skaugen y Melvold (2019), quienes compararon la bondad de ajuste de las distribuciones normal, lognormal y gamma para la distribución de la profundidad de nieve, reportando la inferioridad de la distribución lognormal con respecto a la función gamma. Esta conclusión alerta sobre los riesgos de tomar decisiones subjetivas (e.g., Cortés *et al.*, 2016) para representar implícitamente la variabilidad espacial dentro de cada unidad de modelación (e.g., celda rectangular, banda de elevación).

Dentro del segundo grupo de estudios – escalamiento espacial– se ha generado suficiente evidencia sobre el comportamiento fractal (i.e., autosimilar) de la profundidad de nieve, dentro de un rango que va desde uno a decenas de metros (e.g., Deems *et al.*, 2006, Trujillo *et al.*, 2007, 2009, R. Mott *et al.*, 2011), y que además puede persistir de un año a otro (Deems *et al.*, 2008; Schirmer y Lehning, 2011; Helfricht *et al.*, 2014; Clemenzi *et al.*, 2018; Mendoza *et al.*, 2020). El término ‘fractal’ (acuñado por B. Mandelbrot, 1977) es típicamente reservado para describir objetos cuyas componentes preservan tanto la forma como las propiedades del conjunto, y cuya geometría es tan compleja que no puede ser descrita sólo a través de dimensiones Euclidianas (i.e., $D = 1,2,3$). La Hidrología es una de las primeras ramas de las ciencias de la Tierra en que se aplicó la noción de fractal, comenzando con los estudios de caudal en el río Nilo (Hurst, 1951), y siguiendo con aplicaciones en Hidrología operacional (Mandelbrot y Wallis, 1968, 1969). En el área de Hidrología de Nieve, el concepto de dimensión fractal (B. Mandelbrot, 1977, 1982) ha sido útil para cuantificar el grado de complejidad o ‘rugosidad’ de la superficie del manto nival en distintos rangos de escalas espaciales. En términos prácticos, la detección de un comportamiento fractal para dicho rango indica que el conjunto de procesos físicos que define el ordenamiento espacial del manto nival se preserva y, por lo tanto, cualquier escala de modelo dentro de ese rango de distancias puede ser utilizado para simular dichos procesos (Trujillo *et al.*, 2007). Hasta la fecha, se han reportado casos de dominios en que la profundidad de nieve muestra autocorrelación espacial hasta cierto quiebre de escala, seguido de comportamiento aleatorio o indefinido (e.g., Shook y Gray, 1996; Mendoza *et al.*, 2020) o de patrón autosimilar, con un valor de dimensión fractal mayor (e.g., Deems *et al.*, 2008; Schirmer y Lehning, 2011; Clemenzi *et al.*, 2018).

Este artículo presenta los primeros análisis mediciones de profundidad de nieve con datos *lidar* en los Andes extratropicales, con énfasis en la distribución altitudinal, modelamiento estadístico y posible comportamiento fractal. Los resultados presentados aquí ponen en relieve la importancia del estudio detallado y de la comprensión de los fenómenos que determinan el comportamiento hidrológico revelado a partir de datos de terreno.

2. ZONA DE ESTUDIO Y DATOS

En este artículo, se analizan mediciones *lidar* tomadas en cuatro subdominios ubicados en la cabecera de tres cuencas experimentales de Chile Central (Figura 1): (i) Tascadero (-31,26°N; -70,53°E), en cuenca del río Limarí, (ii) Las Bayas (-33,31°N; -70,25°E), en la cuenca del río Maipo, y (iii) Valle Hermoso (VH, -36,91°N; -71,40°E), ubicada en la cuenca del río Itata. El emplazamiento latitudinal de estos subdominios sigue un gradiente hidroclimático de norte a sur, con una precipitación media anual (promedio de invierno) de 262,1 mm (192,2 mm) en Tascadero, 385,6 mm (260,5 mm) en las Bayas, y 1816 mm (1041,1 mm) en Valle Hermoso (periodo 2000-2018). En este último subdominio, se han definido dos sitios para escaneos: VH oeste (0,34 km²), con una menor elevación (1650-1850 m s.n.m.) y presencia de arbustos pequeños, y VH este (0,57 km²), con una elevación de terreno > 2000 m s.n.m. y ausencia total de vegetación, al igual que Tascadero (0,68 km²) y Las Bayas (1,05 km²). Por lo tanto, los cuatro subdominios escogidos ofrecen la posibilidad de contrastar resultados según la hidroclimatología y la presencia de cubierta vegetal.

En cada subdominio, se adopta el mismo procedimiento para derivar mapas de profundidad de nieve a partir de mediciones *lidar*. Todos los datos fueron adquiridos con un scanner Riegl VZ6000 de largo alcance, en días con y sin nieve (Tabla 1), con una resolución angular de 0,01° y una densidad media de puntos ~18 p/m² a una distancia de 1000 m desde el scanner. El scanner opera con una longitud de onda cercana a la infrarroja (1064 nm), característica que lo hace adecuado para monitorear nieve y hielo en ambientes de montaña (Deems *et al.*, 2013, Fischer *et al.*, 2016). La ubicación del scanner en cada fecha fue medida utilizando un GPS Trimble R4 Real Time Kinematic (RTK), cuya incertidumbre de medición en la horizontal y vertical es de 0,01 y 0,03 m. Las nubes de puntos obtenidas con el scanner fueron procesadas con los software Riegl Riscan Pro V. 2.5.1. y CloudCompare, para finalmente obtener mapas con una resolución horizontal de 1 m. Finalmente, se obtuvieron los mapas de profundidad de nieve a través de la simple diferencia entre los modelos de elevación digital (DEMs) rasterizados, con y sin nieve (Figura 2).

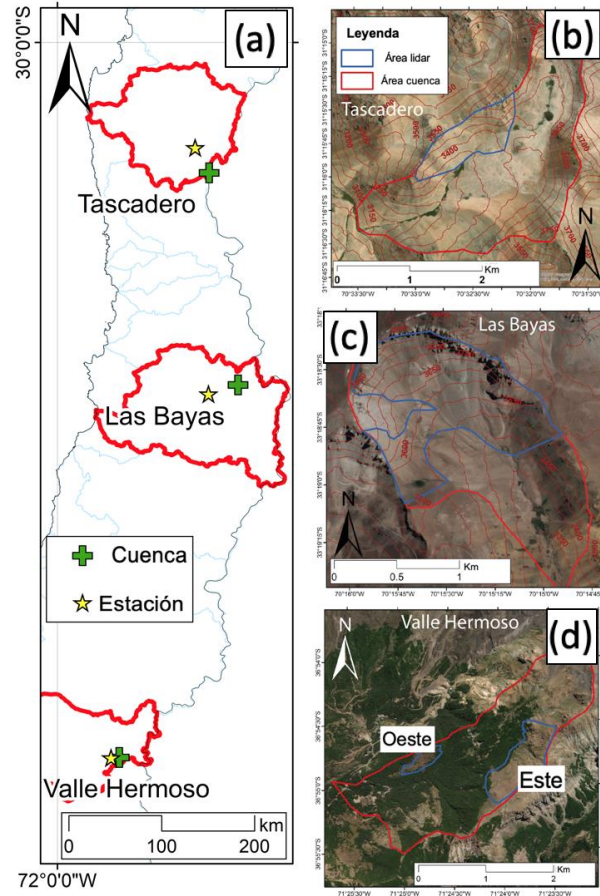


Figura 1. (a) Ubicación de las cuencas de interés dentro de Chile continental, además de las estaciones DGA utilizadas para caracterizar la climatología (ver detalles en el texto). Los dominios escaneados son, de norte a sur: (b) Tascadero, (c) Las Bayas, y (d) Valle Hermoso. Los límites de las subcuencas y de las áreas escaneadas se muestran en color rojo y azul, respectivamente.

3. METODOLOGÍA

Análisis exploratorio. En primera instancia, se analiza la distribución altitudinal de la profundidad de nieve mediante bandas de elevación, calculándose además la media, el coeficiente de variación (CV) y el coeficiente de asimetría (Cs) por banda. Dichos estadísticos son ampliamente utilizados para determinar la función de densidad de probabilidad (FDP) más conveniente y, por lo tanto para modelar la distribución espacial del EAN en cada elemento espacial de un modelo numérico (e.g., celda, banda de elevación, unidad de respuesta hidrológica). En caso de no tener datos de EAN, es posible determinar la FDP más adecuada sólo con datos de profundidad de nieve, considerando que esta última es mucho más variable en el espacio que la densidad (López-Moreno *et al.*, 2013). Sin embargo, es importante recordar que existe la posibilidad de que la incertidumbre en los parámetros de la distribución sea mucho mayor a aquella asociada a la elección de una función paramétrica (Luce y Tarboton, 2004).

Además del análisis altitudinal, se compara el desempeño de distribución lognormal con la distribución gamma de dos parámetros para modelar la variabilidad espacial de la profundidad de nieve en los subdominios de interés. En cada dominio, se comparan los histogramas de profundidad de nieve con el ajuste gráfico de las FDPs indicadas, además del estadístico D asociado al test de Kolmogorov-Smirnov y su respectivo p-valor. Si los p-valoros son menores que 0,05, se rechaza la hipótesis nula de que las mediciones de profundidad de nieve siguen la distribución testeada con un nivel de confianza de un 90 %.

Tabla 1. Fechas con campañas de terreno y estimaciones de error en los mapas de profundidad de nieve generados a partir de mediciones *lidar*.

Sitio	Fecha de escaneo sin nieve	Fecha de escaneo con nieve)	Error - Raster (m)
Tascadero	22/05/2018	04/09/2018	0.040
Las Bayas	23/03/2019	09/08/2018	0.080
VH Oeste	11/04/2019	25/10/2018	0.092
VH Este	11/04/2019	25/10/2018	0.125

Análisis de variograma. El variograma es una herramienta que permite determinar el grado de autocorrelación de una variable, ya sea en el tiempo o en el espacio (Skjøien *et al.*, 2003). Dependiendo de su forma, es posible determinar, además, si la variable presenta la propiedad de auto-similitud o fractal (Mark y Aronson, 1984) en un rango de escalas determinado.

En el caso particular de la profundidad de nieve, dada una distancia h , la semivarianza es estimada como (Yates, 1948):

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{(i,j) \in N(h)} (z_j - z_i)^2 \quad (1)$$

donde z_i y z_j son valores de profundidad de nieve para puntos separados por una distancia horizontal h , mientras que $N(h)$ es el número de puntos separados a dicha distancia. Si la profundidad de nieve presenta un comportamiento auto-similar en un rango de valores de h , es posible ajustar una ley potencial de la forma:

$$\gamma(h) = \alpha h^\beta \quad (2)$$

donde la existencia de más de un conjunto de parámetros α y β , asociados a rangos de escala diferentes, es indicativa de un comportamiento multi-escala. Además, el exponente puede ser utilizado para estimar la dimensión fractal con la fórmula propuesta por Mark y Aronson (1984):

$$D = 3 - \frac{\beta}{2} \quad (3)$$

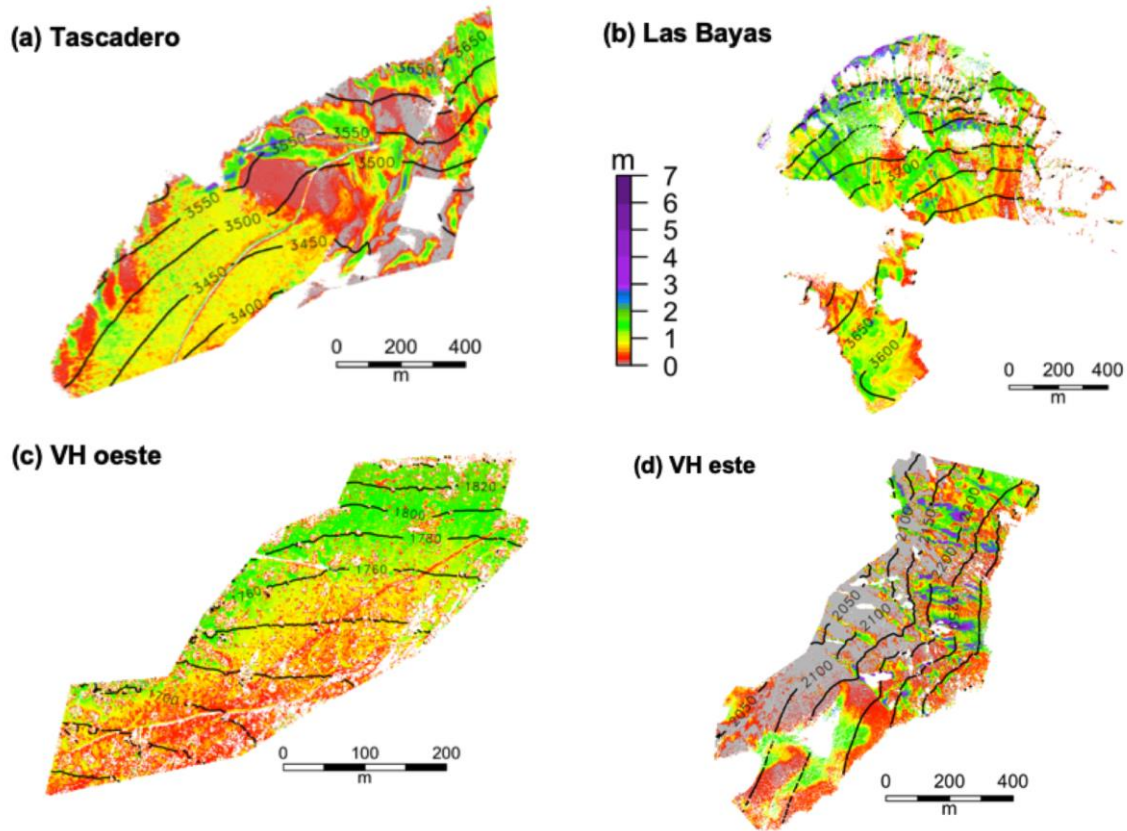


Figura 2. Distribución de la profundidad de nieve por banda de elevación para los cuatro sitios de estudio: (a) Tascadero, (b) Las Bayas, (c) Valle Hermoso oeste, y (d) Valle Hermoso este. Para cada banda, se presenta la media, el coeficiente de variación (CV) y el coeficiente de asimetría (Cs).

Si bien los valores de la dimensión fractal son consistentes con las dimensiones utilizadas por la geometría Euclídeana, éstos no necesariamente deben ser números enteros. Por lo tanto, cualquier curva puede ser caracterizada por valores de D entre 1 y 2, mientras que las superficies tienen asociadas dimensiones fractales entre 2 y 3. En el caso particular del manto nival, $D \sim 2$ indica una superficie prácticamente plana, mientras que valores cercanos a 3 indican un comportamiento más irregular.

En este trabajo, se presentan variogramas omnidireccionales (es decir, tomando pares de puntos independientemente de la orientación) tanto para la topografía del suelo desnudo como para la profundidad de nieve, calculados con el paquete ‘gstat’ (Pebesma, 2004) contenido en el software “R” (<http://www.r-project.org/>). Para ello, se han definido 46 intervalos y una distancia máxima igual a la mitad de la distancia horizontal entre el par de puntos más alejados del dominio completo (Sun *et al.*, 2006). Para cada variograma, se analiza si existen cambios dependiente significativos para detectar quiebres de escala, para luego ajustar modelos de tipo potencial. Si la ecuación (2) se ajusta para un rango de escalas determinado con $R^2 \geq 0.9$, entonces se acepta que el comportamiento de la profundidad de nieve en dicho rango es fractal (Deems *et al.*, 2006, 2008).

De manera adicional, se presentan los ajustes gráficos de tres modelos geoestadísticos alternativos, incluyendo el modelo esférico, gaussiano y exponencial, cuyas formas matemáticas vienen dadas por:

Modelo exponencial:

$$\gamma(h) = C \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{|h|}{a}\right) \right\} \quad (4)$$

Modelo gaussiano:

$$\gamma(h) = C \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{|h|^2}{a^2}\right) \right\} \quad (5)$$

Modelo esférico:

$$\gamma(h) = \begin{cases} C \left\{ \frac{3|h|}{2a} - \frac{1}{2} \left(\frac{|h|}{a} \right)^3 \right\} & \text{si } |h| \leq a \\ C & \text{si } |h| > a \end{cases} \quad (6)$$

donde a es un parámetro, mientras que C representa la meseta del variograma.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Distribución espacial. La Figura 3 ilustra la variabilidad de la profundidad de nieve por banda de elevación para los cuatro subdominios de interés. En general, se observa que la forma de la distribución y los parámetros estadísticos pueden variar considerablemente dentro de cada sitio. VH Oeste es el único subdominio que presenta un aumento sostenido de la profundidad de nieve promedio con respecto a la elevación media de cada banda. En Las Bayas y VH Este se aprecia un aumento hasta cierta cota, a partir de la cual se observa una disminución de la profundidad de nieve, comportamiento que ya ha sido reportado en otras

regiones montañosas del mundo, incluyendo Sierra Nevada en California (Kirchner *et al.*, 2014, Zheng *et al.*, 2016), además de los Pirineos y los Alpes (Grünewald *et al.*, 2014). Tanto el coeficiente de variación (CV) como de asimetría (Cs) tienden a disminuir a mayores elevaciones en VH Oeste, mientras que CV tiende a aumentar (disminuir) con la elevación en Tascadero (VH Este).

La Figura 4 ilustra los histogramas de profundidad de nieve para los cuatro subdominios estudiados, considerando sólo valores positivos, además del ajuste gráfico de las FDPs lognormal y gamma. Se incluyen también los principales estadígrafos de dispersión y los resultados del test de Kolmogorov-Smirnov (estadígrafo *D* y p-valor asociado). Se observa que la distribución gamma de dos parámetros entrega mejores resultados que la distribución lognormal (menor *D*), aunque en ambos casos se rechaza la hipótesis nula de que los datos de profundidad de nieve siguen las distribuciones indicadas, con un nivel de significancia de un 5 % (i.e., p-valor inferior a 0,05). Análisis exploratorios no incluidos aquí demostraron la incapacidad de la distribución normal para modelar la variabilidad espacial del manto nival en los dominios considerados.

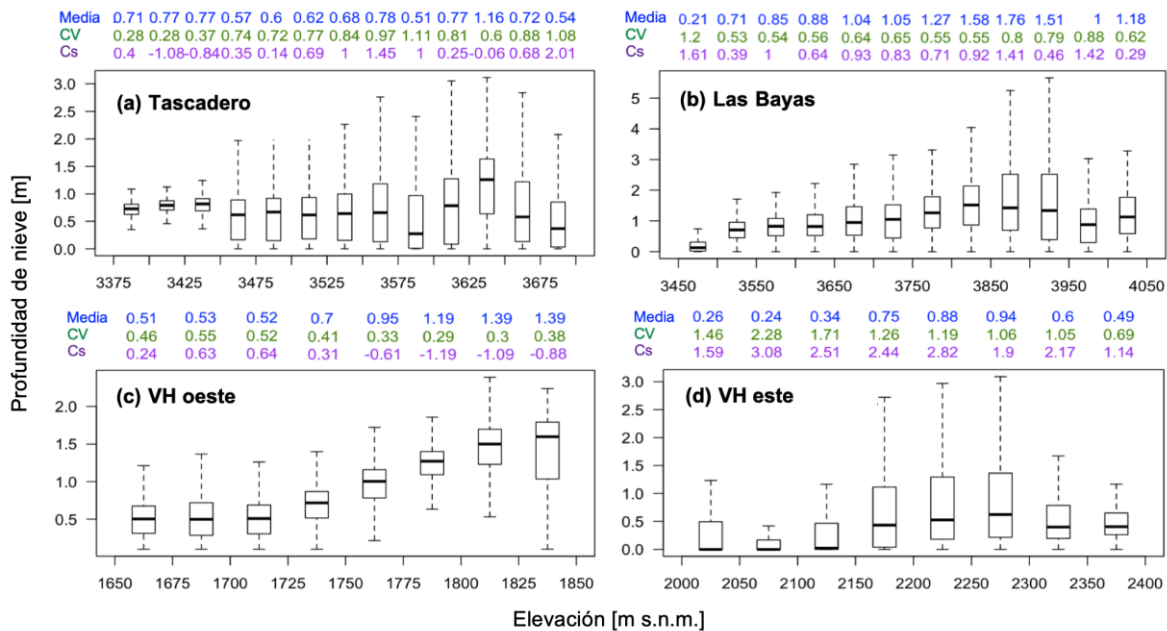


Figura 3. Distribución de la profundidad de nieve por banda de elevación para los cuatro sitios de estudio: (a) Tascadero, (b) Las Bayas, (c) Valle Hermoso oeste, y (d) Valle Hermoso este. Para cada banda, se presenta la media, el coeficiente de variación (CV) y el coeficiente de asimetría (Cs).

Las discrepancias obtenidas entre estadígrafos de dispersión de las distintas bandas de elevación (Figura 3) vs. aquéllos del dominio completo (Figura 4) confirman que, para los Andes extratropicales, la transferibilidad de funciones de probabilidad y parámetros hacia subdominios pequeños es bastante limitada (Marchand y Killingtveit, 2005). Por otro lado, estudios recientes también han reportado las ventajas de la distribución gamma por sobre la distribución lognormal para modelar la variabilidad espacial de la profundidad de nieve en dominios de extensión similar a los analizados aquí (Winstral y Marks, 2014; Helbig *et al.*,

2015; Skaugen y Melvold, 2019). Este resultado refuerza la necesidad de procurar datos locales para verificar la distribución de profundidad de nieve en esfuerzos de modelamiento a mayor escala, evitando en lo posible recurrir a supuestos a partir de información derivada de estudios en otras regiones (e.g., Cortés *et al.*, 2016, Cortés & Margulis, 2017).

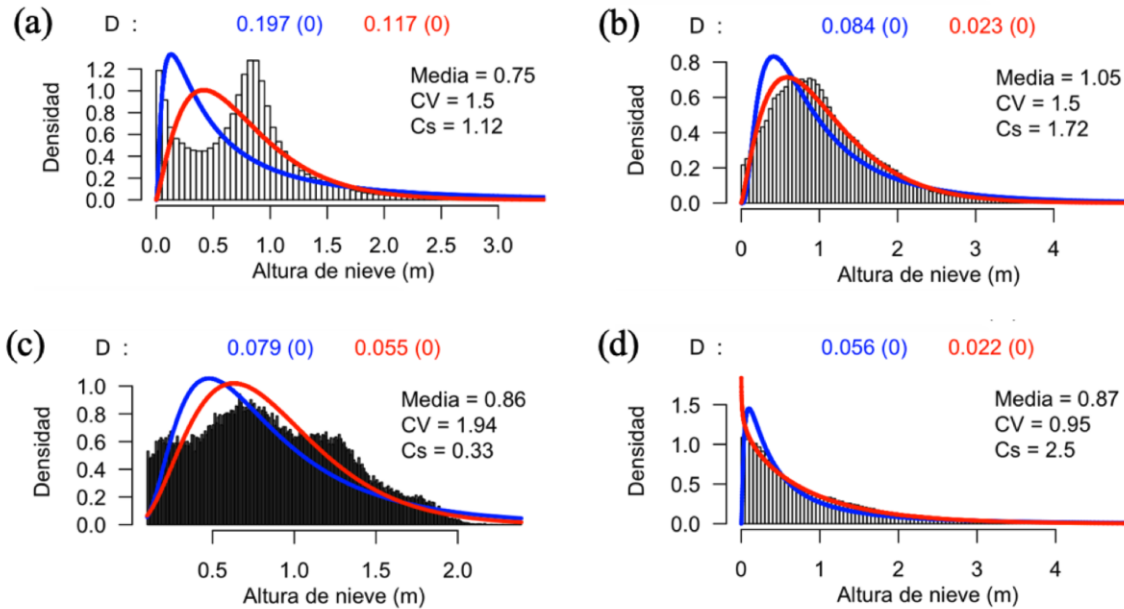


Figura 4. Histogramas de profundidad de nieve para los dominios completos, junto con ajustes gráficos de distribuciones lognormal (azul) y gamma de dos parámetros (rojo). Se indican la media, el coeficiente de variación (CV) y el coeficiente de asimetría (Cs) de cada muestra, además de los estadísticos D y p-valores resultantes de la aplicación del test de Kolgorov-Smirnov.

Variogramas. La Figura 5 muestra los variogramas omnidireccionales para la profundidad de nieve, en escala log-log, para los cuatro subdominios estudiados. Se presentan además los ajustes de modelos potenciales (o lineal en escala log-log, denotados por LLL), exponenciales (EXP), gaussianos (GAU) y esféricos (SPH). Los resultados indican que, en los cuatro sitios, el modelo potencial – ajustado por segmentos – presenta un mejor comportamiento que los modelos alternativos, especialmente para valores de h pequeños (< 3 m) o muy grandes (> 200 m). Además, se consiguen ajustes de $R^2 \geq 0.9$ con la ecuación (2) en la mayoría de los segmentos desplegados, lo que indica una estructura fractal de la profundidad de nieve en distintos rangos de escala, o ‘comportamiento a multi-escala’ (Clemenzi *et al.*, 2018).

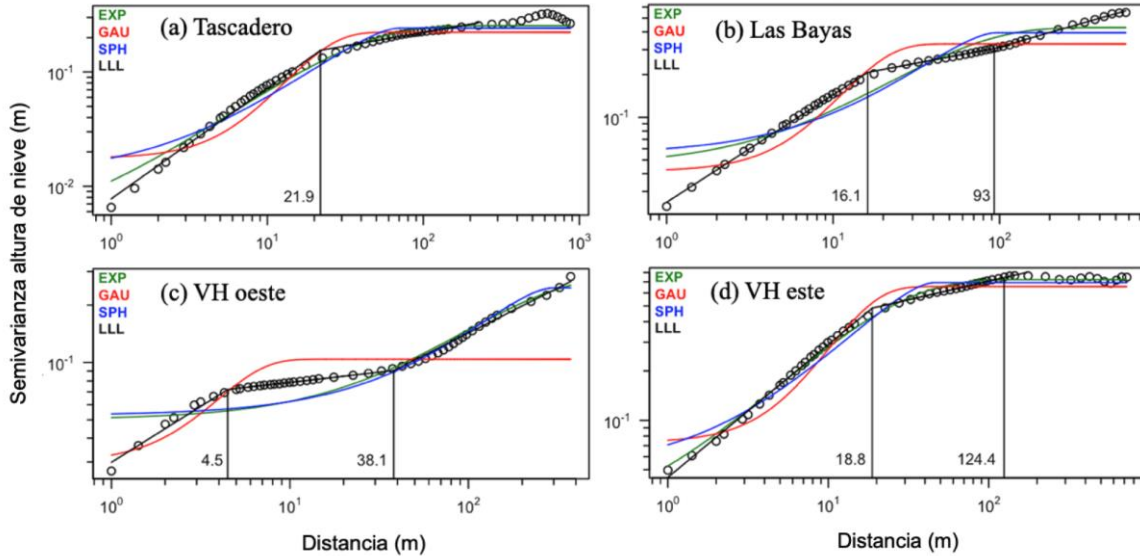


Figura 5. Variogramas de profundidad de nieve para los cuatro dominios estudiados: (a) Tascadero, (b) Las Bayas, (c) Valle Hermoso Oeste, y (d) Valle Hermoso Este. Las líneas verticales indican quiebres de escala, mientras que las líneas diagonales rectas (LLL) indican comportamiento fractal de la variable en el tramo correspondiente. A modo de comparación, se incluyen otros modelos geostatísticos clásicos: exponencial (EXP), Gaussiano (GAU) y esférico (SPH).

Tabla 2. Ajuste del modelo potencial, longitudes de quiebre de escala y dimensión fractal para la profundidad de nieve.

Sitio	D_S	D_M	D_L	L_1 m	L_2 m
Tascadero	2.52	2.88	-	21.9	
Las Bayas	2.62	2.89	2.83	16.1	93
VH Oeste	2.71	2.95	2.76	4.5	38.1
VH Este	2.59	2.89	-	18.8	124.4

La Figura 5 muestra que la profundidad de nieve presenta un comportamiento fractal hasta un primer quiebre de escala L_1 , que fluctúa entre los 16 y los 22 m en zonas con suelo desnudo, e igual a 4,5 m en el único dominio con presencia de vegetación (VH Oeste). En este último sitio, los valores de dimensión fractal D_S y D_M superan a los de otros subdominios, lo que es esperable por la presencia de vegetación, la cual contribuye a una estructura más irregular del manto nival. Cabe destacar que los valores de D obtenidos para la profundidad de nieve en los subdominios analizados son ligeramente superiores a los de otras zonas montañosas del mundo. Además, diferencias en valores de D_S y D_M (Tabla 2) indican que, en cada rango de escala asociado, diferentes combinaciones de procesos físicos moldean la estructura espacial del manto nival: en el corto rango, predomina la interacción de

precipitación sólida con árboles y/o arbustos (si es que existen), viento, nieve, e irregularidades locales del terreno (e.g., concavidades y rocas), mientras que, más allá del primer quiebre de escala (L_1), se genera una compensación de redistribución por efecto del viento e interceptación, en el caso de existir vegetación (Trujillo *et al.*, 2007). Por lo tanto, la escala de aplicación de modelos hidrológicos distribuidos debiese ser escogida en base a los procesos físicos que se desee simular explícitamente. La similitud con los valores de L_1 obtenidos en zonas sin vegetación de otras regiones del mundo, para fechas cercanas a la máxima acumulación (R. Mott *et al.*, 2011, Schirmer & Lehning, 2011, Helfricht *et al.*, 2014, Mendoza *et al.*, 2020), sugiere que la elección la escala de modelo más adecuada vendría dada por las características fisiográficas del dominio analizado, más que por sus características hidroclimáticas.

En las Bayas y Valle Hermoso, se detecta un segundo quiebre de escala (L_2) que define el límite de una segunda zona con patrón autosimilar (Tabla 2). Hasta la fecha, dicho quiebre sólo ha sido reportado para la cuenca experimental de Izas, ubicada en los Pirineos españoles (Mendoza *et al.*, 2020). A diferencia de estudios previos que han reportado comportamiento fractal para más de un rango de escalas en otras regiones montañosas (Deems *et al.*, 2006, 2008, Trujillo *et al.*, 2007, 2009, R. Mott *et al.*, 2011, Schirmer & Lehning, 2011, Helfricht *et al.*, 2014, Clemenzi *et al.*, 2018), nuestro análisis muestra la existencia de una tercera zona con ordenamiento fractal en los Andes extratropicales, en particular en Las Bayas y VH oeste (Figura 5b,d). Para buscar posibles causas detrás de los quiebres de escala y tipos de ordenamiento espacial encontrados, se analizaron los variogramas omnidireccionales para la elevación de terreno en los cuatro subdominios (Figura 6). Los resultados indican que, si bien esta variable muestra un comportamiento autosimilar hasta distancias del orden de los 200 m (Tabla 3), no existe ninguna conexión aparente entre el escalamiento de la topografía y el de la profundidad de nieve, ni en términos de dimensión fractal ni de quiebres de escala.

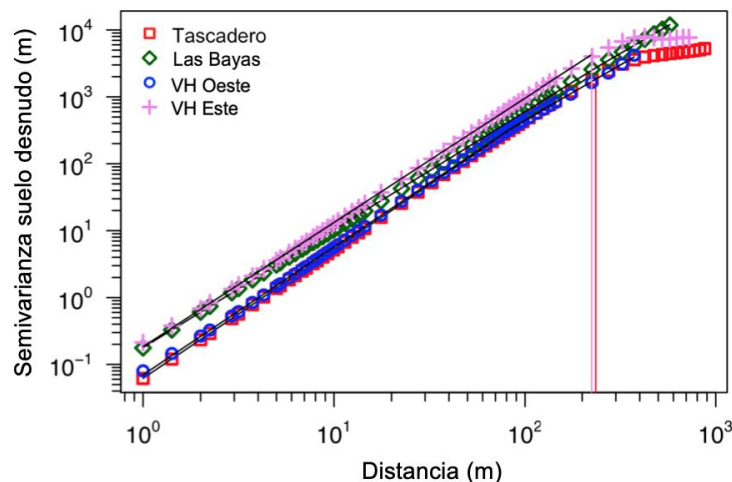


Figura 6. Superposición de variogramas de topografía para los cuatro dominios de interés. Las líneas verticales indican quiebres de escala.

Tabla 3. Ajuste del modelo potencial, longitud de quiebre de escala y dimensión fractal para la topografía.

Sitio	D	L m
Tascadero	2.04	235.5
Las Bayas	2.12	-
VH West	2.04	-
VH East	2.07	224.2

Los resultados del análisis de variogramas tienen implicancias prácticas para estudios futuros que busquen caracterizar y/o predecir el comportamiento dinámico del manto nival en los Andes extratropicales. En primer lugar, la existencia de zonas en el variograma donde exista autosimilitud en la profundidad de nieve indica que la escala de un modelo dinámico puede tomar cualquier valor dentro de ese rango, si se desea representar los procesos dominantes asociados a dichas escalas. Para los subdominios alpinos analizados en este artículo, resoluciones horizontales de 15 m serían suficientes para resolver explícitamente la interacción del viento, el manto nival y la topografía, mientras que una resolución de 4 m o inferior sería requerida en VH oeste para considerar, además, la interacción con la vegetación. Por otro lado, los quiebres de escala proporcionan valiosa información para decidir la longitud característica de predictores para la profundidad de nieve. Por ejemplo, Mendoza *et al.* (2020) encontraron para la cuenca experimental de Izas valores de L_1 muy similares a la distancia óptima del Índice de Posición Topográfica (IPT; Revuelto *et al.*, 2014), el mejor predictor de profundidad de nieve en dicho dominio. Por lo tanto, futuros estudios podrían incorporar esta información, así como la de otros predictores, en el desarrollo de modelos estadísticos para predecir la variabilidad espacial del manto nival en los Andes. Finalmente, una tarea pendiente es la realización de mediciones adicionales en los Andes con tecnología *lidar* para corroborar la consistencia temporal en los patrones de escalamiento de la nieve, y que ha sido reportada en otros dominios del mundo (Helfricht *et al.*, 2014, e.g., Clemenzi *et al.*, 2018, Mendoza *et al.*, 2020).

5. CONCLUSIONES

En este artículo, se presentan y discuten resultados del análisis de dependencia altitudinal, distribución probabilística y análisis de variogramas para cuatro subdominios ubicados a lo largo de los Andes extratropicales en Chile. Los resultados revelan patrones altitudinales que ya han sido documentados para otras zonas montañosas del mundo, y confirman la superioridad de la distribución gamma para modelar la variabilidad espacial de la nieve en los dominios examinados, alertando sobre los riesgos que decisiones subjetivas podrían tener al utilizar modelos de macro-escala. Se reporta además la existencia de un ordenamiento

fractal en la profundidad de nieve dentro todos los sitios analizados, con hasta tres rangos de escala y dimensiones fractales diferentes, cada uno de los cuales está asociado a distintas combinaciones de procesos físicos. La comparación de resultados entre los distintos sitios de este estudio, así como de resultados obtenidos por otros autores/as, sugiere que las características fisiográficas son más influyentes que las características climáticas en los parámetros fractales. Finalmente, la presencia de dos quiebres de escala y tres zonas con comportamiento autosimilar no ha sido reportada con anterioridad en ninguna región del mundo, y tiene implicancias prácticas para el desarrollo futuro de modelos predictivos, ya sea dinámicos o estadísticos.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece las enseñanzas de la profesora Ximena Vargas, quien fue la primera persona en mostrarle las maravillas de la Hidrología (año 2005); el profesor Ricardo Mantilla, por mostrarle el concepto de fractal y su importancia en las Ciencias Hidrológicas (año 2011); y al profesor Balaji Rajagopalan, por el apoyo y motivación constantes para mejorar como investigador y como persona.

REFERENCIAS

- Andreadis, K. M., Storck, P. & Lettenmaier, D. P. (2009) Modeling snow accumulation and ablation processes in forested environments. *Water Resour. Res.* **45**, W05429. doi:10.1029/2008WR007042
- Arnold, N. S. & Rees, W. G. (2003) Self-similarity in glacier surface characteristics. *J. Glaciol.* **49**(167), 547–554. doi:10.3189/172756503781830368
- Ayala, A., McPhee, J. & Vargas, X. (2014) Altitudinal gradients, midwinter melt, and wind effects on snow accumulation in semiarid midlatitude Andes under La Niña conditions. *Water Resour. Res.* **50**(4), 3589–3594. doi:10.1002/2013WR014960
- Barnett, T. P., Adam, J. C. & Lettenmaier, D. P. (2005) Potential impacts of a warming climate on water availability in snow-dominated regions. *Nature* **438**(7066), 303–9. doi:10.1038/nature04141
- Clark, M. P., Hendrikx, J., Slater, A. G., Kavetski, D., Anderson, B., Cullen, N. J., Kerr, T., et al. (2011) Representing spatial variability of snow water equivalent in hydrologic and land-surface models: A review. *Water Resour. Res.* **47**, W07539. doi:10.1029/2011WR010745
- Clemenzi, I., Pellicciotti, F. & Burlando, P. (2018) Snow Depth Structure, Fractal Behavior, and Interannual Consistency Over Haut Glacier d’Arolla, Switzerland. *Water Resour. Res.* **54**(10), 7929–7945. doi:10.1029/2017WR021606
- Cornwell, E., Molotch, N. P. & McPhee, J. (2016) Spatio-temporal variability of snow water equivalent in the extra-tropical Andes Cordillera from distributed energy balance modeling and remotely sensed snow cover. *Hydrol. Earth Syst. Sci.* **20**(1), 411–430. doi:10.5194/hess-20-411-2016
- Cortés, G., Giroto, M. & Margulis, S. (2016) Snow process estimation over the extratropical Andes using a data assimilation framework integrating MERRA data and Landsat

- imagery. *Water Resour. Res.* **52**(4), 2582–2600. doi:10.1002/2015WR018376
- Cortés, G. & Margulis, S. (2017) Impacts of El Niño and La Niña on interannual snow accumulation in the Andes: Results from a high-resolution 31 year reanalysis. *Geophys. Res. Lett.* **44**(13), 6859–6867. doi:10.1002/2017GL073826
- Currier, W. R., Pflug, J., Mazzotti, G., Jonas, T., Deems, J. S., Bormann, K. J., Painter, T. H., et al. (2019) Comparing Aerial Lidar Observations With Terrestrial Lidar and Snow-Probe Transects From NASA's 2017 SnowEx Campaign. *Water Resour. Res.* **55**(7), 6285–6294. doi:10.1029/2018WR024533
- Deems, J. S., Fassnacht, S. R. & Elder, K. J. (2006) Fractal Distribution of Snow Depth from Lidar Data. *J. Hydrometeorol.* **7**(2), 285–297. doi:10.1175/JHM487.1
- Deems, J. S., Fassnacht, S. R. & Elder, K. J. (2008) Interannual Consistency in Fractal Snow Depth Patterns at Two Colorado Mountain Sites. *J. Hydrometeorol.* **9**(5), 977–988. doi:10.1175/2008JHM901.1
- Deems, J. S., Painter, T. H. & Finnegan, D. C. (2013) Lidar measurement of snow depth: A review. *J. Glaciol.* **59**(215), 467–479. doi:10.3189/2013JoG12J154
- Escobar, F. & Anabalón, R. (1991) Análisis de las rutas de nieve del país. Santiago de Chile, Chile.
- Fassnacht, S. R. & Deems, J. S. (2006) Measurement sampling and scaling for deep montane snow depth data. *Hydrol. Process.* **20**(4), 829–838. doi:10.1002/hyp.6119
- Fischer, M., Huss, M., Kummert, M. & Hoelzle, M. (2016) Application and validation of long-range terrestrial laser scanning to monitor the mass balance of very small glaciers in the Swiss Alps. *Cryosphere* **10**(3), 1279–1295. doi:10.5194/tc-10-1279-2016
- Freudiger, D., Kohn, I., Seibert, J., Stahl, K. & Weiler, M. (2017) Snow redistribution for the hydrological modeling of alpine catchments. *Wiley Interdiscip. Rev. Water* e1232. doi:10.1002/wat2.1232
- Gascoin, S., Lhermitte, S., Kinnard, C., Bortels, K. & Liston, G. E. (2013) Wind effects on snow cover in Pascua-Lama, Dry Andes of Chile. *Adv. Water Resour.* **55**, 25–39. Elsevier Ltd. doi:10.1016/j.advwatres.2012.11.013
- Gerber, F., Besic, N., Sharma, V., Mott, R., Daniels, M., Gabella, M., Berne, A., et al. (2018) Spatial variability in snow precipitation and accumulation in COSMO-WRF simulations and radar estimations over complex terrain. *Cryosphere* **12**(10), 3137–3160. doi:10.5194/tc-12-3137-2018
- Grünwald, T., Bühler, Y. & Lehning, M. (2014) Elevation dependency of mountain snow depth. *Cryosph.* **8**(6), 2381–2394. doi:10.5194/tc-8-2381-2014
- Helbig, N., Herwijnen, A. Van, Magnusson, J. & Jonas, T. (2015) Fractional snow-covered area parameterization over complex topography. *Hydrol. Earth Syst. Sci.* **19**(3), 1339–1351. doi:10.5194/hess-19-1339-2015
- Helfricht, K., Schöber, J., Schneider, K., Sailer, R. & Kuhn, M. (2014) Interannual persistence of the seasonal snow cover in a glacierized catchment. *J. Glaciol.* **60**(223), 889–904. doi:10.3189/2014JoG13J197
- Huntington, T. G. (2006) Evidence for intensification of the global water cycle: Review and synthesis. *J. Hydrol.* **319**(1–4), 83–95. doi:10.1016/j.jhydrol.2005.07.003
- Hurst, H. (1951) Long-term Storage Capacity of Reservoirs. *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.* **116**(1), 770–799.
- Kirchner, P. B., Bales, R. C., Molotch, N. P., Flanagan, J. & Guo, Q. (2014) LiDAR measurement of seasonal snow accumulation along an elevation gradient in the southern Sierra Nevada, California. *Hydrol. Earth Syst. Sci.* **18**(10), 4261–4275.

- doi:10.5194/hess-18-4261-2014
- Kuchment, L. S. & Gelfan, A. N. (2001) Statistical self-similarity of spatial variations of snow cover: Verification of the hypothesis and application in the snowmelt runoff generation models. *Hydrol. Process.* **15**(18), 3343–3355. doi:10.1002/hyp.1032
- Lehning, M., Grünewald, T. & Schirmer, M. (2011) Mountain snow distribution governed by an altitudinal gradient and terrain roughness. *Geophys. Res. Lett.* **38**(19), L19504. Wiley Online Library. doi:10.1029/2011GL048927
- López-Moreno, J. I., Fassnacht, S. R., Heath, J. T., Musselman, K. N., Revuelto, J., Latron, J., Morán-Tejeda, E., et al. (2013) Small scale spatial variability of snow density and depth over complex alpine terrain: Implications for estimating snow water equivalent. *Adv. Water Resour.* **55**, 40–52. doi:10.1016/j.advwatres.2012.08.010
- López-Moreno, J. I., Revuelto, J., Fassnacht, S. R., Azorín-Molina, C., Vicente-Serrano, S. M., Morán-Tejeda, E. & Sexstone, G. A. (2015) Snowpack variability across various spatio-temporal resolutions. *Hydrol. Process.* **29**(6), 1213–1224. doi:10.1002/hyp.10245
- Luce, C. H. & Tarboton, D. G. (2004) The application of depletion curves for parameterization of subgrid variability of snow. *Hydrol. Process.* **18**(8), 1409–1422. doi:10.1002/hyp.1420
- Mandelbrot, B. (1977) *Fractals: Form, Chance and Dimension*. (W.H. Freeman, Ed.). San Francisco.
- Mandelbrot, B. (1982) *The Fractal Geometry of Nature*. (W. Freeman, Ed.). San Francisco.
- Mandelbrot, Benoit B & Wallis, J. R. (1968) Noah, Joseph, and Operational Hydrology. *Water Resour. Res.* **4**(5), 909–918. doi:10.1029/WR004i005p00909
- Mandelbrot, Benoît B & Wallis, J. R. (1969) Robustness of the Rescaled Range R/S in the Measurement of Noncyclic Long Run Statistical Dependence. *Water Resour. Res.* **5**(5), 967–988.
- Mankin, J. S., Viviroli, D., Singh, D., Hoekstra, A. Y. & Diffenbaugh, N. S. (2015) The potential for snow to supply human water demand in the present and future. *Environ. Res. Lett.* **10**(11), 114016. IOP Publishing. doi:10.1088/1748-9326/10/11/114016
- Marchand, W.-D. & Killingtveit, A. (2005) Statistical probability distribution of snow depth at the model sub-grid cell spatial scale. *Hydrol. Process.* **19**(2), 355–369. doi:10.1002/hyp.5543
- Mark, D. M. & Aronson, P. B. (1984) Scale-dependent fractal dimensions of topographic surfaces: an empirical investigation, with applications in geomorphology and computer mapping. *Math. Geol.* **16**(7), 671–683. Springer.
- Marks, D. & Dozier, J. (1992) Climate and Energy Exchange at the Snow Surface in the Alpine Region of the Sierra Nevada 2. Snow Cover Energy Balance. *Water Resour. Res.* **28**(11), 3043–3054.
- Mendoza, P. A., Musselman, K. N., Revuelto, J., Deems, J. S., López-Moreno, J. I. & McPhee, J. (2020) Interannual and Seasonal Variability of Snow Depth Scaling Behavior in a Subalpine Catchment. *Water Resour. Res.* **56**(7). doi:10.1029/2020WR027343
- Mendoza, P. A., Rajagopalan, B., Clark, M. P., Cortés, G. & McPhee, J. (2014) A robust multimodel framework for ensemble seasonal hydroclimatic forecasts. *Water Resour. Res.* **50**(7), 6030–6052. doi:10.1002/2014WR015426
- Mernild, S. H., Liston, G. E., Hiemstra, C. A., Malmros, J. K., Yde, J. C. & McPhee, J. (2017) The Andes Cordillera. Part I: snow distribution, properties, and trends (1979-2014). *Int.*

- J. Climatol.* **37**(4), 1680–1698. doi:10.1002/joc.4804
- Mott, R., Schirmer, M. & Lehning, M. (2011) Scaling properties of wind and snow depth distribution in an Alpine catchment. *J. Geophys. Res.* **116**(D6), D06106. doi:10.1029/2010JD014886
- Mott, Rebecca, Vionnet, V. & Grünewald, T. (2018) The Seasonal Snow Cover Dynamics: Review on Wind-Driven Coupling Processes. *Front. Earth Sci.* **6**(December). doi:10.3389/feart.2018.00197
- Pebesma, E. J. (2004) Multivariable geostatistics in S: The gstat package. *Comput. Geosci.* **30**(7), 683–691. doi:10.1016/j.cageo.2004.03.012
- Revuelto, J., López-Moreno, J. I., Azorin-Molina, C. & Vicente-Serrano, S. M. (2014) Topographic control of snowpack distribution in a small catchment in the central Spanish Pyrenees: intra- and inter-annual persistence. *Cryosph.* **8**(5), 1989–2006. doi:10.5194/tc-8-1989-2014
- Schirmer, M. & Lehning, M. (2011) Persistence in intra-annual snow depth distribution: 2. Fractal analysis of snow depth development. *Water Resour. Res.* **47**(9), 1–14. doi:10.1029/2010WR009429
- Scipiōn, D. E., Mott, R., Lehning, M., Schneebeli, M. & Berne, A. (2013) Seasonal small-scale spatial variability in alpine snowfall and snow accumulation. *Water Resour. Res.* **49**(3), 1446–1457. doi:10.1002/wrcr.20135
- Shaw, T. E., Gascoïn, S., Mendoza, P. A., Pellicciotti, F. & McPhee, J. (2020) Snow Depth Patterns in a High Mountain Andean Catchment from Satellite Optical Tristereoscopic Remote Sensing. *Water Resour. Res.* **56**(2), 1–23. doi:10.1029/2019wr024880
- Shook, K. & Gray, D. (1996) Small-scale spatial structure of spatial snowcovers. *Hydrol. Process.* **10**(10), 1283–1292. doi:10.1002/(SICI)1099-1085(199610)10:10<1283::AID-HYP460>3.0.CO;2-M
- Skaugen, T. & Melvold, K. (2019) Modeling the Snow Depth Variability With a High-Resolution Lidar Data Set and Nonlinear Terrain Dependency. *Water Resour. Res.* **55**(11), 9689–9704. doi:10.1029/2019WR025030
- Skøien, J. O., Blöschl, G. & Western, A. W. (2003) Characteristic space scales and timescales in hydrology. *Water Resour. Res.* **39**(10). doi:10.1029/2002WR001736
- Sun, W., Xu, G., Gong, P. & Liang, S. (2006) Fractal analysis of remotely sensed images: A review of methods and applications. *Int. J. Remote Sens.* **27**(22), 4963–4990. doi:10.1080/01431160600676695
- Trujillo, E., Ramírez, J. A. & Elder, K. J. (2007) Topographic, meteorologic, and canopy controls on the scaling characteristics of the spatial distribution of snow depth fields. *Water Resour. Res.* **43**(7). doi:10.1029/2006WR005317
- Trujillo, E., Ramírez, J. A. & Elder, K. J. (2009) Scaling properties and spatial organization of snow depth fields in sub-alpine forest and alpine tundra. *Hydrol. Process.* **23**(11), 1575–1590. doi:10.1002/hyp.7270
- Viviroli, D., Archer, D. R., Buytaert, W., Fowler, H. J., Greenwood, G. B., Hamlet, A. F., Huang, Y., et al. (2011) Climate change and mountain water resources: overview and recommendations for research, management and policy. *Hydrol. Earth Syst. Sci.* **15**(2), 471–504. doi:10.5194/hess-15-471-2011
- Viviroli, Daniel, Dürr, H. H., Messerli, B., Meybeck, M. & Weingartner, R. (2007) Mountains of the world, water towers for humanity: Typology, mapping, and global significance. *Water Resour. Res.* **43**(7), W07447. doi:10.1029/2006WR005653
- Winstral, A. & Marks, D. (2014) Long-term snow distribution observations in a mountain

- catchment: Assessing variability, time stability, and the representativeness of an index site. *Water Resour. Res.* **50**(1), 293–305. doi:10.1002/2012WR013038
- Yates, F. (1948) Systematic sampling. *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A, Math. Phys. Sci.* **241**(834), 345–377. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc. doi:10.1098/rsta.1948.0023
- Zheng, Z., Kirchner, P. B. & Bales, R. C. (2016) Topographic and vegetation effects on snow accumulation in the southern Sierra Nevada: a statistical summary from lidar data. *Cryosph.* **10**(1), 257–269. doi:10.5194/tc-10-257-2016

ACERCA DE LOS AUTORES

Pablo Mendoza Zúñiga: Ingeniero Civil, Magíster en Recursos y Medio Ambiente Hídrico de la Universidad de Chile, Ph.D. de la Universidad de Colorado, Boulder. Es Profesor Asociado de la Universidad de Chile y académico del Departamento de Ingeniería Civil e Investigador Asociado del Advanced Mining Technology Center. Con 15 años de experiencia en modelación hidrológica, cambio climático, pronóstico de caudales, hidroclimatología y criósfera.

Thomas Shaw: Ph.D. de la Universidad de Northumbria, Reino Unido. Sus intereses son la glaciología, hidrología de nieve y meteorología, con experiencia en diversos ambientes polares y alpinos. Su investigación se enfoca en la importancia de la información de la profundidad de la nieve derivada de satélites para el modelado glacio-hidrológico de zonas montañosas, así como la sensibilidad de procesos de la criósfera a cambios en el clima.

James McPhee Torres: Ingeniero Civil de la Universidad de Chile, Ph.D. en Ingeniería de Recursos Hídricos de la Universidad de California, Los Ángeles, Estados Unidos. Es Profesor Titular de la Universidad de Chile y académico del Departamento de Ingeniería Civil. Sus áreas de interés son la hidrología de montañas, nieves y glaciares y la sostenibilidad de la gestión de los recursos hídricos.

Shelley MacDonell: Glacióloga, Ph.D. de la Universidad de Otago. Se dedica a estudiar la dinámica de los glaciares y el aporte que la nieve y el hielo realizan a los cursos de agua. Junto con esto, estudia algunos de los efectos que se están observando y que se proyectan ante escenarios de cambio climático en la criósfera.

UN NUEVO MODELO PARA FLUJOS GRANULARES DENSOS

RODOLFO MORALES^{1,2,3}, ALDO TAMBURRINO^{4,5}, SERGIO PALMA⁶

¹Alumno del Programa de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería mención Fluidodinámica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

²Profesor Part-time Departamento de Metalurgia y Materiales, Universidad Técnica Federico Santa María

³Ingeniero Especialista en el Área de Geociencias de JRI Ingeniería S.A.

rodolfomoraless@ug.uchile.cl

ORCID: 0000-0002-3919-1428

⁴Profesor Asociado, Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.

⁵Investigador Asociado, Advanced Mining Technology Center, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile.

atamburr@ing.uchile.cl

ORCID: 0000-0001-5406-370X

⁶Profesor Asistente, Departamento de Metalurgia y Materiales, Universidad Técnica Federico Santa María

sergio.palma@usm.cl

ORCID: 0000-0003-2963-7390

RESUMEN

Los medios granulares se han resistido a formulaciones teóricas que permitan describir de forma unificada su dinámica para geometrías y fuerzas arbitrarias, exhibiendo fenómenos que no son capturados por medio de una formulación continua. Este es el caso de las observaciones experimentales de regiones de flujo elipsoidal durante la descarga de silos, o de espesor finito en el caso de planos inclinados y celdas anulares de Couette. Estas zonas de flujo se caracterizan por una escala de longitud del orden de unos cuantos diámetros de partícula, lo que motiva el empleo de ecuaciones de difusión-advección para explicar los perfiles de velocidad observados. En el presente estudio se desarrolla un trabajo teórico que proporciona una justificación basada en las leyes de la mecánica para este tipo de ecuaciones. Se postula que la dinámica de las zonas de flujo se encuentra controlada por un nuevo número adimensional, obtenido como el cociente entre las fuerzas impulsoras y resistentes desarrollada entre grupos de partículas en movimiento. El modelo es resuelto analítica y numéricamente, y sus predicciones son comparadas con los resultados experimentales de Fullard et al. (2019) para el flujo en silos, Wang et al. (2019) para el flujo en planos inclinados, y Mueth et al. (2000), Bocquet et al. (2002) y Cruz (2004) para el flujo en celdas anulares de Couette. En todos los casos se obtiene una adecuada reproducción de las zonas de flujo

Palabras claves: materia granular, flujo granular, flujo en silos, flujo en planos inclinados, flujo de Taylor-Couette.

1. INTRODUCCIÓN

La materia granular es un conglomerado de partículas sólidas y macroscópicas en que la fuerza de interacción predominante es la fricción (Andreotti et al. 2013). El término “macroscópico” alude a que las partículas son visibles a simple vista por el ojo humano, en contraste con las partículas microscópicas como átomos y moléculas. Existen muchos ejemplos de materiales granulares en nuestro entorno, desde pequeños granos de azúcar, a rocas que pueden medir varios metros, e incluso asteroides de cientos de metros. Una de sus principales características es que tienden a disipar rápidamente la energía de sus partículas debido a las fuerzas de fricción.

La materia granular se ha resistido a formulaciones teóricas que permitan describir de forma unificada su dinámica para geometrías y fuerzas arbitrarias, a causa de su complejo comportamiento que suele asemejarse a un sólido, líquido o gas dependiendo de la circunstancia (Kamrin, 2008). Esto origina fenómenos que no resultan adecuadamente reproducidos suponiendo un comportamiento continuo, como es la observación experimental de regiones de flujo elipsoidal durante la descarga de silos, o el espesor finito en el caso de planos inclinados y celdas anulares de Couette (MiDi, 2004). Estas tres experiencias pueden ser interpretadas como un flujo confinado, un flujo con superficie libre, y un flujo forzado por una superficie en movimiento, respectivamente. En estas, la zona de flujo se caracteriza por una escala de longitud del orden de unos cuantos diámetros de partícula, por lo que no son adecuadamente reproducidas en el límite continuo; $D_{50} \ll L$, con D_{50} el diámetro promedio de partícula y L el tamaño de la parcela en que se admite una descripción continua. Para solucionar esta dificultad teórica, se recurre a explicaciones estocásticas, en que el promedio estadístico conlleva a la obtención de ecuaciones de difusión-advención para el campo de velocidad.

El primer modelo estocástico de flujo de material granular fue propuesto por Litwiniszyn (1958) para la descarga en silos, motivado en la teoría de caminantes aleatorios y la ecuación de Fokker-Planck. Una interpretación consistente fue presentada en un trabajo posterior del autor (Litwiniszyn, 1966), en que las partículas en movimiento describen caminos aleatorios a través de espacios disponibles o vacíos, obteniendo una ecuación de difusión-advención para la densidad de probabilidad p de encontrar un vacío en un determinado punto:

$$\partial_y p - d \partial_{xx}^2 p = 0, \quad (1)$$

donde d es un parámetro con unidades de distancia, conocido como longitud de difusión. En la Ec. 1 y en las que siguen se utiliza la notación $\partial_\alpha = \partial/\alpha$. Mullins (1972) interpretó esta ecuación en términos de una densidad de flujo de partículas. Así, la densidad de probabilidad p se corresponde con la densidad de vacíos ρ_v , y esta última se encuentra relacionada con las componentes de velocidad de acuerdo con:

$$u \sim d \partial_x \rho_v \text{ y } v \sim -\rho_v. \quad (2)$$

El trabajo de estos autores se conoce como modelo de difusión de vacíos, y se visualiza esquemáticamente en la Figura 1-a. Neederman & Tüzün (1979) dedujeron una ecuación

equivalente suponiendo la condición de incompresibilidad y proponiendo una relación constitutiva entre las componentes vertical y horizontal de la velocidad:

$$u = -d\partial_x v \text{ y } v = v. \quad (3)$$

Varios autores sugieren que la longitud de difusión se relaciona con el tamaño medio de la partícula según $d \approx 2,24D_{50}$ (Choi et al., 2005). Esta interpretación se conoce como modelo cinemático, y se visualiza esquemáticamente en la Figura 1-b.

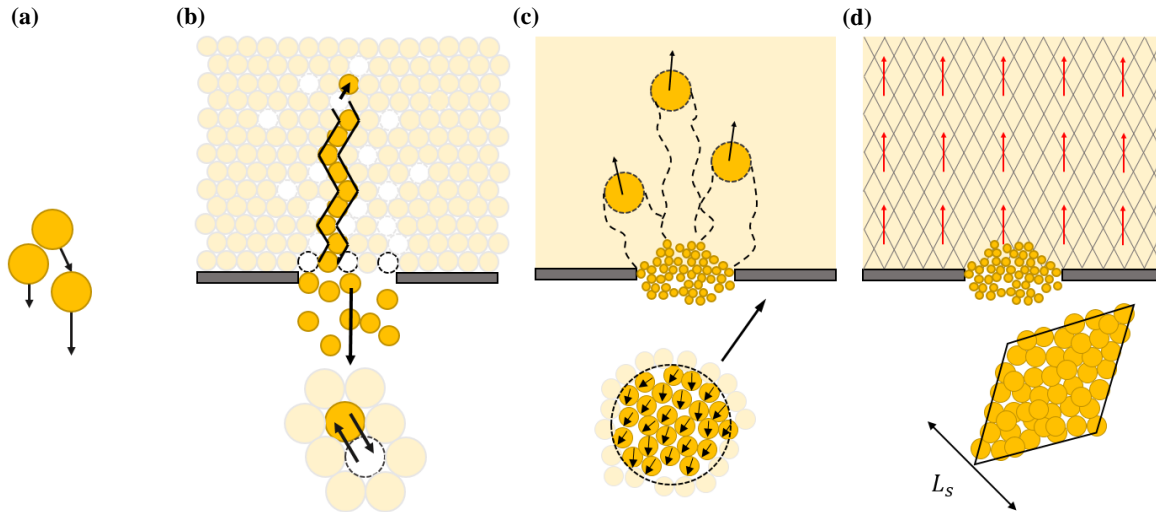


Figura 1. (a) Modelo de difusión de vacíos (Litwiniszyn, 1958, 1966; Mullins, 1972). (b) Modelo cinemático (Neederman & Tüzün, 1979). (c) Modelo de difusión de burbujas (Bazant, 2004). (d) Modelo SRF (Kamrin y Bazat, 2007).

Los modelos de Litwiniszyn, Mullins y Neederman & Tüzün conducen a resultados equivalentes. El principal problema de estos es que, en su interpretación estocástica conducen a un exceso de mezcla de partículas no observada experimentalmente. Por otro lado, su ajuste a resultados experimentales requiere que la longitud de difusión incremente con la distancia a la abertura del silo. En búsqueda de resolver estas dificultades, Bazant (2004) propuso que las partículas se desplazan en grupos como respuesta al ascenso difusivo de burbujas de espacio intersticial espacialmente extendido. En este modelo, la densidad de burbujas ρ_b , definida a partir de la integral de vacíos en el volumen de promedio, se encuentra determinada por una ecuación de difusión-advención (en general, por una ecuación de Fokker-Planck) a partir de la cual, la velocidad de partículas se determinada por medio de una expresión no local del tipo:

$$u \sim \int dV_b w d\partial_x \rho_b \text{ y } v \sim -\int dV_b w \rho_b. \quad (4)$$

La integración se extiende por todo el espacio, encontrándose acotada por la elección de la función de influencia de las burbujas $w = w(x, y, x_b, y_b)$. Esta última se puede suponer como una delta de Heaviside centrada en la ubicación de la burbuja. Se debe notar que las componentes de velocidad sin convolucionar, son equivalentes a las expresiones propuestas por Mullins (1972) y, por lo tanto, entregan el mismo perfil de velocidades que el modelo de Neederman & Tüzün (1979). Este modelo se visualiza esquemáticamente en la Figura 1-c. Posteriormente, Kamrin y Bazat (2007) plantearon que las burbujas sólo se pueden desplazar

a lo largo de trayectorias admisibles, determinadas por el criterio de falla del material granular. Así, las burbujas actúan como eventos locales de falla o fluidización, que afectan una región disminuyendo su fricción. Este cambio afecta al equilibrio y origina una fuerza neta desbalanceada que impulsa la región fluidizada. Así, la velocidad de partícula posee por componentes:

$$u \sim -\int dV_b w(\rho_b \hat{u}_b - d\partial_x \rho_b) \text{ y } v \sim -\int dV_b w(\rho_b \hat{v}_b - d\partial_y \rho_b). \quad (5)$$

En tanto que la ecuación de Fokker-Planck asociada a la densidad de burbujas es: $\partial_x(\rho_b \hat{u}_b) + \partial_y(\rho_b \hat{v}_b) = d(\partial_{xx}^2 \rho_b + \partial_{yy}^2 \rho_b)$. En estas expresiones, \hat{u}_b y \hat{v}_b corresponden a las direcciones de deriva de las burbujas, las que se determinan proyectando la fuerza desbalanceada sobre las direcciones de desplazamiento admisibles. Este modelo se visualiza esquemáticamente en la Figura 1-d.

El modelo de Kamrin y Bazat (2007), conocido como SRF (Regla de Flujo Estocástico), supone que el empaquetamiento aleatorio de las partículas origina direcciones de desplazamiento difusas, las que actúan como fuente para la difusión de burbujas. Al ser aplicado al flujo en silos, conduce a perfiles de velocidad similares a los obtenidos por medio del modelo de Neederman & Tüzün. Su ventaja sobre los modelos previos es que permite su generalización a otras condiciones de flujo, como el de plano inclinado y en celdas de Couette, capturando el espesor de flujo observado en estos últimos. No obstante, al igual que los modelos previos, carece de una explicación mecánica que justifique el empleo de ecuaciones del tipo difusión-advención.

En el presente estudio se desarrolla un trabajo teórico sobre la derivación de ecuaciones del tipo difusión-advención para flujos granulares. Esto se consigue a través del promedio espacial de las ecuaciones de balance de momentum sobre un volumen de control conformado por grupos de partículas en movimiento. Con esta finalidad, se realiza una expansión en series a primer orden para el tensor de esfuerzos y el tensor de tasa de deformación. El modelo resultante es resuelto analíticamente y numéricamente, y sus resultados son utilizados para ajustar resultados experimentales de descarga en silos, flujo en planos inclinados y en celdas de Couette.

2. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Para derivar una ecuación de movimiento significativa, es decir, que su valor sea en promedio representativa del sistema, se promedia la ecuación de balance de momentum sobre un volumen de control conformado por un grupo de partículas fluidizadas. Se define el valor promedio $\langle B_s \rangle$ de cualquier magnitud física B asociada a las partículas en el volumen V de acuerdo con:

$$\langle B_s \rangle(x, t) = \frac{1}{V} \int_{V_s} B(x', t) dV_s. \quad (6)$$

De forma análoga, se define el valor promedio intrínseco $\langle B_s \rangle_s$ de B como:

$$\langle B_s \rangle_s(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} B(\mathbf{x}', t) dV_s. \quad (7)$$

Este último es la magnitud promedio de mayor uso. Ambos promedios se relacionan por

$$\langle B_s \rangle(\mathbf{x}, t) = \phi_s \langle B_s \rangle_s(\mathbf{x}, t), \quad (8)$$

donde $\phi_s = V_s/V$ corresponde a la fracción de volumen local de partículas sólidas.

En las expresiones precedentes, se debe notar que B es una función del vector posición \mathbf{x}' y el tiempo, mientras que su valor promedio es una función de la coordenada \mathbf{x} y el tiempo. En lo que sigue se omitirá la dependencia explícita de las variables para simplificar la notación. Las magnitudes promedio son típicamente asignadas al centroide del volumen de promediado (Howes y Whitaker S, 1985), sin embargo, Morales (2022) demostró que una descripción consistente con el principio de conservación de masa requiere que se refieran al centro de masa de la fase de interés.

2.1 Balance de Momentum

Para un régimen cuasi-estático, despreciando las contribuciones inerciales, se sigue que la ecuación de movimiento microscópica (a escalas menores al diámetro de partícula) es:

$$0 = \partial_j \sigma_{ij} - \rho g_i, \quad (9)$$

donde σ_{ij} es el tensor de esfuerzos. Definiendo la fuerza promedio sobre el grupo de partículas en movimiento por

$$f_i = \partial_j \langle \sigma_{ij} \rangle_s - \rho g_i, \quad (10)$$

Se sigue que el promedio de la Ec. (9) puede ser representado como:

$$0 = f_i + \langle \partial_j \sigma_{ij} \rangle_s - \partial_j \langle \sigma_{ij} \rangle_s. \quad (11)$$

El primer miembro del lado derecho es, por definición, la fuerza macroscópica que actúa sobre el grupo de partículas movilizadas. Las contribuciones restantes corresponden a la diferencia entre las fuerzas efectivamente aplicadas en la frontera del grupo de partículas, y su valor macroscópico promedio. De acuerdo con Morales (2022), estas contribuciones pueden ser escritas como integrales extendidas sobre la superficie de la zona fluidizada. Esta situación motiva a plantear que emergen de interacciones friccionantes cuando existe un movimiento relativo, debiendo desvanecerse para una velocidad relativa nula. Esta hipótesis sugiere una descomposición del tensor de esfuerzos del tipo

$$\sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle_s + \Delta \sigma_{ij} + \delta \sigma_{ij}, \quad (12)$$

donde el primero de los campos corresponde al valor promedio del tensor de esfuerzos en la zona fluidizada, y los campos $\Delta \sigma_{ij}$ y $\delta \sigma_{ij}$ corresponden a las desviaciones respecto del promedio para las componentes hidrostática y desviadora, respectivamente. Para ser consistentes con la noción de promedio, a los campos $\Delta \sigma_{ij}$ y $\delta \sigma_{ij}$ se les impone la condición:

$$\langle \Delta \sigma_{ij} \rangle_s = \langle \delta \sigma_{ij} \rangle_s = 0. \quad (13)$$

Por otro lado, al campo $\Delta \sigma_{ij}$ se le impone la condición

$$\langle \partial_j \Delta \sigma_{ij} \rangle_s = \partial_j \langle \sigma_{ij} \rangle_s, \quad (14)$$

a partir de donde se colige que:

$$\begin{aligned} \langle \partial_j \sigma_{ij} \rangle_s - \partial_j \langle \sigma_{ij} \rangle_s &= \langle \partial_j \langle \sigma_{ij} \rangle_s \rangle_s + \langle \partial_j \Delta \sigma_{ij} \rangle_s + \langle \partial_j \delta \sigma_{ij} \rangle_s - \partial_j \langle \sigma_{ij} \rangle_s \\ &= \langle \partial_j \delta \sigma_{ij} \rangle_s. \end{aligned} \quad (15)$$

De este modo, sustituyendo la Ec. (15) y (14) en (11), se sigue que los campos $\delta\sigma_{ij}$ y $\Delta\sigma_{ij}$ cumplen con:

$$\langle \partial_j \delta\sigma_{ij} \rangle_s = -f_i \quad \text{y} \quad \langle \partial_j \Delta\sigma_{ij} \rangle_s = \rho g_i + f_i. \quad (16)$$

2.2 Representación del tensor de esfuerzos

Para satisfacer la Ec. (16) se puede expandir $\delta\sigma_{ij}$ a primer orden en torno al centroide del grupo de partículas fluidizadas, adoptando la siguiente forma simétrica:

$$\delta\sigma_{ij} = \alpha x'_k f_k \delta_{ij} + \beta (x'_i f_j + x'_j f_i) \quad (17)$$

Para determinar las constantes α y β se requiere de dos condiciones. La primera de ellas es entregada por la Ec. (16), a partir de donde se sigue que,

$$\begin{aligned} \partial_j \delta\sigma_{ij} &= \alpha \delta_{jk} f_k \delta_{ij} + (\delta_{ij} f_j + \delta_{jj} f_i) \\ &= [\alpha + \beta(1+n)] f_i \\ &= -f_i, \end{aligned} \quad (18)$$

o bien:

$$\alpha + \beta(1+n) = -1. \quad (19)$$

Para la segunda, se propone un desacople entre las componentes hidrostáticas y desviadora de σ_{ij} . Considerando que la traza de $\delta\sigma_{ij}$ es nula, se tiene

$$\delta\sigma_{ii} = \alpha x'_k f_k n + 2\beta x'_k f_k = 0, \quad (20)$$

o bien:

$$\alpha n + 2\beta = 0. \quad (21)$$

A partir de las condiciones impuestas por la Ec. (19) y (21) se obtiene el siguiente resultado para la expansión de $\delta\sigma_{ij}$ a primer orden:

$$\delta\sigma_{ij} = -\frac{n}{n(n+1)-2} \left(x'_i f_j + x'_j f_i - \frac{2}{n} x'_k f_k \delta_{ij} \right). \quad (22)$$

Por otro lado, suponiendo $\Delta\sigma_{ij}$ hidrostático e imponiendo la condición descrita por la Ec. (16) se obtiene:

$$\Delta\sigma_{ij} = x_k (f_k + \rho g_k) \delta_{ij} \quad (23)$$

2.3 Representación del tensor tasa de deformación

Para expresar la fuerza de fricción como una función de la velocidad relativa se requiere relacionar el tensor de esfuerzos con la tasa de deformación del grupo de partículas fluidizadas. Con esta finalidad se adopta un modelo constitutivo equivalente al de un fluido de Bingham con una viscosidad cinemática ν y un esfuerzo de fluencia proporcional a la presión μP , siendo μ un coeficiente de fricción y P la presión. Esto es:

$$\langle \delta\sigma_{ij} \rangle_s = \frac{\mu \langle P \rangle_s}{\langle \dot{\gamma} \rangle_s} \langle \dot{\gamma}_{ij} \rangle_s + \nu \rho \langle \dot{\gamma}_{ij} \rangle_s \quad \text{si} \quad \delta\sigma^2 \geq (\mu \langle P \rangle_s)^2. \quad (24)$$

Para invertir esta relación y expresar $\dot{\gamma}$ en función de $\delta\sigma$ se calcula el segundo invariante de este último. Considerando que se cumple la condición $\delta\sigma \geq \mu P$, se tendrá:

$$\begin{aligned}
 \langle \delta \sigma_{ij} \rangle_s \langle \delta \sigma_{ij} \rangle_s &= \left(\frac{n}{n(n+1)-2} \right)^2 \left(x'_i x'_i f_j f_j + x'_j x'_j f_i f_i + \frac{4}{n} (x'_k f_k)^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2x'_i f_i x'_j f_j - \frac{8}{n} x'_k f_k x'_i f_i \right) \\
 &= \left(\frac{n}{n(n+1)-2} \right)^2 2 \left(x'_i x'_i f_j f_j + x'_j x'_j f_i f_i - \frac{2}{n} x'_i x'_j f_i f_j \right) \\
 &= \left(\frac{n}{n(n+1)-2} \right)^2 2f^2 x'_i \left(\delta_{ij} \right. \\
 &\quad \left. + \left(1 - \frac{2}{n} \right) \frac{f_i f_j}{f^2} \right) x'_j \\
 &= \left(\frac{\mu \langle P \rangle_s}{\langle \dot{\gamma} \rangle_s} + \nu \rho \right)^2 \langle \dot{\gamma} \rangle_s^2 \\
 &= (\mu \langle P \rangle_s)^2 + 2\mu \langle P \rangle_s \nu \rho \langle \dot{\gamma} \rangle_s + (\nu \rho \langle \dot{\gamma} \rangle_s)^2.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Definiendo convenientemente las magnitudes

$$\zeta_{ij} = \delta_{ij} + \left(1 - \frac{2}{n} \right) \frac{f_i f_j}{f^2}, \tag{26}$$

y

$$r_c = \frac{n(n+1)-2\mu \langle P \rangle_s}{\sqrt{2n} f}, \tag{27}$$

se obtiene el siguiente resultado:

$$\langle \dot{\gamma} \rangle_s = \frac{\mu \langle P \rangle_s}{\nu \rho} \left(\sqrt{\frac{x'_i \zeta_{ij} x'_j}{r_c^2}} - 1 \right). \tag{28}$$

Sustituyendo la Ec. (28) en la Ec. (24) y expresando $\delta \sigma_{ij}$ de acuerdo con la expansión de primer orden planteada en la Ec. (22), se sigue que el tensor de tasa de deformación puede ser expresado como:

$$\langle \dot{\gamma}_{ij} \rangle_s = \begin{cases} -\frac{1}{\nu \rho} \frac{n}{n(n+1)-2} \left(1 - \frac{r_c}{\sqrt{x'_i \zeta_{ij} x'_j}} \right) \left(x'_i f_j + x'_j f_i - \frac{2}{n} x'_k f_k \delta_{ij} \right) & \text{si } \sqrt{x'_i \zeta_{ij} x'_j} \geq r_c \\ 0 & \text{si } \sqrt{x'_i \zeta_{ij} x'_j} < r_c. \end{cases} \tag{29}$$

2.4 Solución analítica del caso bidimensional

Para una geometría bidimensional de la zona fluidizada y llamando $r = \sqrt{x'_i \zeta_{ij} x'_j}$, se sigue que la Ec. (29) se reduce a:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{\nu\rho}\left(1 - \frac{r_c}{r}\right)(x'_i f_j + x'_j f_i - x'_k f_k \delta_{ij}) & \text{si } r \geq r_c \\ 0 & \text{si } r < r_c. \end{cases} \quad (30)$$

Si se escoge un sistema de coordenadas tal que el eje \hat{y} se oriente en la dirección de la fuerza, se sigue que en la región con $r \geq r_c$, las componentes del tensor de tasa de deformación serán:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_{xx} &= \frac{1}{2\nu\rho}\left(1 - \frac{r_c}{r}\right)y' f_y, \\ \dot{\gamma}_{yy} &= -\frac{1}{2\nu\rho}\left(1 - \frac{r_c}{r}\right)y' f_y \text{ y } \dot{\gamma}_{xy} = -\frac{1}{2\nu\rho}\left(1 - \frac{r_c}{r}\right)x' f_y. \end{aligned} \quad (31)$$

Para integrar estas ecuaciones basta con preocuparse de la componente orientada en la misma dirección de la fuerza, ya que la otra originará un flujo neto nulo. Así, la segunda igualdad sugiere que $\partial_{y'} v = -\left(\frac{1}{2\nu\rho}\right)\left(1 - \frac{r_c}{r}\right)y' f_y$, teniendo por solución $v = v_0 + v_1(x') + \left(\frac{f_y}{2\nu\rho}\right)\left(r_c r - \frac{y^2}{2}\right)$. Para ser consistentes con la tercera igualdad se propone el *ansatz* $v_1(x') = -\left(\frac{f_y}{2\nu\rho}\right)\frac{x'^2}{2}$, obteniendo la solución:

$$\rho v = \begin{cases} \left[\frac{f_y D^2}{8\nu} \left[\frac{2r_c}{D} \left(\frac{2r}{D} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2r}{D} \right)^2 - 1 \right) \right] \right] & \text{si } r \geq r_c \\ \left[\frac{f_y D^2}{16\nu} \left[1 - 2 \left(\frac{2r_c}{D} \right) + \left(\frac{2r_c}{D} \right)^2 \right] \right] & \text{si } r < r_c. \end{cases} \quad (32)$$

Finalmente, v_0 se determina imponiendo la condición de borde $v\left(r = \frac{D_h}{2}\right) = 0$, permitiendo encontrar la siguiente solución para la componente de la velocidad en la dirección de la fuerza:

$$\langle \rho v \rangle_s = \frac{4}{\pi D^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} dr d\theta v r = \frac{f_y D^2}{32\nu} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\mu P}{Df} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu P}{Df} \right)^4 \right] \text{ si } \frac{Df}{\mu P} \geq 1. \quad (33)$$

Generalizando este resultado, se puede escribir:

$$f_y = \frac{32\nu \langle \rho v \rangle_s}{D^2 \chi}. \quad (34)$$

Donde se ha definido la función:

$$\chi = \begin{cases} 1 - \frac{4}{3} \left(\frac{Y_0}{Y} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{Y_0}{Y} \right)^4 & \text{si } Y \geq Y_0 \\ 0 & \text{si } Y < Y_0. \end{cases} \quad (35)$$

En la expresión anterior, están definidos como $Y = (D_{50} f)/(\mu P)$ e $Y_0 = D_{50}/D_h$, siendo D_h el diámetro hidráulico de la burbuja del conjunto de partículas en movimiento.

3. APLICACIONES

3.1 Flujo en un plano inclinado

El flujo en un plano inclinado resulta particularmente ilustrativo para estudiar la aplicabilidad de las ecuaciones obtenidas al permitir derivar soluciones analíticas. Con esta finalidad se utilizan los resultados experimentales obtenidos por Wang et al. (2019) por medio de la técnica Particle Tracking Velocimetry (PTV) para medir la velocidad de las partículas. El sistema experimental utilizado por ellos consistió en un canal largo y angosto como se ilustra en la Figura 2. Consiste en dos placas de vidrio (50 cm x 50 cm) que están separados por espaciadores de polietileno para producir un espacio de 5 mm. El aparato se puede dividir en dos regiones, una tolva superior donde se almacenan las partículas para su descarga, y un canal inferior con una inclinación de 20° menor al ángulo de reposo del material. El material granular utilizado consistió en esferas de vidrio polidispersas de densidad $\rho_s = 240 \text{ kg/m}^3$ con diámetros medios de 1,31, 1,99 y 2,37 mm. Las densidades medidas para el medio fueron de 1547 ± 15 , 1484 ± 3 y $1480 \pm 11 \text{ kg/m}^3$, y los ángulos de reposo fueron de $21,1 \pm 1,2^\circ$, $21,7 \pm 0,9^\circ$ y $23,2 \pm 1,1^\circ$ para los diámetros de 1,31, 1,99 y 2,37 mm, respectivamente.

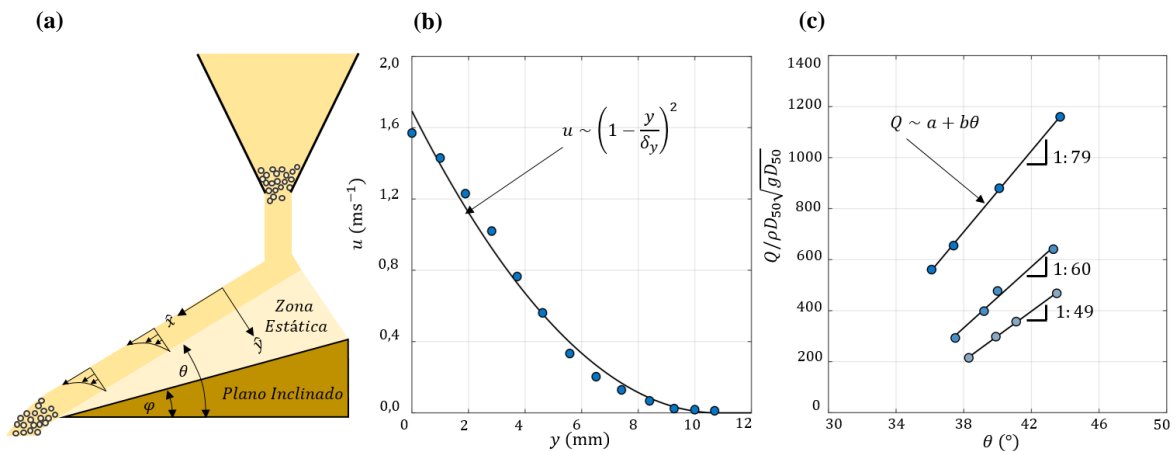


Figura 2. (a) Esquema de la configuración experimental utilizada por Wang et al. (2019). Se distingue una zona de flujo de espesor δ_y ubicada por sobre una región estática. (b) Perfiles de velocidad típicamente observados en la zona de flujo. Círculos corresponden a mediciones experimentales y línea segmentada a ajuste de tipo parabólico propuesto por los autores. (c) Relación entre el caudal adimensional y el ángulo de inclinación de la zona de flujo. Círculos corresponden a mediciones experimentales y línea segmentada a tendencia reportada por otros autores (MiDi 2004).

En la Figura 2-a se ilustra la formación de una región de flujo de pequeño espesor, directamente por sobre una región que permanece estática. El perfil de velocidad típico observado se presenta en la Figura 2-b, donde los círculos representan mediciones experimentales, y la línea negra corresponde al ajuste parabólico propuesto por Wang et al (2019). En la Figura 2-c se presentan los resultados para el caudal adimensional en función del ángulo de la zona de flujo, donde los círculos representan mediciones experimentales, y la línea negra continua corresponde a la tendencia reportada por el trabajo colectivo de otros autores (MiDi 2004).

Para aplicar el modelo elaborado se comienza por plantear las ecuaciones de balance de momentum en coordenadas cartesianas. Para un estado estacionario, despreciando las contribuciones inerciales, estas ecuaciones corresponden a:

$$\begin{aligned} 0 &= -\partial_y P + \partial_x \tau_{xy} + \rho g \cos \theta \\ 0 &= -\partial_x P + \partial_y \tau_{xy} + \rho g \sin \theta - \left(\frac{32 Y_0^2 \nu}{D_{50}^2} \right) \rho u \chi^{-1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Ahora bien, suponiendo un perfil de velocidad horizontalmente homogéneo, se sigue que las componentes del tensor de tasa de deformación, y del tensor de esfuerzos se encuentran dadas por:

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} &= 0, & \gamma_{yy} &= 0, & \gamma_{xy} &= u_y & \text{y} & \gamma &= \sqrt{2} |u_y| \\ \tau_{xx} &= 0, & \tau_{yy} &= 0 & \text{y} & \tau_{xy} &= \mu P \frac{u_y}{|u_y|}. \end{aligned} \quad (37)$$

Así, las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} 0 &= -\partial_y P + \rho g \cos \theta \\ 0 &= \mu \partial_y P + \rho g \sin \theta - \left(\frac{32 Y_0^2 \nu}{D_{50}^2} \right) \rho u \chi^{-1}. \end{aligned} \quad (38)$$

A partir de la primera de ellas se sigue que la presión se encuentra dada por:

$$P = \rho g \cos \theta \delta_y \left(\frac{y}{\delta_y} \right). \quad (39)$$

Sustituyendo este resultado en la segunda, se sigue que la componente horizontal de la velocidad satisface la siguiente ecuación:

$$0 = \rho g \sin \theta \left(1 - \frac{\mu}{\tan \theta} \right) - \left(\frac{32 Y_0^2 \nu}{D_{50}^2} \right) \rho u \chi^{-1}. \quad (40)$$

Con el cociente Y_0/Y determinado por:

$$\frac{Y_0}{Y} = \frac{Y_0 \mu \rho g \cos \theta y}{D_{50} \rho g \sin \theta |1 - \mu / \tan \theta|} = \frac{y}{\delta_y}. \quad (41)$$

Como la condición de flujo requiere que $Y \geq Y_0$, se tiene que sólo hay flujo en la zona con $y \leq \delta_y$, obteniendo la siguiente definición para el espesor de la zona de flujo:

$$\delta_y \equiv \frac{D_{50}}{Y_0 \mu} \tan \theta \left| 1 - \frac{\mu}{\tan \theta} \right|. \quad (42)$$

A partir de estos resultados se sigue que el perfil de velocidades corresponde a:

$$u = \mu \frac{D_{50}}{32 Y_0 \nu} g \cos \theta \delta_y \chi. \quad (43)$$

Finalmente, este resultado predice que el caudal de masa escala como:

$$Q \sim u_{\text{máx}} \delta_y \sim \sin \theta \tan \theta \left(1 - \frac{\mu}{\tan \theta} \right)^2. \quad (44)$$

A continuación, en la Figura 3 se presenta una comparación entre los caudales adimensionales y el ángulo de inclinación de la zona de flujo para los datos experimentales de Wang et al. (2019) (puntos) y la curva definida por la Ec. (43) para el modelo elaborado en este trabajo. Los datos experimentales fueron extraídos directamente de Wang et al. (2019) por medio del software Digitzelt, presentando errores del orden del tamaño de los

marcadores. En la Figura 3-a se presentan curvas ajustadas con dos parámetros libres: el coeficiente de proporcionalidad Q_0 que lleva a la relación de la Ec. 44: $Q = Q_0 u_{m\acute{a}x} \delta_y$, y el coeficiente de fricción μ . En la Figura 3-b se presentan curvas ajustadas con un sólo parámetro libre, manteniendo los coeficientes de fricción fijos y definidos por los ángulos de reposo reportados por Wang et al. (2019) para cada material ($21,1^\circ$, $21,7^\circ$ y $23,2^\circ$ para las partículas de diámetro 1,31, 1,99 y 2,37 mm, respectivamente). Ajustes realizados por medio del método de mínimos cuadrados no lineal y el algoritmo trust-region-reflective en el software MATLAB. En general se observa un buen ajuste para la curva definida por la Ec. (41), no obstante, al comparar el coeficiente de fricción calculado por mínimos cuadrados (ver Figura 3-a) se obtiene una alta diferencia en relación al obtenido empleando el ángulo de reposo ($15,9^\circ$ versus $21,1^\circ$). Esta diferencia puede tener origen en una disminución de la densidad a causa del rápido desplazamiento de las partículas, además de un eventual cambio en su régimen de movimiento.

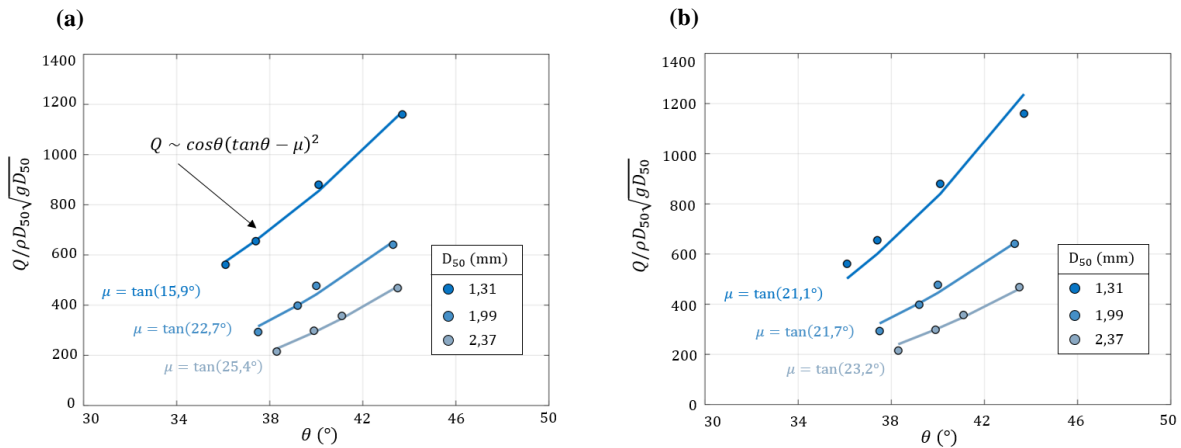


Figura 3. Comparación entre caudales adimensionales y el ángulo de inclinación de la zona de flujo para los datos experimentales de Wang et al. (2019) (puntos) y la curva definida por el modelo elaborado en este trabajo: $Q = Q_0 \cos\theta(1 - \mu/\tan\theta)^2$. (a) Ajuste por mínimos cuadrados utilizando dos parámetros libres. (b) Ajuste por mínimos cuadrados utilizando un sólo parámetro libre, manteniendo los coeficientes de fricción definidos por el ángulo de reposo del material.

En la Figura 4 se presenta una comparación entre los datos experimentales de Wang et al (2019) (puntos) y el ajuste de cuarto grado del modelo propuesto (líneas negras), para experimentos realizados con distintos diámetros de partícula y caudal. Los datos experimentales fueron extraídos directamente de Wang et al. (2019) por medio del software Digitizelt, presentando errores del orden del tamaño de los marcadores. Ambas funciones fueron ajustadas utilizando el método de mínimos cuadrados no lineal y el algoritmo trust-region-reflective en el software MATLAB. En general se observa un buen ajuste del modelo a los datos experimentales.

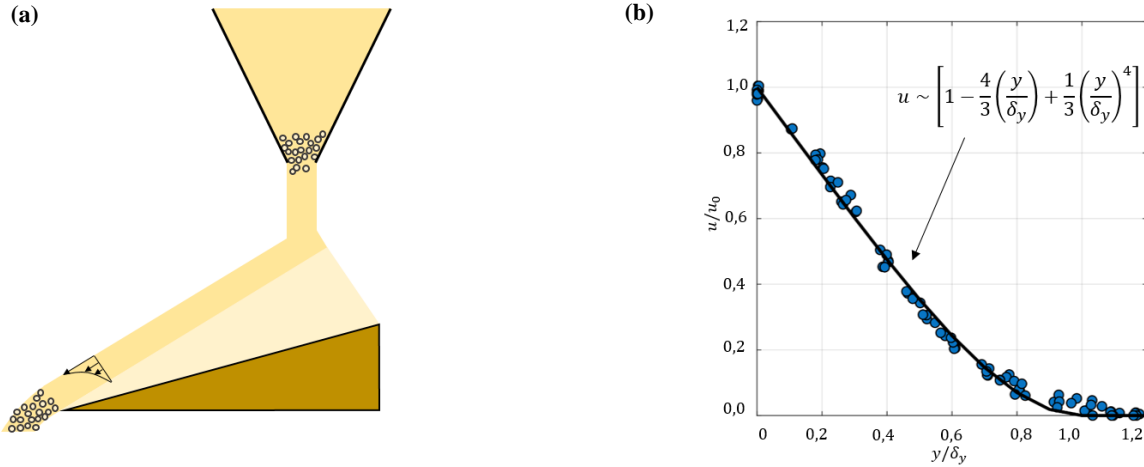


Figura 4. Comparación perfiles de velocidad horizontal entre resultados experimentales de Wang et al. (2019) (puntos) y ajuste según modelo propuesto (línea negra continua).

3.2 Flujo de Taylor-Couette

Para dar cuenta de la generalidad del modelo elaborado se evalúa su aplicabilidad al estudio del flujo de Taylor-Couette, en que los esfuerzos inducidos por un cilindro en rotación son la fuerza motriz del movimiento. Aquí, el material granular se encuentra confinado entre cilindros verticales concéntricos de paredes rugosas, y se pone en movimiento al girar el cilindro interior, según el esquema ilustrado en la Figura 5-a. Los perfiles de velocidad típicamente observados son ilustrados en la Figura 5-b. Estos datos provienen de una recopilación realizada por MiDi (2004), originada en los trabajos de Mueth et al. (2000), Bocquet et al. (2002), y da Cruz (2004).

Comenzando por plantear las ecuaciones de balance de momentum en coordenadas polares, para un estado estacionario, despreciando las contribuciones inerciales, se tiene:

$$0 = -\partial_r P + r^{-1} \partial_r (r \tau_{rr}) + r^{-1} \partial_\theta \tau_{\theta\theta} - r^{-1} \tau_{\theta\theta}$$

$$0 = -r^{-1} \partial_\theta P + r^{-2} \partial_r (r^2 \tau_{r\theta}) + r^{-1} \partial_\theta \tau_{\theta\theta} - \left(\frac{32 Y_0^2 \nu}{D_{50}^2} \right) \rho u \chi^{-1}. \quad (45)$$

Luego, es sencillo ver que estas se reducen a:

$$P = P_0$$

$$0 = r^{-2} \partial_r (r^2 \tau_{r\theta}) - \left(\frac{32 Y_0^2 \nu}{D_{50}^2} \right) \rho u \chi^{-1}. \quad (46)$$

Inspeccionando la segunda de éstas, se propone el siguiente *ansatz* para los esfuerzos de corte:

$$\tau_{r\theta} = A + B \left(\frac{r_w}{r} \right)^2, \quad (47)$$

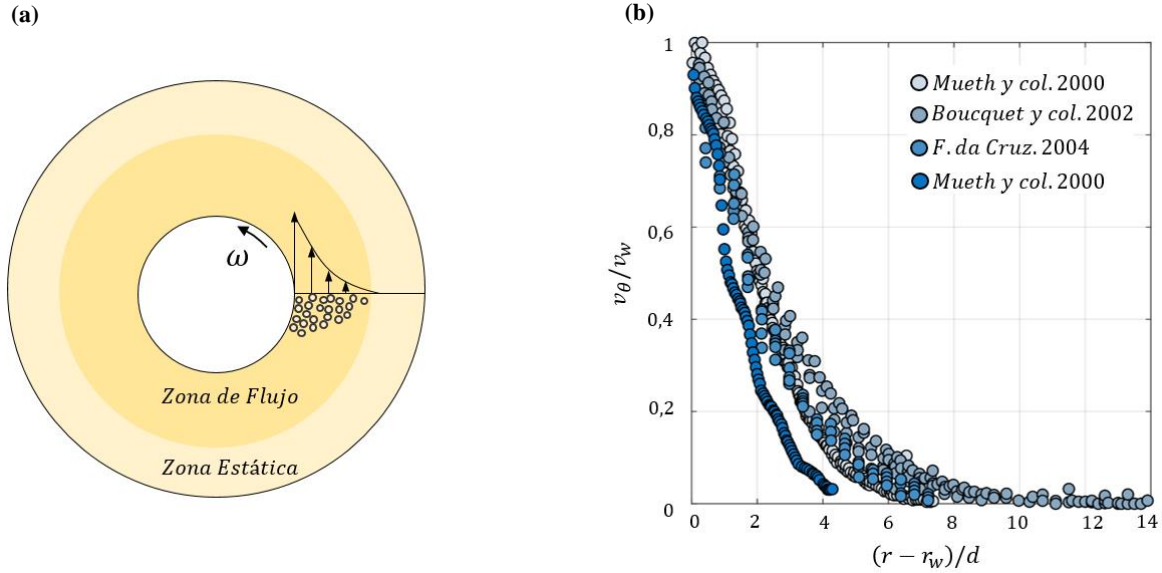


Figura 5. (a) Esquema flujo de Taylor Couette en celda anular. (b) Recopilación de datos experimentales de velocidad realizada por MiDi (2004), originada en los trabajos de Mueth et al. (2000), Bocquet et al. (2002), y da Cruz (2004). Corresponde a la velocidad normalizada en función de la distancia radial al cilindro interior en rotación (normalizada al diámetro medio de partícula).

donde r_w corresponde al radio del cilindro interior, y A y B son constantes que dependen de las condiciones de borde. En principio el valor del esfuerzo de corte aplicado en el cilindro interior es conocido, de modo que:

$$\tau_{r\theta}(r = r_w) = A + B = \mu_w P, \quad (48)$$

donde μ_w corresponde a la razón de esfuerzos en el cilindro interior. Ahora bien, la zona de flujo posee un tamaño $\delta_r > r_w$ definido por la condición:

$$\tau_{r\theta}(r = \delta_r) = A + B \left(\frac{r_w}{\delta_r} \right)^2 = \mu P. \quad (49)$$

Combinando las ecuaciones (49) y (48) se sigue que las constantes corresponden a:

$$\frac{A}{P} = \mu_w - \frac{\mu_w - \mu}{1 - \left(\frac{r_w}{\delta_r} \right)^2} \quad \text{y} \quad \frac{B}{P} = \frac{\mu_w - \mu}{1 - \left(\frac{r_w}{\delta_r} \right)^2}. \quad (50)$$

Por otro lado, el cociente Y_0/Y se encuentra determinada por

$$\frac{Y_0}{Y} = \frac{Y_0 \mu P r}{D_{50} 2|A|} = \frac{r}{\delta_r}, \quad (51)$$

donde:

$$\delta_r \equiv \frac{D_{50} 2|A|}{Y_0 \mu P} = \frac{2D_{50}}{Y_0 \mu} \left| \frac{\mu_w - \mu}{1 - \left(\frac{r_w}{\delta_r} \right)^2} - \mu_w \right|. \quad (52)$$

Así, el radio de la zona de flujo se encuentra determinado por la solución a la siguiente ecuación cúbica:

$$\delta_r^3 + \delta_r^2 \frac{2D_{50}}{Y_0} - \delta_r r_w^2 - r_w^2 \frac{2D_{50}}{Y_0} \frac{\mu_w}{\mu} = 0. \quad (53)$$

Este resultado demuestra que tanto δ_r como las constantes A y B definidas en la Ecuación (50) para expresar los esfuerzos de corte, se encuentran determinados por las propiedades del material granular y la razón de esfuerzos aplicados en el cilindro interior. Definiendo el espesor de la zona de flujo como $\Delta_r \equiv \delta_r - r_w$, se sigue que su valor para $\Delta_r \ll r_w$ se puede aproximar como:

$$\Delta_r \equiv \delta_r - r_w \approx \frac{D_{50}}{Y_0} \left(\frac{\mu_w}{\mu} - 1 \right) \left(1 + \frac{1}{r_w} \frac{2D_{50}}{Y_0} \right)^{-1}. \quad (54)$$

Luego, es claro que para que exista flujo se debe cumplir que $\mu_w > \mu$. Finalmente, a partir de estos resultados se sigue que el perfil de velocidades corresponde a:

$$u \sim \chi \frac{\mu_w P}{r} \left(1 - \frac{1 - \frac{\mu}{\mu_w}}{1 - \left(\frac{r_w}{\delta_r} \right)^2} \right). \quad (55)$$

A continuación, en la Figura 6 se presenta una comparación entre los perfiles de velocidad experimentales de (puntos) y el ajuste al resultado obtenido en la Ecuación (55) con el modelo propuesto. Los valores experimentales fueron obtenidos y ajustados de la misma manera que se hizo en 2.1 para el flujo en un plano inclinado. En general se observa que el modelo propuesto reproduce adecuadamente los perfiles de velocidad de todos los autores.

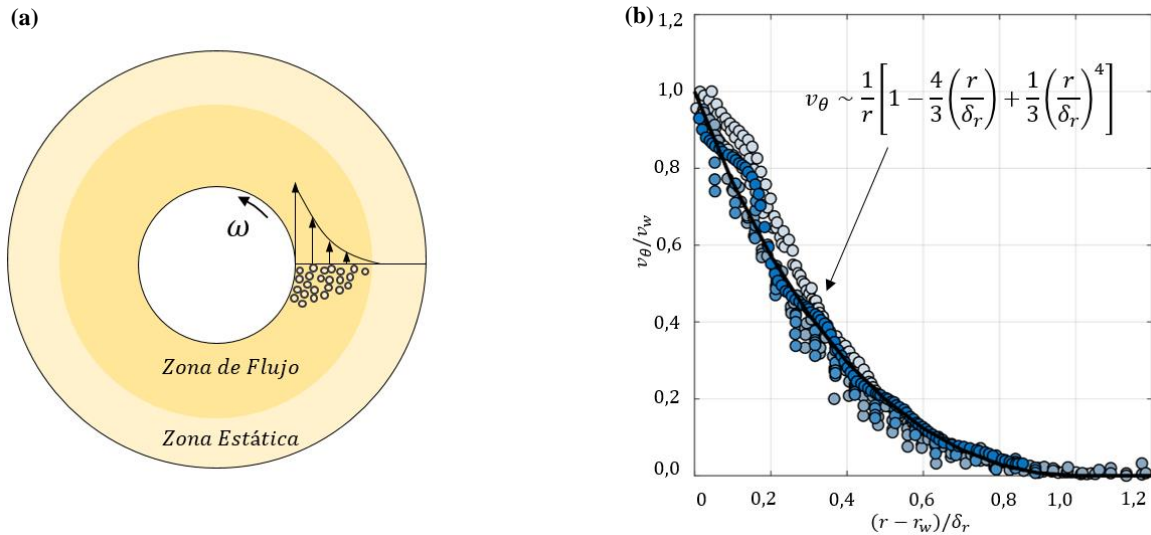


Figura 6. Comparación perfiles de velocidad normalizados entre resultados experimentales de Mueh et al. (2000), Bocquet et al. (2002) y da Cruz (2004), y ajuste mediante modelo propuesto (línea negra continua).

3.3 Flujo en silos

Para la validación de las ecuaciones de flujo gravitacional, se utilizarán los resultados experimentales obtenidos por Fullard et al. (2019) utilizando la técnica Particle Image Velocity (PIV) para los campos de velocidad en un silo con una y dos aberturas. El sistema experimental utilizado por los autores (Figura 7-a) consistió en un silo rectangular de ancho

$W = 200$ mm, altura $H = 350$ mm y profundidad $D = 15$ mm, con dos aberturas basales. Las aberturas basales tenían un tamaño de $D_0 = 14$ mm y estaban ubicadas simétricamente a ambos lados del eje del silo, espaciadas a diferentes distancias L . Las partículas utilizadas tenían un diámetro medio de 2,15 mm. El promedio de los campos de velocidad estacionarios calculados a partir de PIV se muestran en la Figura 7 para el caso de una sola abertura de $D = 14$ mm, y 4 casos donde hay dos aberturas separadas por una distancia de $L = 1, 4, 16$ y 48 mm.

En la Figura 7-b y Figura 7-c se muestran ambas componentes de la velocidad, referidas a diferentes alturas sobre la abertura de extracción para el caso de una sola abertura con $D_0 = 14$ mm. Cualitativamente, ambas componentes son simétricas alrededor del eje de la abertura y los perfiles de velocidad vertical se asemejan a distribuciones gaussianas hasta una altura de alrededor de 0,108 – 0,171 m, luego de la cual se aplanan en la zona central.

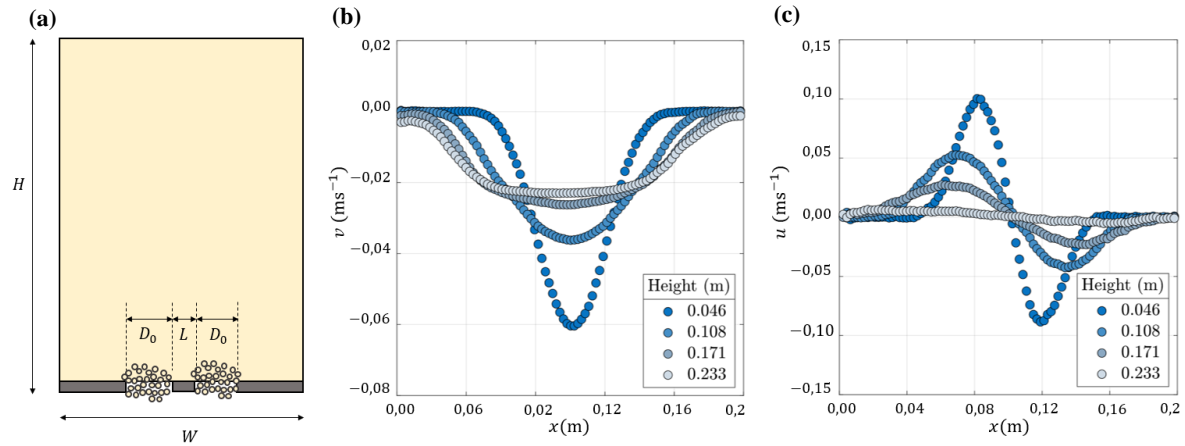


Figura 7. Esquema de la configuración experimental utilizada por Fullard et al. (2019). Las dimensiones del silo fueron $W = 200$ mm, $H = 350$ mm y $D = 15$ mm (profundidad). (b-c) Perfiles de velocidad vertical (b) y horizontal (c) recuperados a alturas que van desde 0,0046 a 0,233 m, para el caso de una abertura de $D_0 = 14$ mm.

Comenzando por plantear las ecuaciones de balance de momentum en coordenadas polares, para un estado estacionario, despreciando las contribuciones inerciales, se tiene:

$$0 = -\partial_y P + \partial_y \tau_{yy} + \partial_x \tau_{xy} - \rho g - \left(\frac{32Y_0^2 v}{D_{50}^2} \right) \rho v \chi^{-1} \quad (57)$$

$$0 = -\partial_x P + \partial_x \tau_{xx} + \partial_y \tau_{xy} - \left(\frac{32Y_0^2 v}{D_{50}^2} \right) \rho u \chi^{-1}.$$

Ahora bien, considerando que los esfuerzos de corte son del tipo friccionantes, y que sus direcciones principales coinciden con las de la tasa de deformación (principio de coaxialidad), se tiene:

$$\tau_{ij} = \mu P \frac{\gamma_{ij}}{|\gamma|}.$$

Luego, si

$$\gamma_{xx} = 2u_x, \quad \gamma_{yy} = -2u_x, \quad \gamma_{xy} = u_y + w_z \approx 0 \quad \text{y} \quad \gamma \approx 2\sqrt{2}|u_x|.$$

Se sigue que:

$$\tau_{xx} = \mu P \frac{u_x}{|u_x|}, \quad \tau_{yy} = -\mu P \frac{u_x}{|u_x|} \quad \text{y} \quad \tau_{xy} \approx 0$$

Este resultado es compatible con el supuesto de que las partículas se encuentran en un estado de empuje activo, en que son impulsadas en la dirección favorecida por la gravedad, con un esfuerzo principal mayor vertical (Kamrin, 2008). Así, el conjunto final de ecuaciones corresponde a:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{Y_0} &= \frac{D_{50}}{Y_0 \sin \phi h} \left[(1 - \sin \phi)^2 (\partial_x h)^2 + (1 + \sin \phi)^2 \left(\partial_y h + \frac{1}{1 + \sin \phi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ u &= -u_0 \chi (1 - \sin \phi) \partial_x h \\ v &= -u_0 \chi (1 + \sin \phi) \left(\partial_y h + \frac{1}{1 + \sin \phi} \right) \quad \text{con} \quad h = \frac{P}{\rho g} \quad \text{y} \quad u_0 = \frac{g D_{50}^2}{32 \nu Y_0^2} \end{aligned} \quad (57)$$

Este conjunto de ecuaciones se implementó en el software de elementos finitos COMSOL Multiphysics considerando la condición de incompresibilidad, con el objetivo de reproducir los resultados experimentales de Fullard et al. (2019) para el campo de velocidad. Las condiciones de borde utilizadas fueron: velocidad horizontal nula en paredes verticales del silo; velocidad vertical nula en base del silo; presión nula en la abertura superior del silo; velocidad descendente fija en la abertura de extracción (igual al valor experimental). La última condición se prefirió por sobre la de presión nula a causa de la limitación propia de un modelo continuo para capturar los efectos de creación y destrucción de cadenas de esfuerzos en la cercanía de la abertura del silo.

Los parámetros ajustables del modelo corresponden a $u_0 = g D_{50}^2 / 32 Y_0^2 \nu$ e Y_0 . El primero de estos posee unidades de velocidad, por lo que una primera estimación de su valor es $\sim \sqrt{g D_{50}}$ a la vez que para Y_0 se estimaron valores inferiores a la unidad. El ángulo de fricción interna se supuso como $\phi = 30^\circ$, un valor típico para el tipo de materiales utilizados en el experimento (Fullard et al., 2016). El ajuste de los dos parámetros libres (u_0 y Y_0) se realizó de forma iterativa.

Con el objetivo de comparar los resultados predichos por el modelo desarrollado en el presente trabajo y aquellos del tipo cinemáticos, también se implementó numéricamente el modelo de Nedderman & Tüzün (1979) a través del software COMSOL Multiphysics. Las condiciones de borde utilizadas fueron las mismas que las indicadas para comparar con los resultados de Fullard et al. (2019). En cuanto al parámetro de longitud de difusión, se tomó un valor de 2,5 veces el D_{50} de las partículas para todos los experimentos.

La calibración fue realizada para 13 de los 14 experimentos de Fullard et al. (2019), incluyendo el de abertura única con $D_0=14$ mm y los de doble abertura espaciados a $L=0.50-0.75-1.00-1.25-1.50-2.00-4.00-8.00-16.00-32.00-48.00-80.00$ mm. Se descartó el experimento con $D_0=28$ mm a causa del alto valor de las velocidades alcanzadas en la abertura de descarga en comparación con los demás experimentos. Los valores utilizados en la calibración correspondieron a $u_0 \approx \sqrt{g D_{50}} = 0.15 \text{ms}^{-1}$ e $Y_0 = 0.06 < 1$. Luego, como $Y_0 =$

D_h/D_{50} se obtiene un diámetro hidráulico para el conjunto de partículas en movimiento de $D_h = 17D_{50}=4$ mm.

En la Figura 8 se presenta una comparación entre los perfiles de velocidad vertical para diferentes instantes de tiempo entre los resultados experimentales de Fullard et al. (2019) (puntos), modelo propuesto (líneas negras) y modelo cinemático (líneas rojas). En general se observa que el modelo propuesto logra capturar de forma cualitativamente correcta los perfiles de velocidad en todos los escenarios, presentando las mayores diferencias en las zonas cercanas a las aberturas de extracción. Una situación similar se observa en la Figura 9 para los perfiles de velocidad horizontal. Al comparar los resultados del modelo propuesto con los predichos por el modelo cinemático, se logra observar una mejora sustancial en la descripción de ambas componentes del campo de velocidad para todos los escenarios.

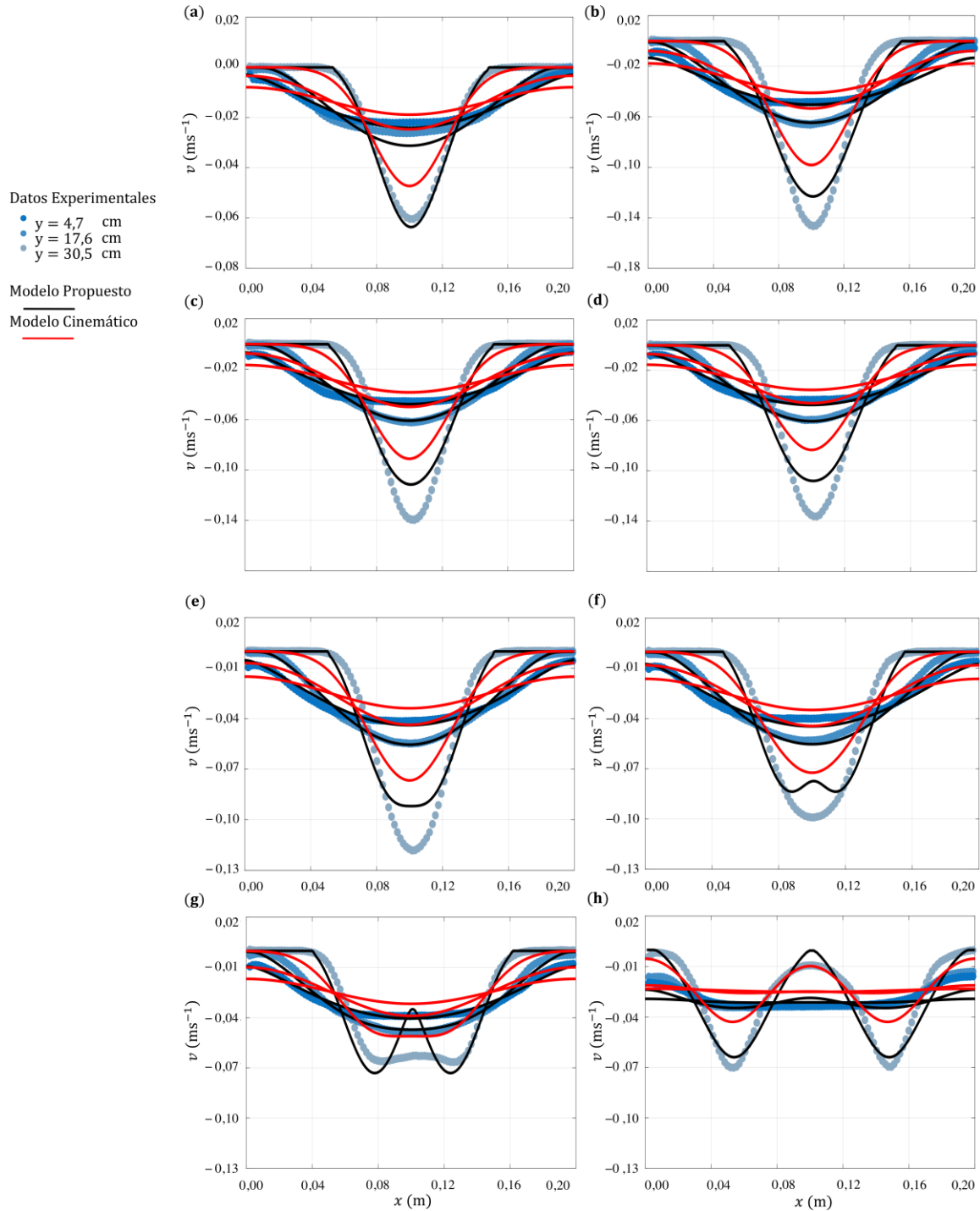


Figura 8. Comparación de perfiles de velocidad vertical para diferentes alturas entre los resultados experimentales de Fullard et al. (2019) (puntos), modelo propuesto (líneas negras) y modelo cinemático (líneas rojas) para (a) una sola abertura de tamaño $D_0 = 14$ mm, y (b-h) dos aberturas de tamaño $D_0 = 14$ mm separadas por una distancia de $L = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ y 80 mm.

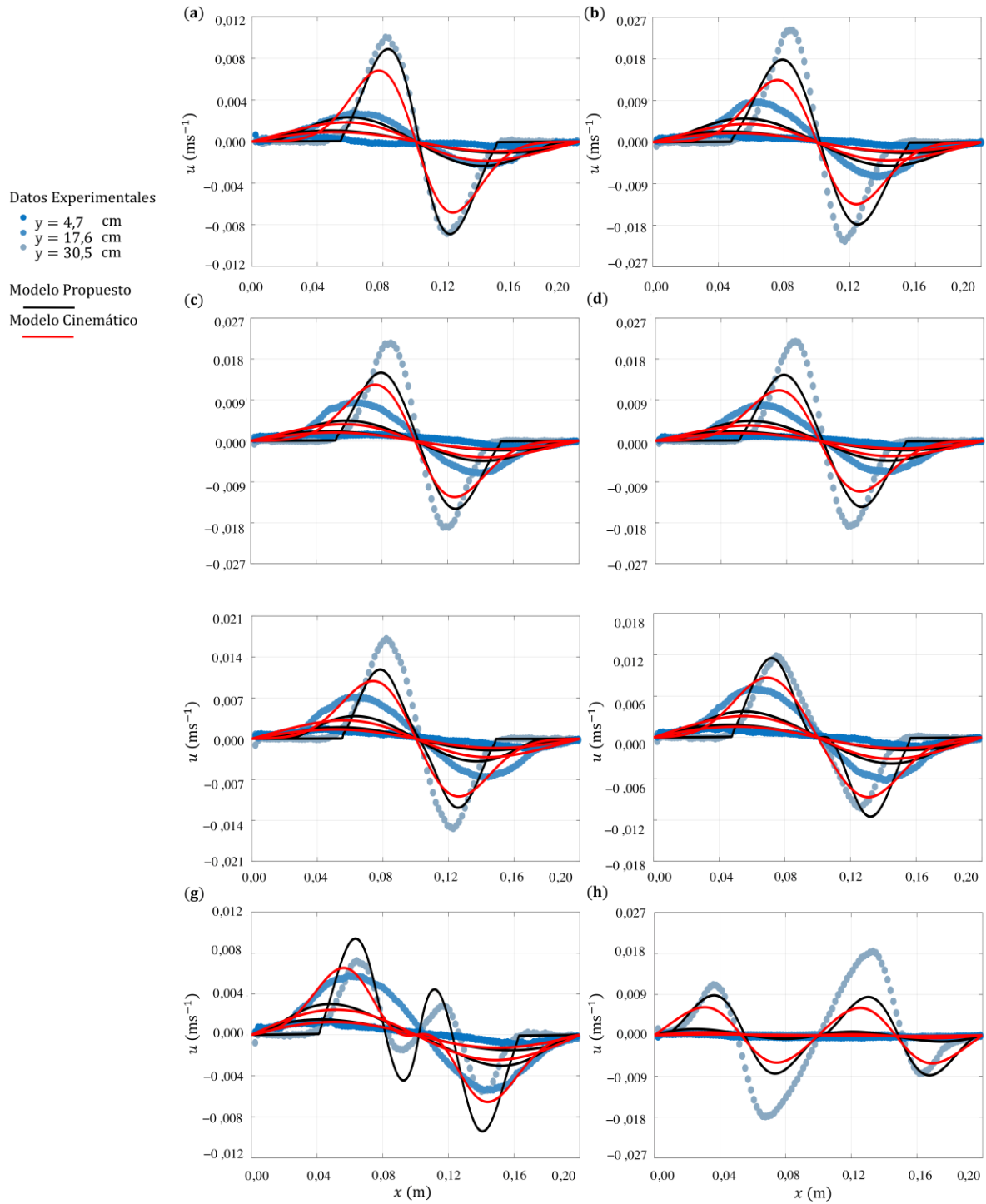


Figura 9. Comparación de perfiles de velocidad horizontal para diferentes alturas entre los resultados experimentales de Fullard et al. (2019) (puntos), modelo propuesto (líneas negras) y modelo cinemático (líneas rojas) para (a) una sola abertura de tamaño $D_0 = 14$ mm, y (b-h) dos aberturas de tamaño $D_0 = 14$ mm separadas por una distancia de $L = 1, 2, 4, 8, 16, 32$ y 80 mm.

4. CONCLUSIONES

La mecánica de medios granulares representa un permanente desafío para la comunidad científica, no tan solo por un genuino interés académico motivado en la ruptura de la aplicabilidad de los modelos hidrodinámicos clásicos, sino también por sus múltiples aplicaciones en ingeniería. Estas dificultades se deben mayormente a que el flujo disipa rápidamente la energía de sus partículas y pueden formar largas redes de contactos, aspectos que se ven acentuados cuando el medio granular es denso, con empaque aleatorio y condiciones cuasi-estáticas. En este trabajo se presenta el desarrollo analítico de un modelo del flujo granular denso, el que se resuelve numéricamente y compara con datos experimentales existentes en la literatura para flujos de naturaleza muy distintas, como lo son el flujo granular en un plano inclinado, en una celda Taylor-Couette y en un silo. Para todos ellos, los resultados obtenidos del modelo son altamente satisfactorios.

El único modelo comparable en cuanto a su capacidad de describir distintos tipos de flujos corresponde a la adaptación introducida por Kamrin (2008) al modelo de burbujas, también conocido como regla de flujo estocástico (SRF). El SRF presupone que el movimiento es causado por la difusión de espacio intersticial, con una dirección de deriva determinada por las líneas (o superficies) de deslizamiento admisibles en una condición de equilibrio límite. Este carácter difusivo es el que le permite reproducir características como la existencia de zonas de flujo en planos inclinados y celdas de Couette. Sin embargo, el SRF posee las limitaciones discutidas en el capítulo 5 para los modelos de tipo cinemáticos, en que la única diferencia radica en la definición de la dirección de deriva de las partículas (en el SRF depende del estado de tensiones). Por el contrario, el modelo elaborado en el presente trabajo responde a la naturaleza friccionante de los medios granulares, y su carácter difusivo (no lineal) emerge directamente de la aplicación de las leyes de la mecánica.

AGRADECIMIENTOS

R.M. y S.P. agradecen a la ANID y la Beca Regular Fondecyt No. 1211469.

A.T. agradece al Fondo Basal ANID AFB220002 (AMTC).

REFERENCIAS

- Andreotti, B., Forterre, Y., Pouliquen, O. (2013) *Granular Media: Between Fluid and Solid*. Cambridge University Press.
- Bazant, M. (2004) “A Theory of cooperative diffusion in dense granular flows”, arXiv:cond-mat.
- Bocquet, L., Wolfgang, L., Schalk, D., Lubensky, T., Gollub, J. (2002) “Granular shear flow dynamics and forces: experiment and continuum theory”, *Physical review E: Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, Vol. 65.
- Choi, J., Arshad, K., Bazant, M. (2005) “Velocity profile of granular flows inside silos and hoppers”, *Journal of Physics: Condensed Matter*, Vol. 17.
- da Cruz, F. (2004). *Friction and jamming in granular flows*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Marne a la vallee, Francia.

- Fullard, L., Breard, E., Davies, C., Godfrey, A., Fukuoka, M., Wade, A., Dufek, J., Lube, G. (2019) "The dynamics of granular flow from a silo with two symmetric openings", Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Vol. 475.
- Howes, F., Whitaker, S. (1985) "The spatial averaging theorem revisited", Chemical Engineering Science, Vol. 40, pp. 1387-1392.
- Kamrin, K.N., Bazant, M. (2007) "Stochastic flow rule for granular materials", Physical Review, E: Statistical, nonlinear, and soft matter physics, Vol. 75.
- Kamrin, K.N. (2008) "Stochastic and deterministic models for dense granular flow", Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology.
- Litwiniszyn, J. (1958) "Statistical methods in the mechanics of granular bodies", Rheologica Acta, Vol. 1, pp. 146-150.
- Litwiniszyn, J. (1966) "An application of the random walk argument to the mechanics of granular media", Kravtchenko, J., Sirieys, P.M (Eds.) Rheology and Soil Mechanics / Rhéologie et Mécanique des Sols. International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 82-89.
- Morales, R. (2022) "Modificación de teoremas de promediado volumétrico en medios porosos", Revista de la Sociedad Chilena de Ingeniería Hidráulica, Vol. 37, No. 2, pp. 101-112.
- MiDi, GDR (2004) "On dense granular flows", The European Physical Journal E, Vol. 14, pp. 341-365.
- Mueth, D., Debregeas, G., Karczmar, G., Eng, P., Nagel, S., Jaeger, H. (2000) "Signatures of granular microstructure in dense shear flows", Nature, Vol. 406, pp. 385-394.
- Mullins, J. (1972) "Stochastic theory of particle flow under gravity", Journal of Applied Physics, Vol. 43, pp. 665-678.
- Neederman, R., Tüzün, U. (1979) "A kinematic model for the flow of granular materials", Powder Technology, Vol. 23, pp. 243-253.
- Wang, N., Lu, H., Xu, J., Guo, X., Liu, H. (2019) "Velocity profiles of granular flows down an inclined channel", International Journal of Multiphase Flow, Vol. 110, pp. 96-107.

ACERCA DE LOS AUTORES

Rodolfo Morales Gálvez, Ingeniero Civil de Minas y Magíster en Ciencias de la Ingeniería Metalúrgica, Universidad Técnica Federico Santa María, Chile. Posee 5 años de experiencia en consultoría técnica, desempeñando el cargo de Ingeniero Especialista en el área de Geociencias de JRI Ingeniería S.A. Actualmente estudiante de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería Mención Fluidodinámica de la Universidad de Chile.

Aldo Tamburrino Tavantzis es Ingeniero Civil mención Hidráulica de la Universidad de Chile, M.Sc. y Ph.D. in Civil Engineering por la Universidad de Minnesota, EEUU. Es Profesor Asociado del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Chile, donde enseña cursos de pre y postgrado en dicha universidad. Actualmente sus áreas de interés se

centran fundamentalmente en hidráulica fundamental, flujos detríticos, granulares y de fluidos no-newtonianos.

Sergio Palma Moya, Ingeniero Físico de la Universidad de Santiago de Chile, Doctor en Ciencias de la Ingeniería Mención Fluidodinámica de la Universidad de Chile. Posee una estadía de investigación doctoral en la Universidad de Cambridge (Cambridge, Reino Unido) y Postdoctorado en Modelación Computacional aplicada en la Universidad de Queensland (Queensland, Australia). Actualmente es profesor Asistente y Sub-director (Campus Santiago) del Departamento de Metalurgia y Materiales de la Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

HIDRO-GRAFÍA

ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS



Los buques presentados en la HIDRO-GRAFÍA de este número presentan grandes tubos, que no son chimeneas ¿Cuál es la función de estos tubos?

- a) Son compresores de aire que durante la navegación permiten elevar el buque y así disminuir el área de la superficie en contacto con el agua, reduciendo el roce.
- b) Es un sistema de propulsión que aprovecha la velocidad del viento
- c) Son sistemas de aspiración de agua que permiten bajar la línea de flotación del buque para facilitar las tareas de carga y descarga.

NÚMERO ANTERIOR



La respuesta correcta a la HIDRO-GRAFÍA del número anterior es la alternativa c). En la foto aparecen el arqueólogo Leonard Wooley, que excavó entre 1922 y 1934 la ciudad de Ur (ubicada en el sur del actual Iraq) y su esposa Katharine¹. Corresponde a un sistema de drenaje de aguas servidas existente a comienzos del segundo milenio antes de Cristo en la ciudad de Ur, antigua Mesopotamia. Estos sistemas funcionaban como fosas de infiltración y estaban constituidos por tubos de cerámica perforados, ensamblados como se muestra en la figura, a los que podían llegar varios canales o desagües bajo el suelo. Los tubos estaban rodeados exteriormente de fragmentos de cerámica, facilitando el drenaje desde el interior de los tubos.

¹ Nacida de padres alemanes en Inglaterra, Katharine Menke estudió historia en Somerville College. No completó su grado debido a problemas de salud, los cuales continuaron afectándola a lo largo de su vida. Se casó con el Coronel Bertram Keeling en 1919, pero él falleció más tarde ese mismo año. La viuda Sra. Keeling se unió a la excavación de Woolley en Ur como artista en 1925. Una joven soltera en la excavación causó controversia, especialmente entre los fiduciarios de la Universidad de Pensilvania. Leonard Woolley resolvió el problema casándose con ella en 1927. La mayoría de las descripciones de ella dicen que era encantadora pero también bastante fría y manipuladora. Sin embargo, era una talentosa artista y muy capaz como arqueóloga. Llegó a ser la asistente principal en las excavaciones de Woolley en los últimos años de la excavación en Ur. Se dice que Agatha Christie, que visitó por primera vez las excavaciones en 1928, se basó en Katharine para crear el personaje Louise en su novela "Asesinato en Mesopotamia", quien es asesinada en su habitación en el campamento de los arqueólogos, cerca del sitio de excavación. <http://www.ur-online.org/personorg/13/>

INVITACION A CONTRIBUIR CON ARTÍCULOS

La Revista de la Sociedad Chilena de Ingeniería Hidráulica invita a contribuir con artículos para ser publicados en sus próximos números. Los artículos pueden ser en castellano o inglés.

Los artículos buscan difundir trabajos en el área de interés de la Sociedad Chilena de Ingeniería Hidráulica, especialmente aquellos relativos a la hidráulica, hidrología y mecánica de fluidos en general, así como otros aspectos relacionados con el agua, como su uso, gestión, recursos, tecnologías, historia, etc. Los artículos pueden ser de investigación teórica o aplicada, soluciones novedosas a problemas de ingeniería, difusión u otros temas de interés para la comunidad hidráulica nacional.

El formato de presentación de los trabajos puede solicitarse al Editor a la dirección electrónica atamburr@ing.uchile.cl

