

IV COLOQUIO NACIONAL

GENERACION ESTOCASTICA DE

SERIES CICLICAS

PATRICIO FERRER A. (M)

RICARDO SEGUEL G. (MM)

RESUMEN

En este trabajo se presenta una metodología que permite generar secuencias estocásticas de caudales medios anuales de series que presentan características cíclicas. El método propuesto se aparta de la generación tradicional con cadenas de Markov de orden uno imponiendo condiciones adicionales que permitan reproducir la característica cíclica de la serie histórica. Tanto para el método tradicional como para el método propuesto, se generan 10 series de 50 valores cada una y se comparan los resultados entre sí y con la serie histórica.

(M) Ingeniero Civil, M.E., socio de BF Ingenieros Civiles

(MM) Ingeniero Civil, BF Ingenieros Civiles

Tradicionalmente el diseño de sistemas hidráulicos en nuestro país se ha realizado procesando la estadística de caudales históricos afluentes al sistema. Esto lleva implícito la suposición que la serie histórica se va a repetir en el futuro exactamente igual.

Para levantar la restricción que implica la suposición anterior se han propuesto diversos métodos para generar series sintéticas. Entre estos, el más conocido es el modelo de Markov, el cual permite generar una serie de valores que tienen la misma media, desviación estándar y coeficiente de autocorrelación que los valores históricos.

En muchos casos, además de mantener los parámetros estadísticos de la serie histórica, interesa reproducir ciertas características cíclicas que puedan haberse detectado. El método de Markov no permite reproducir lo anterior, menos aun en aquellos casos en que los valores medidos tienen un coeficiente de correlación bajo y por lo tanto los valores generados van a depender fundamentalmente de la componente aleatoria de la ecuación de generación.

En este trabajo se presenta el método tradicional de generación y se propone y explica una nueva metodología para el caso de series cíclicas. Luego se entregan los resultados de ambos métodos correspondientes a la generación de 10 series de 50 valores cada una para la estación fluviométrica del río Grande en Puntilla San Juan. Finalmente se analizan los resultados y se entregan las principales conclusiones y recomendaciones.

2.- METODOLOGIA

2.1.- Modelo de Markov tradicional

El modelo de Markov de orden uno, para caudales anuales distribuidos normalmente tiene la siguiente expresión (1):

$$q_1 = \bar{q} + r(q_{1-1} - \bar{q}) + t_1 s \sqrt{1 - r^2}$$

donde:

q_1 : caudal medio anual del año 1

$\bar{q}$: promedio de los caudales medios anuales de la serie histórica

r : coeficiente de auto correlación de orden uno de los caudales medios anuales

s : desviación estándar de los caudales medios anuales

t_1 : variable aleatoria con distribución normal con media cero y varianza igual a uno.

Los valores se generan secuencialmente partiendo de un valor arbitrario q_0 y determinando en cada caso un valor de t_1 con un algoritmo de generación de números aleatorios normalmente distribuidos.

2.2.- Modelo para series cíclicas

Para simplificar la presentación, este método se explicará aplicándolo a un caso particular.

En la figura 1 se muestra un diagrama de barras de los caudales medios anuales del Río Grande en Puntilla de San Juan desde el año 1942 a 1976 (35 años). Si se acepta clasificar los años hidrológicos en 7 tipos (muy húmedo, húmedo, normal húmedo, normal, normal seco, seco y muy seco) con igual probabilidad de ocurrencia cada uno, un análisis de frecuencia determina que para el caso de la estación en estudio se tendrá un año húmedo o muy húmedo para un caudal medio anual superior a 7,5 m³/seg. Estos años aparecen sombreados en el diagrama de barras de la figura 1.

Al observar la figura 1 se verá que luego de un año húmedo se suceden desde 0 hasta 5 años consecutivos normales o secos. En la Tabla 1 se presenta el número de veces que en la serie histórica ocurren un determinado número de años normales o secos consecutivos.

FIG. 2
RELACIONES Q_t VS Q_{t+1}

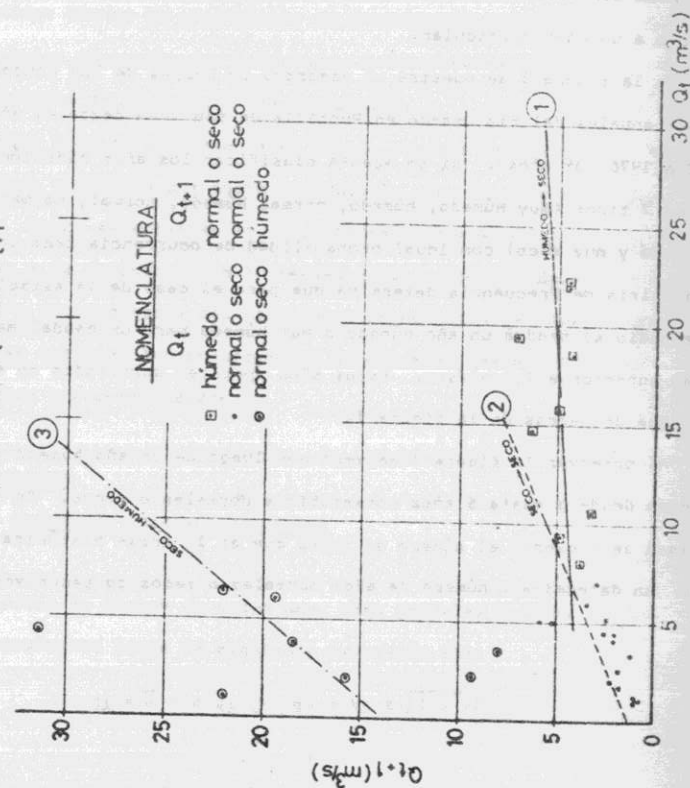
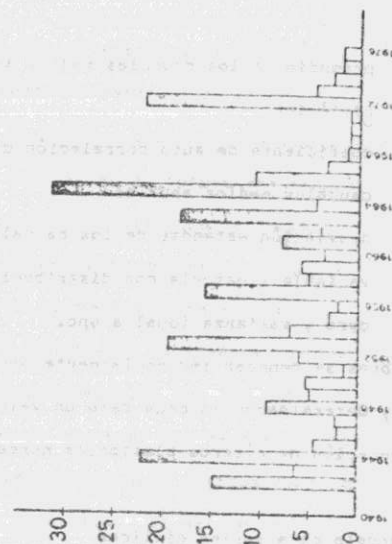


FIG. 1
CAUDALES MEDIOS ANUALES OBSERVADOS
RIO GRANDE EN PUNTA DE SAN JUAN



Número de años normales o secos consecutivos	Número de veces que ocurren en la serie histórica
0	1
1	3
2	0
3	3
4	2
5	1

A pesar de que la serie histórica no muestra la ocurrencia de 2 años normales o secos consecutivos, la Tabla 1 indica que es más probable que ocurran 3 años consecutivos normales o secos a que se sucedan 5 años o 0 año.

Se puede suponer entonces que el número de años normales o secos consecutivos después de un año húmedo tiene una cierta distribución de frecuencia. En este caso se adoptará una distribución normal con una media igual a 2.50 años y una desviación estandar igual a 1.65 años (calculadas de los valores de la Tabla 1).

Con la distribución normal definida se puede entonces generar una serie de números enteros que determinarán el número de años normales o secos que se producirán después de un año húmedo. De esta forma queda definida cualitativamente cada serie. Por ejemplo: si se generan números como los siguientes: 1, 4, 2, 0, 3, ...; los valores de la serie serán, en términos cualitativos, de la siguiente forma: H, NS, H, NS, NS, NS, NS, H, NS, NS, H, H, NS, NS, NS, H, ... (donde H se refiere a año húmedo o muy húmedo y NS a año normal o seco).

A continuación se explica como se cuantifican los valores de la serie ya definidos en forma cualitativa.

En la figura 2 se han graficado los caudales medios anuales de un determinado año (Q_t) versus los caudales del año siguiente (Q_{t+1}). Como se podrá observar de la figura, el grado de asociación entre el caudal de un año y el del año siguiente para el conjunto total de va

4.232 lores graficados, es prácticamente nulo ya que existe una gran dispersión de los puntos. Sin embargo si se observan los valores agrupados según las características de cada año se pueden trazar tres rectas de relación.

La primera de estas relaciona un año húmedo (Q_t) con el siguiente normal o seco (Q_{t+1}). La segunda recta relaciona años normales o secos entre si y la tercera relaciona un año normal o seco (Q_t) con el siguiente año húmedo (Q_{t+1}). Cada una de estas rectas tiene las siguientes características (Tabla 2).

TABLA 2
CARACTERISTICAS DE LAS REGRESIONES

	Recta 1		Recta 2		Recta 3	
	x	y	x	y	x	y
media, $\bar{x}, \bar{y}$	15.59	4.84	3.45	2.67	3.65	18.30
desv. std., S	5.36	1.18	1.87	1.67	1.88	7.54
coef. correlación, r	0.31		0.46		0.30	
a (u)	0.069		0.42		1.22	
b (u)	3.76		1.23		13.84	

$$y = ax + b$$

Para generar los valores de caudales medios anuales se utilizan las 3 rectas dependiendo de las características del último año generado (ya conocido) y del año por generarse (definido cualitativamente según el método ya explicado). La ecuación de generación es la siguiente (1):

$$y_i = \bar{y} + r \frac{S_y}{S_x} (x_i - \bar{x}) + t_i S_y \sqrt{1 - r^2} \quad (2)$$

ó, escrita en una forma alternativa:

$$y_i = ax_i + b + t_i S_y \sqrt{1 - r^2} \quad (3)$$

en donde la variable x representa a Q_t y la variable y representa a Q_{t+1} según corresponda en cada caso; S_x y S_y sus desviaciones estándar; t_i es una variable aleatoria con distribución normal $N(0, 1)$.

Entre los años húmedos se supone que no existe dependencia. Por lo tanto si el período de años normales o secos es igual a 0 a-

ños, el siguiente año húmedo se genera en forma aleatoria suponiendo que no existe dependencia entre años húmedos consecutivos. Haciendo $r = 0$ en la ecuación (2) se tiene:

$$y_i = \bar{y} + t_i S_y \quad (4)$$

donde:

$\bar{y}$: representa la media de todos los años húmedos :

(17,18 m³/seg)

S_y : es la desviación estándar de los años húmedos

(7,12 m³/seg)

La metodología propuesta para la generación estocástica de series cíclicas se esquematiza en el diagrama de flujo de la figura 3.

3.- RESULTADOS

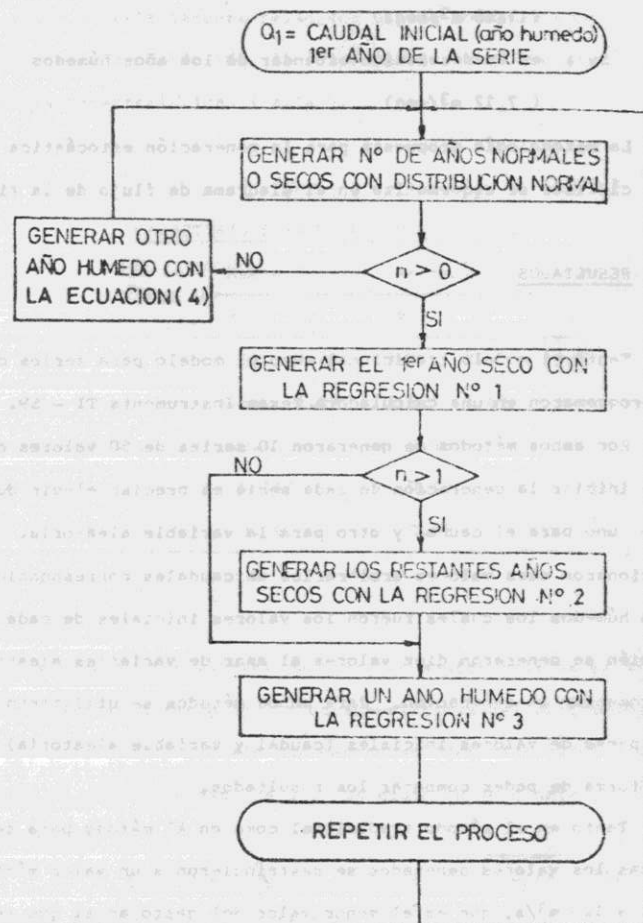
Tanto el modelo tradicional como el modelo para series cíclicas se programaron en una calculadora Texas Instruments TI - 59.

Por ambos métodos se generaron 10 series de 50 valores cada una. Para iniciar la generación de cada serie es preciso elegir dos valores: uno para el caudal y otro para la variable aleatoria. Se seleccionaron diez valores arbitrarios de caudales correspondientes a años húmedos los cuales fueron los valores iniciales de cada serie. También se generaron diez valores al azar de variables aleatorias para comenzar la generación. Para ambos métodos se utilizaron los mismos pares de valores iniciales (caudal y variable aleatoria) como una forma de poder comparar los resultados.

Tanto en el método tradicional como en el método para series cíclicas los valores generados se restringieron a un valor mínimo igual a 1.0 m³/s, que es el menor valor del gasto anual que se registra en la serie histórica. En el método modificado los gastos de los años secos se acotaron a un valor máximo de 7,5 m³/s y los gastos de los años húmedos a un valor mínimo de 7,5 m³/s. La restricción del caudal mínimo (1,0 m³/seg) se utiliza en forma frecuente en el método tradicional. En el método para series cíclicas las restricciones se emplean en forma muy esporádica.

En la figura 4 se presentan los resultados de los caudales me-

FIG. 3
DIAGRAMA DE FLUJO
MODELO DE GENERACION DE SERIES CICLICAS



4.235
dios anuales generado por el método tradicional y en la figura 5 se grafican aquellos obtenidos mediante el nuevo método. En estas figuras se ha sombreado los años húmedos o muy húmedos para diferenciarlos de aquellos normales o secos. En la Tabla 3 se resumen los valores de la media y desviación estándar de cada una de las series generadas.

TABLA 3

Serie Generada	Markov Tradicional		Series Cíclicas	
	$\bar{Q}$	S	$\bar{Q}$	S
1	8.58	6.51	9.20	9.41
2	7.47	4.86	8.12	7.68
3	8.13	5.27	7.44	7.20
4	10.57	6.96	8.04	7.94
5	7.50	6.13	6.96	6.41
6	8.87	7.18	8.65	8.12
7	8.58	6.56	8.53	8.16
8	9.18	6.64	8.04	8.42
9	7.99	7.02	6.33	6.17
10	9.80	7.23	8.83	8.97
Valor Medio	8.67	6.44	8.01	7.85
Valor Histórico	$\bar{Q} = 7.37$		$S = 7.44$	

En la figura 4 se observa que los valores generados contienen muchos años húmedos consecutivos que incluso alcanzan a 9 en un período. Esta situación es claramente contradictoria con lo ocurrido históricamente. Además se observa que con el método tradicional difícilmente se puede reproducir los años más húmedos de la serie de valores medidos. Por otra parte, en la Tabla 3 se tiene que para el método de Markov tradicional se tiende, en general, a sobrestimar la media y a subestimar la desviación estándar. Esto se debe, fundamentalmente, al hecho que el modelo tradicional tiende a generar valores negativos en cuyo caso este es reemplazado por el valor mínimo aceptado para la estación en estudio ($1.0 \text{ m}^3/\text{seg}$).

En el método para series cíclicas se observa, en la figura 5,

FIG. 4
CAUDALES MEDIOS ANUALES GENERADOS
MODELO DE MARKOV TRADICIONAL

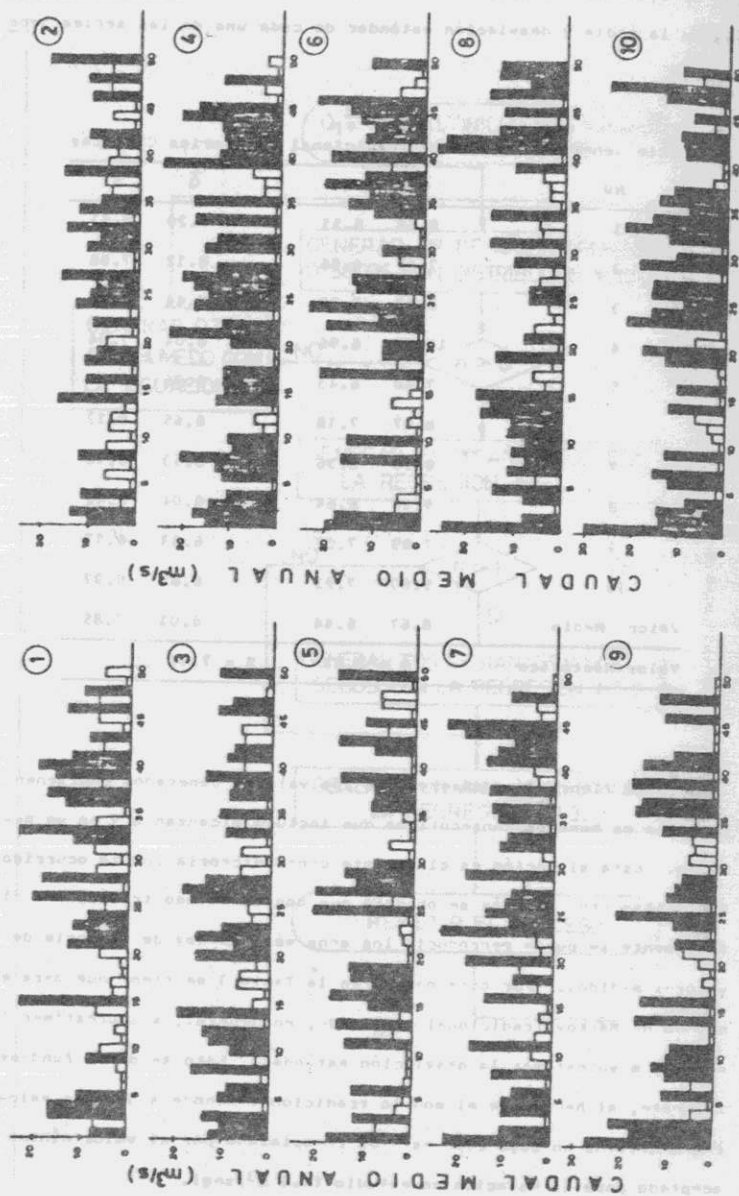
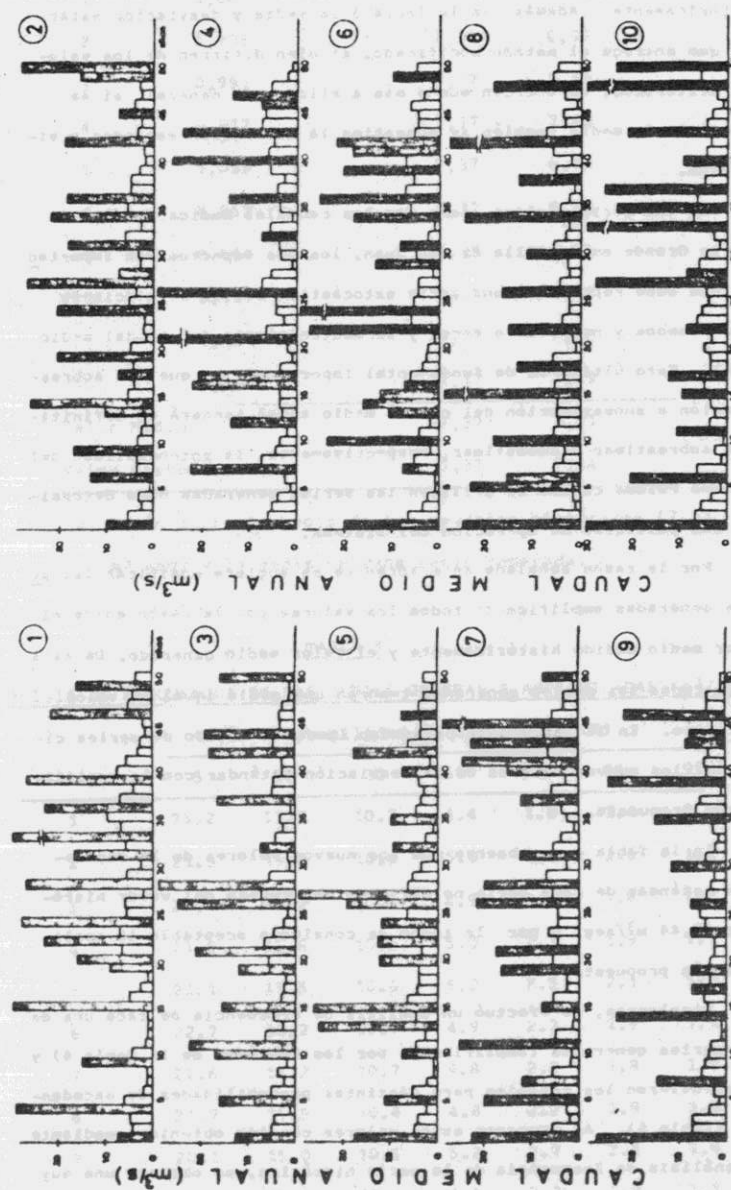


FIG. 5
CAUDALES MEDIOS ANUALES GENERADOS
MODELO PARA SERIES CICLICAS



que la secuencia de años húmedos y normales o secos se asemeja bastante a lo ocurrido históricamente. También se aprecia que el método es capaz de reproducir años tanto o más húmedos que los ocurridos históricamente. Además, en la Tabla 3 la media y desviación estándar que entrega el método modificado, si bien difieren de los valores históricos, se acercan mucho más a ellos y en general, si se subestima la media también se subestima la desviación estándar y viceversa.

En una serie cíclica, como son los caudales medios anuales en el río Grande en Puntilla de San Juan, los dos aspectos más importantes que debe reproducir una serie estocástica son la secuencia de años húmedos y normales o secos y el mantenimiento del caudal medio anual. Esto último es de fundamental importancia ya que una sobrestimación o subestimación del caudal medio anual tenderá en definitiva a sobrestimar o subestimar, respectivamente, la potencialidad del Sistema Paloma cuando se utilicen las series generadas para determinar las políticas de operación del Sistema.

Por la razón señalada anteriormente se sugiere modificar las series generadas amplificando todos los valores por la razón entre el valor medio medido históricamente y el valor medio generado. De esta forma todas las series generadas tendrán una media igual al valor histórico. En la Tabla 4 se presentan (para el Método de series cíclicas) los nuevos valores de la desviación estándar con la ampliación propuesta.

En la Tabla 4 se observa que los nuevos valores de la desviación estándar de cada serie no difieren mayormente del valor histórico (7,44 m³/seg) y por lo tanto se considera aceptable la ampliación propuesta.

Finalmente, se efectuó un análisis de frecuencia de cada una de las series generadas (amplificadas por los factores de la Tabla 4) y se obtuvieron los caudales para distintas probabilidades de excedencia (Tabla 5). Al comparar estos valores con los obtenidos mediante un análisis de frecuencia de la serie histórica, se observa una muy buena aproximación.

NUEVAS DESVIACIONES ESTÁNDAR DE SERIES GENERADAS

Serie Nº	Factor (x)	Metodo para Series Cíclicas	
		$\bar{Q}$	S
1	0,801	7,37	7,54
2	0,908	7,37	6,97
3	0,991	7,37	7,13
4	0,917	7,37	7,28
5	1,059	7,37	6,80
6	0,852	7,37	6,92
7	0,864	7,37	7,05
8	0,917	7,37	7,72
9	1,164	7,37	7,18
10	0,835	7,37	7,49
Valor Medio		7,37	7,21
Valor Histórico		7,37	7,44

(x) razón entre la media de los caudales históricos (7,37

m³/seg) y la media de cada serie generada.

TABLA 5

ANÁLISIS DE FRECUENCIA DE LAS SERIES GENERADAS AMPLIFICADAS (m³/seg)

Serie	Probabilidad de Excedencia (%)						
	5	10	20	50	80	85	95
1	25.2	17.2	10.7	4.4	1.8	1.4	0.8
2	21.3	15.4	10.4	5.0	2.4	2.0	1.2
3	22.4	15.9	10.6	4.9	2.2	1.9	1.3
4	21.6	15.6	10.5	5.0	2.3	1.9	1.1
5	21.1	15.5	10.6	5.2	2.5	2.1	1.3
6	22.7	16.2	10.7	4.9	2.3	1.9	1.1
7	22.6	16.2	10.7	4.8	2.2	1.8	1.0
8	21.7	15.5	10.4	4.8	2.2	1.8	1.0
9	20.1	15.0	10.5	5.2	2.7	2.2	1.4
10	21.7	15.5	10.4	4.8	2.3	1.9	1.1
Promedio	22.0	15.8	10.6	4.9	2.3	1.9	1.1
Histórica	22.7	16.1	10.6	4.8	2.1	1.8	1.0

Comparando los resultados obtenidos de la generación estocástica de caudales medios anuales por el método de Markov tradicional y el método de series cíclicas, para la estación fluviométrica del río Grande en Puntilla de San Juan, el nuevo método presenta las siguientes ventajas:

- El método para series cíclicas permite reproducir los períodos de años normales o secos que ocurren entre años húmedos en una forma similar a la que se manifiesta en los valores medidos. El método tradicional genera un gran número de años húmedos consecutivos lo que no se compadece con lo ocurrido históricamente.
- El nuevo método permite reproducir años tanto o más húmedos que los ocurridos históricamente. El método tradicional difícilmente puede generar años húmedos similares a los medidos.
- El método tradicional tiende, en general, a sobrestimar la media y subestimar la desviación estándar. El método para series cíclicas, en la mayoría de las series generadas (8 de 10) tiende a sobrestimar la media y también a sobrestimar la desviación estándar.
- Si a cada valor generado por el nuevo método se le aplica un factor de corrección igual a la razón entre el valor promedio histórico y el de la serie generada correspondiente, se obtienen series estocásticas con una media igual a la histórica y las desviaciones estándar que resultan se aproximan bastante a la calculada con los valores medidos.
- El análisis de frecuencia de las series generadas, una vez amplificadas por el factor de corrección, da resultados bastante concordantes con los que se obtienen al hacer el mismo análisis a la serie histórica.

- 1.- Brown, E. y E. Torretti, "Experimentación con el Modelo de Markov de Primer Orden en la Generación Estocástica de Caudales", Centro de Recursos Hidráulicos, U. de Chile, Sept. 1978.
- 2.- BF Ingenieros Civiles, "Operación del Sistema Paloma", Dirección de Riego, M.O.P., Dic. 1978.
- 3.- Loucks, D.P., "Stochastic Methods for Analyzing River Basin Systems", Cornell University, New York, Agosto 1969.