

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

XVII CONGRESO CHILENO DE HIDRÁULICA

MODELO ANALÍTICO PARA EL ANÁLISIS HIDROLÓGICO DE CUENCAS URBANAS

PEDRO RIVERA¹
MACARENA ZEGPI²
JOSÉ PEDRO MONTT³
JORGE GIRONÁS⁴
BONIFACIO FERNÁNDEZ⁵

RESUMEN

Guo y Adams (1998) presentaron una metodología para estimar la función de probabilidad del volumen de escorrentía (v_r) y caudal máximo generado (Q_p) en cuencas urbanas utilizando un modelo lluvia-escorrentía y la distribución de probabilidad conjunta del volumen y la duración de las tormentas, modeladas como variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente. En algunos casos los registros de precipitación no muestran esta independencia entre las variables, por lo que un modelo de este tipo podría fallar en la estimación las funciones de distribución del volumen de escorrentía y caudal máximo generado. En este trabajo se propone un modelo analítico basado en el de Guo y Adams (1998), pero con una caracterización distinta de las tormentas, considerando la intensidad media (i) y la duración (t) de las tormentas como variables independientes exponencialmente distribuidas y relacionadas con el volumen de precipitación a través de la relación $v = i \cdot t$. Para la validación del modelo se utilizan los datos de precipitación de la ciudad de Santiago, en los que se aprecia cierto grado de correlación entre las duraciones y los volúmenes de lluvia, y una cuenca ejemplo con parámetros físicos definidos por los autores, la que también se simula en SWMM, obteniéndose un muy buen ajuste entre las curvas de frecuencia calculadas por ambos métodos.

¹ Ing. Civil, MS, Dirección General de Aguas, Ministerio de Obras Públicas, Chile.

² Alumna del programa de Magíster en Ciencias de la Ingeniería, DIHA, Pontificia Universidad Católica de Chile - mail: mdzegpi@puc.cl.

³ Ing. Civil, MS, Pontificia Universidad Católica de Chile.

⁴ Ing. Civil, MS, PhD Candidate, Dep. Civil Eng., Colorado State University - mail: jgironas@engr.colostate.edu.

⁵ Ing. Civil, MS, PhD, Profesor Titular, DIHA, Pontificia Universidad Católica de Chile - mail: bfernand@ing.puc.cl.

1. INTRODUCCIÓN

La cuantificación del comportamiento hidrológico en lugares con información escasa es uno de los tópicos más desafiantes en el campo de la hidrología. En Chile, así como en otros lugares del mundo, es poco usual contar con datos reales de caudal y volumen de escurrimiento en cuencas urbanas, por lo que el análisis hidrológico basado en el estudio de observaciones resulta impracticable en la mayoría de los casos. Ante esto, sería ideal contar con metodologías que permitan estimar la respuesta de las cuencas usando la información disponible de sus características físicas y de variables climáticas.

Como solución al problema planteado, se han usado ampliamente herramientas computacionales que permiten simular en forma continua la respuesta hidrológica de una zona urbana, representándola a través de ciertos parámetros geomorfológicos y considerando como variable que excita al sistema a una serie continua de precipitaciones. De esta forma, el problema de estimar la serie de caudal se puede abordar razonablemente a través de la modelación hidrológica de la cuenca y el estudio de la serie de precipitaciones. La efectividad de esta técnica está condicionada a la validez de los supuestos de la modelación, que si bien trata de representar con base física sus características hidrológicas, de todas formas no son necesariamente ciertas.

Una de las desventajas de la herramienta computacional, es la dificultad de entender realmente el peso que tienen las diferentes variables físicas de la cuenca en la hidrología, ya que la serie hidrológica de respuesta contiene implícitamente las propiedades del sistema. Sería más útil, desde el punto de vista del estudio de cuencas urbanas, disponer de un modelo analítico para estimar la función de distribución de probabilidad de las variables hidrológicas de interés, que habitualmente son las características de las tormentas, el volumen de escurrimiento y el caudal máximo.

Diversos autores han abordado este tema y propuesto modelos para estimar las funciones de probabilidad del volumen de escorrentía y del caudal máximo generado en cuencas no urbanas, representando las características de las tormentas a través de un modelo estocástico y adoptando un modelo de escorrentía que incorpore las características físicas de la cuenca y permita transformar la función de distribución del volumen total de precipitación en una función de distribución de volumen de escorrentía. Típicamente se han modelado las tormentas bajo supuestos de independencia entre sus características y adoptado modelos de infiltración basados en tasas de pérdida constante, promediada en el tiempo y espacio. Por ejemplo, Eagleson (1972) utilizó un modelo exponencial bivariado para representar la intensidad y la duración de las tormentas, considerándolas como variables aleatorias estadísticamente independientes y un modelo de tasa de infiltración constante para estimar la distribución del volumen de escorrentía, finalmente se basó en la teoría de onda cinemática para estimar la curva de frecuencia de caudales máximos. Díaz-Granados et al. (1984) se basó en el modelo de lluvia propuesto por Eagleson (1972) y usó como modelo de infiltración la ecuación de Philip, con lo que derivó la función de densidad de probabilidad (FDP) conjunta de la intensidad de lluvia efectiva y duración. Finalmente, usó como modelo de escorrentía el hidrograma unitario instantáneo geomorfoclimático (GcIUH). Los modelos presentados anteriormente tienen el eventual inconveniente de que consideran las variables que caracterizan a las tormentas como variables aleatorias independientes, lo que podría generar la aparición de errores importantes en la caracterización de las precipitaciones y, por ende, en los caudales estimados.

Dado que las variables que caracterizan las tormentas podrían ser dependientes, Córdova y Rodríguez-Iturbe (1985) estudiaron el efecto de considerar correlación positiva entre la intensidad y la duración de las tormentas en la estimación de la distribución de probabilidad de caudales, concluyendo que ésta posee un gran impacto en la estructura probabilística de la escorrentía superficial. Para ello, consideraron que la intensidad y duración de las tormentas siguen una distribución exponencial bivariada, expresión que incluye explícitamente al coeficiente de correlación lineal de Pearson. Más tarde, Kurothe et al. (1997) derivó un modelo analítico para la estimación de la distribución de caudales considerando un tipo de función exponencial bivariada que permite modelar la intensidad y duración como variables dependientes correlacionadas negativamente. Al igual que en el trabajo de Córdova y Rodríguez-Iturbe (1985) se concluyó que la correlación entre las variables tiene un importante efecto en la estimación de funciones de distribución de caudales. Luego, Goel et al. (2000) desarrolla un modelo más general, que permite derivar la FDP de caudales considerando el coeficiente de correlación sin restricciones de signo.

Los modelos que abordan la dependencia descritos más arriba tienen el inconveniente de que las funciones de distribución marginales deben ser las mismas para cada una de las variables, lo que no es necesariamente cierto y además abordan la dependencia a través del coeficiente de correlación lineal de Pearson, en circunstancias de que las variables pueden presentar otra estructura de dependencia. En los últimos años se ha introducido al campo de la estadística y más específicamente al de la hidrología el concepto de “copula” para representar la dependencia entre variables, herramienta que permite evitar las restricciones antes expuestas. En términos generales, una copula es una función que ensambla funciones de distribución unidimensionales para formar funciones de distribución multivariadas, representando la estructura de dependencia entre las variables por una función en vez de un coeficiente. El uso de esta herramienta permitiría conseguir modelos menos restrictivos y más representativos de los fenómenos hidrológicos.

Respecto del desarrollo de modelos analíticos para la obtención de curvas de frecuencia de volumen de escorrentía y caudales en cuencas urbanas la mayoría de los trabajos se basan en el supuesto de independencia de las variables que caracterizan las tormentas y en el uso del coeficiente de escorrentía para calcular la precipitación efectiva. Uno de los trabajos más recientes y completos es el de Guo y Adams (1998), en el que se modela el volumen total caído y la duración como variables exponenciales independientes y se estiman las pérdidas por infiltración a través de la ecuación de Horton. Finalmente, para obtener la curva de frecuencia de caudales se utiliza el hidrograma unitario instantáneo (IUH).

En el presente trabajo se desarrolla las expresiones para la distribución del volumen de escorrentía y del caudal máximo, siguiendo la misma metodología que la propuesta por Guo y Adams (1998), pero considerando la dependencia entre la magnitud y la duración de las tormentas a través de la intensidad media del evento, proponiendo un modelo basado en la modelación de la intensidad media y la duración por tormenta como variables independientes distribuidas exponencialmente. Posteriormente, se determina la función de probabilidad acumulada teórica de las tormentas obtenidas con el modelo propuesto, la que se acopla con el modelo de infiltración y de transformación lluvia efectiva-escorrentía para el desarrollo de las FDP del volumen de escorrentía y de caudales. Finalmente, se aplican ambos modelos a una cuenca irreal ubicada en la ciudad de Santiago. Ésta se simula con el modelo computacional SWMM y se comparan los resultados con lo obtenido con los modelos analíticos.

2. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DEL VOLUMEN DE AGUA CAÍDA POR EVENTO

En algunos lugares la dependencia entre el volumen de agua caída en una tormenta (v) y su duración (t) suele ser importante, por ejemplo, en la Figura 1 se presentan los volúmenes y duraciones de todas las tormentas de la ciudad de Santiago de Chile entre 1917 y 1960. La modelación de estas variables como dependientes y la obtención de la función de probabilidad conjunta pueden ser complicadas para casos en que éstas no distribuyen normal, por lo que en este trabajo la dependencia entre v y t se representa modelando la intensidad media por tormenta (i) y su duración (t) como variables independientes, relacionadas con la magnitud de la tormenta a través de la expresión (1). Para la intensidad y la duración se adopta el modelo exponencial, con parámetros estimados por el método de momentos tal como se muestra en Tabla 1.

$$v = i \cdot t \quad (1)$$

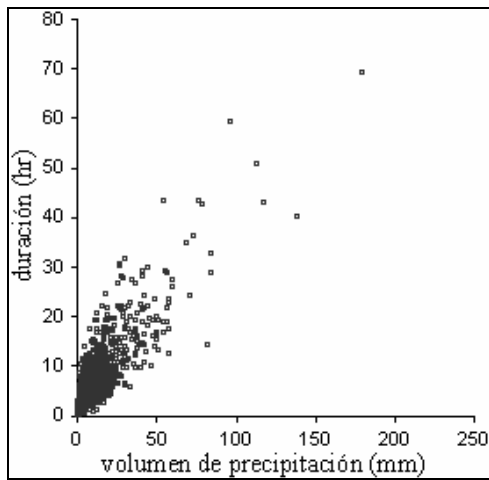


Figura 1: Volumen de precipitación y duración por tormenta.

Tabla 1: Funciones densidad de probabilidad de las características de las lluvias.

Variable	Función densidad de probabilidad	Parámetro
Intensidad	$f_i(I) = ?e^{-?I}$	$g = \frac{1}{i}$
Duración	$f_t(T) = ?e^{-?T}$	$l = \frac{1}{t}$

Considerando estas relaciones, se obtiene la función de probabilidad acumulada de la magnitud para cualquier duración y también la condicionada para una duración menor que un cierto valor.

2.1. LLUVIAS DE CUALQUIER DURACIÓN

Para el caso en que las precipitaciones pueden ser de cualquier duración, la probabilidad de que v sea menor que un cierto valor V está dada por la ecuación (2), donde el límite superior de la integral corresponde a la intensidad en términos de volumen y tiempo. La expresión (2) puede ser transformada usando la sustitución $u = \lambda \cdot t$.

$$F_v(V) = \int_0^{\infty} \int_0^{V/t} ? \cdot ? \cdot e^{-?t} \cdot e^{-?i} di \cdot dt = 1 - \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot e^{-\frac{? \cdot ? \cdot V}{u}} du \quad (2)$$

Esta integral no tiene solución analítica, por lo que se utiliza la función $O[x]$ como:

$$O[x] = \int_0^{\infty} e^{-u} e^{-\frac{x}{u}} du \quad (3)$$

Luego, haciendo uso de la ecuación (3), la función de probabilidad acumulada del volumen de agua caído para una tormenta de cualquier duración se puede calcular como:

$$F_v(V) = 1 - O[\lambda \cdot V] \quad (4)$$

Esta función queda definida en base a los parámetros de la distribución exponencial de la intensidad media y la duración de las tormentas, λ y T respectivamente. El sentido físico de la función $O[x]$ es que esta función corresponde a la probabilidad de excedencia de una variable aleatoria v que es el producto de dos variables independientes que siguen una distribución exponencial.

2.2 LLUVIAS DE DURACIÓN MENOR O IGUAL QUE T

La distribución de la magnitud de la lluvia condicionada a distintas duraciones, se puede obtener de manera similar al caso para cualquier duración. La probabilidad de que v sea menor que un cierto valor V , en lluvias de duración menor a T , $P(v=V; t=T)$, está dada por la ecuación (5). En este caso también se utiliza la sustitución $u=\lambda \cdot t$.

$$F_{vt}(V,T) = \int_0^T \int_0^{V/t} \lambda e^{-\lambda t} \cdot e^{-\frac{V}{t}} dt = 1 - e^{-\lambda T} - \int_0^{\lambda T} e^{-u} \cdot e^{-\frac{V}{u}} du \quad (5)$$

Al igual que el caso anterior, esta integral no tiene solución analítica, por lo que se define la función $OI[a,x]$, la que se reduce a $O(x)$ si a tiende a infinito.

$$OI[a,x] = \int_0^a e^{-u} e^{-\frac{x}{u}} du \quad (6)$$

Finalmente, usando $OI[a,x]$, se obtiene que la función de probabilidad acumulada del volumen de lluvia, condicionada a la duración de la tormenta es:

$$F_{vt}(V,T) = 1 - e^{-\lambda T} - OI[\lambda T, \lambda \cdot V] \quad (7)$$

3. VOLUMEN DE ESCURRIMIENTO SUPERFICIAL POR EVENTO

En esta sección se señala la metodología considerada para la estimación del volumen de escurrimiento, se presentan los parámetros de la modelación y las ecuaciones que rigen el proceso lluvia escorrentía.

3.1 MODELACIÓN DEL VOLUMEN DE ESCORRENTÍA (v_r)

El volumen de escurrimiento corresponde al volumen total de la precipitación menos las pérdidas que se puedan producir en la cuenca. Se consideran pérdidas debido al almacenamiento superficial y a infiltración.

Para la modelación se consideran dos tipos de superficies en la cuenca: permeable e impermeable. Ambas con una capacidad de almacenamiento distinta, siendo la del área permeable por lo general mayor que la del área impermeable. Debido a esto, el escurrimiento se produce primero en las zonas impermeables y posteriormente en las permeables. Además, se considera que sólo las áreas permeables permiten la infiltración, la que se modela según la ecuación de de Horton:

$$f_p(T) = f_c + (f_o - f_c) \cdot e^{-kT} \quad (8)$$

Donde f_p es la capacidad de infiltración del suelo en el instante T en mm/h, f_c es la capacidad de infiltración última en mm/h y f_o es la capacidad de infiltración al inicio de la tormenta en mm/h. El parámetro k es el coeficiente de decaimiento de la infiltración en 1/h.

Definiendo S_{mf} como el máximo volumen que se infiltra hasta el instante t , en mm, éste se calcula como:

$$S_{mf} = \int_0^t (f_c + (f_o - f_c) \cdot e^{-kT}) dT = f_c t + \frac{f_o - f_c}{k} \cdot [1 - \exp(-k \cdot t)] \quad (9)$$

El segundo término de la ecuación (9) corresponde al volumen de infiltración inicial hasta la saturación del suelo y se denota como S_{iw} :

$$S_{iw} = \frac{(f_o - f_c)}{k} [1 - e^{-kt}] \quad (10)$$

Para la modelación del fenómeno de infiltración se definen dos estados: con y sin lluvia. Para los periodos de lluvia se considera que en general la saturación se alcanza relativamente rápido para cualquier tipo de suelo y para los periodos sin lluvia se considera que el área permeable puede recuperar la capacidad de infiltración. Luego, se concluye que la capacidad de infiltración inicial para cada tormenta, f_o , se puede calcular usando un modelo de recuperación de infiltración como el propuesto por *Huber y Dickinson* [1983], según la ecuación (11).

$$f_o(b) = f_m - (f_m - f_c) \cdot e^{-k_d \cdot b} \quad (11)$$

Donde, b es el tiempo seco entre tormentas en h, k_d es el parámetro de recuperación de la capacidad de infiltración en 1/h y f_m es la máxima capacidad de infiltración que puede presentar el suelo en mm/h.

El parámetro b es una variable aleatoria, por lo que f_o y S_{iw} también lo son. Sin embargo, esta última se considera constante y se estima como su valor esperado suponiendo que b distribuye exponencial con parámetro f . Entonces:

$$E(S_{iw}) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} S_{iw} \cdot I \cdot f \cdot e^{-I t - f b} db \cdot dt = \frac{(f_m - f_c)k_d}{(k + I)(k_d + f)} \quad (12)$$

En resumen, se tiene que el máximo volumen de infiltración por evento es:

$$S_{mf} = f_c t + S_{iw} \quad (13)$$

Para la modelación de las pérdidas por almacenamiento superficial se define la altura de detención superficial, en mm, de las superficies permeables e impermeables, S_{dp} y S_{di} respectivamente. Luego, el volumen de agua generado en las zonas impermeables viene dado por la ecuación (14) y el generado en las zonas permeables por la ecuación (15).

$$v_{ri} = \begin{cases} 0 & v \leq S_{di} \\ v - S_{di} & v > S_{di} \end{cases} \quad (14)$$

$$v_{rp} = \begin{cases} 0 & v \leq S_{dp} + S_{iw} + f_c t \\ v - S_{dp} + S_{iw} + f_c t & v > S_{dp} + S_{iw} + f_c t \end{cases} \quad (15)$$

En que S_{iw} en realidad corresponde a $E(S_{iw})$.

Para calcular el volumen de escurrimiento total de una cuenca se define como h el porcentaje de áreas impermeables y la suma de S_{dp} y $E(S_{iw})$ se define como S_{il} , lo que corresponde a las pérdidas iniciales en las superficies permeables debido a infiltración y detención superficial. Entonces el volumen de escurrimiento total viene dado por la ecuación (16).

$$v_r = \begin{cases} 0 & v \leq S_{di} \\ h(v - S_{di}) & S_{di} < v \leq S_{il} + f_c t \\ v - S_d - f_c(1-h)t & v > S_{il} + f_c t \end{cases} \quad (16)$$

En que S_d es la altura de detención superficial equivalente de la cuenca, que se obtiene como el promedio ponderado de las detenciones parciales:

$$S_d = h \cdot S_{di} + (1-h) \cdot S_{dp} \quad (17)$$

3.2 FUNCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA DEL VOLUMEN DE ESCORRENTÍA

La función de probabilidad de v_r se puede estimar en base a las relaciones expresadas en el modelo lluvia escorrentía y la distribución de probabilidad de la magnitud de la tormenta. La obtención de las expresiones que conforman la función de probabilidad se obtienen siguiendo la metodología expuesta por Guo y Adams (1998) y considerando la dependencia entre la duración y magnitud de las tormentas por lo que las expresiones se obtienen en términos de $\Omega[x]$ y $\Omega I[a,x]$. En esta etapa se consideran tres casos: no se produce escurrimiento, el escurrimiento se genera sólo en las áreas impermeables, el escurrimiento puede generarse en áreas permeables.

a) No se produce escurrimiento en la cuenca ($v_r=0$)

De (16) se tiene que $v_r = 0$ si $v \leq S_{di}$. Según esto, la probabilidad de tener escorrentía nula es:

$$P(v_r = 0) = P(v \leq S_{di}) = 1 - O[? \cdot ? \cdot S_{di}] \quad (18)$$

b) El escurrimiento se genera sólo en áreas impermeables

Este caso se da cuando $S_{di} < v < S_{il}$, es decir, cuando todavía no se alcanza la saturación de las áreas permeables. Definiendo $S_{dd} = S_{il} - S_{di}$, el valor máximo que toma v_r es $h \cdot S_{dd}$. Usando (16), se tiene que la probabilidad de que v_r sea menor que un cierto v_o es:

$$P(v_r \leq v_o) = P(v \leq \frac{v_o}{h} + S_{di}) = 1 - O\left[? \cdot ? \cdot \left(\frac{v_o}{h} + S_{di}\right)\right] \quad ; v_r \leq h \cdot S_{dd} \quad (19)$$

c) El escurrimiento se puede generar también en áreas permeables

Si $v_r > h \cdot S_{dd}$, las áreas permeables también pueden contribuir a la generación de escorrentía, dependiendo de la duración de la tormenta y la tasa de infiltración del suelo. Para el cálculo de la probabilidad de ocurrencia de un evento de este tipo Guo y Adams (1998) consideran dos casos dependiendo de si las zonas permeables generan escorrentía o no. Luego, la probabilidad de que v_r sea menor que un cierto valor v_o , con $v_o > h \cdot S_{dd}$, es la suma de la probabilidad de ocurrencia de dos tipos de eventos excluyentes. Los eventos del primer grupo corresponden a aquellos en que las áreas permeables no generan escorrentía y cumplen las siguientes condiciones:

$$v \leq v_1 = S_{il} + f_c \cdot t \quad (20)$$

$$v \geq v_2 = S_{il} \quad (21)$$

$$v \leq v_3 = \frac{v_o}{h} + S_{di} \quad (22)$$

Y los eventos en que las áreas permeables si producen escurrimiento cumplen:

$$v > v_1 \quad (23)$$

$$v \leq v_4 = f_c \cdot (1 - h) \cdot t + v_o + S_d \quad (24)$$

El dominio de integración de la función de probabilidad de volumen de lluvia se estima en base a las relaciones obtenidas con el modelo hidrológico y queda definido por las hipérbolas que resultan de dividir las expresiones anteriores por t , tal como se muestra en la Figura 2.

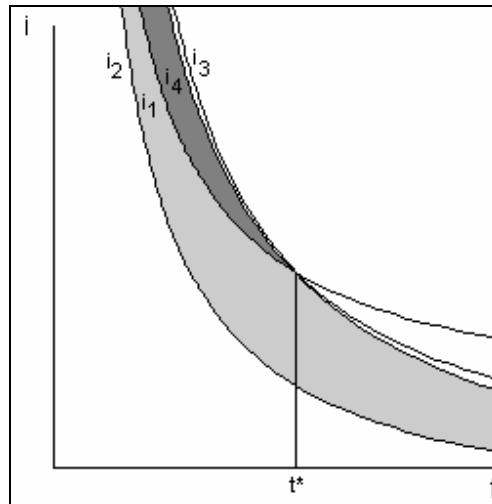


Figura 2: Dominio de integración de la FDP de v cuando $v > S_{il}$.

Luego, la probabilidad de que v_r sea menor que un determinado v_o es:

$$P(v_r \leq v_o) = P(v_4 \leq v < v_3; t \leq t^*) + P(v_4 \leq v < v_1; t > t^*) + P(v_r \leq h \cdot S_{dd}) \quad (25)$$

Evaluando, se obtiene:

$$P(v_r \leq v_o) = 1 - O \left[t^*, \frac{v_o + S_{dd}}{h} \right] \cdot e^{-f_c(1-h)} + O \left[t^*, \frac{v_o + S_{dd}}{h} \right] - O \left[\frac{v_o + S_{dd}}{h} \right] \quad (26)$$

Con t^* dado por:

$$t^* = \frac{1}{f_c} \left[\frac{v_o}{h} - S_{dd} \right] \quad (27)$$

4. CAUDAL MÁXIMO POR EVENTO (Q_p)

4.1 MODELACIÓN DE CAUDAL MÁXIMO POR EVENTO

Para la estimación del caudal máximo Guo y Adams (1998) utilizaron un hidrograma de respuesta triangular con un tiempo base igual a la duración de la lluvia más el tiempo de concentración de la cuenca, t_c . Este último es tratado como una constante, independiente de las características de las tormentas y sólo depende de las características físicas de la cuenca.

Luego, si una lluvia de duración t genera un volumen de escorrentía v_r , el caudal máximo se puede calcular según (28).

$$Q_p = \frac{2v_r}{t+t_c} \quad (28)$$

Reemplazando la (16) en (28) se obtiene el caudal máximo en términos del volumen de lluvia.

$$Q_p = \begin{cases} 0 & v \leq S_{di} \\ 2 \cdot h(v - S_{di}) / (t + t_c) & S_{di} < v \leq S_{il} + f_c t \\ 2 \cdot [v - S_d - f_c(1-h)t] / (t + t_c) & v > S_{il} + f_c t \end{cases} \quad (29)$$

4.2. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DEL CAUDAL MÁXIMO POR EVENTO

De acuerdo a la ecuación (29), la probabilidad de caudal nulo es equivalente al caso en que el volumen de lluvia es menor o igual a la altura de detención superficial de las áreas impermeables (S_{di}). Luego, la probabilidad de ocurrencia de este tipo de evento viene dada por:

$$P(Q_p = 0) = P(v \leq S_{di}) = 1 - O[? \cdot ? \cdot S_{di}] \quad (30)$$

Para el cálculo de $P(Q_p > q_p)$ para cualquier $q_p > 0$ se debe integrar la FDP conjunta de i y t en un dominio apropiado del plano i - t , el que queda determinado por la magnitud relativa de los parámetros de la cuenca. En primer lugar, de acuerdo a la ecuación (29), se debe identificar si las variables v y t cumplen $S_{di} < v \leq S_{il} + f_c t$ o $v > S_{il} + f_c t$, inigualdades que dividen el plano i - t en dos regiones, limitadas por las siguientes ecuaciones:

$$i_1 = f_c \cdot t + S_{il} / t \quad (31)$$

$$i_2 = \frac{q_p}{2 \cdot h} + \frac{q_p \cdot t_c}{2 \cdot h \cdot t} + \frac{S_{di}}{t} \quad (32)$$

$$i_3 = \frac{q_p}{2} + f_c(1-h) + \frac{q_p t_c}{2 \cdot t} + \frac{S_d}{t} \quad (33)$$

La ubicación relativa de las curvas definidas por las ecuaciones anteriores y, por ende, las zonas de integración, depende de los valores que adopten los parámetros f_c , S_{il} , S_{di} , h , t_c y q_p . De acuerdo a esto, Guo y Adams (1998) definen dos tipos de cuenca. Las cuencas tipo I cumplen con $f_c < S_{dd} / t_c$ y las de tipo II cumplen $f_c \geq S_{dd} / t_c$. Además, para cada una de estas configuraciones, se pueden dar 3 casos posibles dependiendo del valor que toma la variable aleatoria Q_p en el límite del intervalo de integración (q_p). La Figura 3 ilustra todos los casos posibles, mientras que en las Figuras 4, 5 y 6 se muestran las regiones de integración apropiadas para cada uno de ellos.

<p style="text-align: center;">Cuenca tipo I</p> <p style="text-align: center;">$f_c < S_{dd} / t_c$</p>	}	<p style="text-align: center;">$q_p < 2 \cdot f_c \cdot h$</p> <p style="text-align: center;">$2 \cdot f_c \cdot h \leq q_p < 2 \cdot h \cdot S_{dd} / t_c$</p> <p style="text-align: center;">$q_p \geq 2 \cdot h \cdot S_{dd} / t_c$</p>	<p style="text-align: center;">Cuenca tipo II</p> <p style="text-align: center;">$f_c \geq S_{dd} / t_c$</p>	}	<p style="text-align: center;">$q_p < 2 \cdot h \cdot S_{dd} / t_c$</p> <p style="text-align: center;">$2 \cdot h \cdot S_{dd} / t_c \leq q_p < 2 \cdot f_c \cdot h$</p> <p style="text-align: center;">$q_p \geq 2 \cdot f_c \cdot h$</p>
--	---	---	---	---	---

Figura 3: Rangos de q_p para las cuencas tipo I y II.

4.2.1 CUENCAS TIPO I: $f_c < S_{dd}/t_c$

a) $q_p < 2f_c h$

De acuerdo a la región de integración mostrada en la Figura 4 y haciendo uso de la función $\Omega[x]$, la probabilidad de excedencia viene dada por:

$$P(Q_p > q_p) = \int_0^{\infty} \int_{i_2(t)}^{\infty} \mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot e^{-1t} e^{-g^i} di \cdot dt = e^{-\frac{g \cdot q_p}{2h}} \cdot \Omega \left[\mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot \left(\frac{q_p t_c}{2h} + S_{di} \right) \right] \quad (34)$$

b) $2f_c h \leq q_p < 2hS_{dd}/t_c$

La región de integración se muestra en la Figura 5 con lo que la probabilidad de excedencia es:

$$P(Q_p > q_p) = \int_0^{t^{**}} \int_{i2(t)}^{\infty} \mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot e^{-1t} e^{-g^i} di \cdot dt + \int_{t^{**}}^{\infty} \int_{i3(t)}^{\infty} \mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot e^{-1t} e^{-g^i} di \cdot dt \quad (35)$$

En que t^{**} se define como:

$$t^{**} = \frac{2hS_{dd} - q_p t_c}{q_p - 2f_c h} \quad (36)$$

Haciendo uso de las propiedades de las integrales y de las funciones $\Omega[x]$ y $\Omega[a,x]$, se obtiene:

$$P(Q_p > q_p) = e^{-\frac{g \cdot q_p}{2h}} \cdot \Omega \left[\mathbf{I} \cdot t^{**}, \mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot \left(\frac{q_p t_c}{2h} + S_{di} \right) \right] + e^{-g(q_p/2 + f_c(1-h))} \cdot \left(\Omega \left[\mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot \left(\frac{q_p t_c}{2} + S_d \right) \right] - \Omega \left[\mathbf{I} \cdot t^{**}, \mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot \left(\frac{q_p t_c}{2} + S_d \right) \right] \right) \quad (37)$$

c) $2hS_{dd}/t_c \leq q_p$

La región de integración se muestra en la Figura 6, haciendo uso de la función $\Omega[x]$ se obtiene:

$$P(Q_p > q_p) = \int_0^{\infty} \int_{i2(t)}^{\infty} \mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot e^{-1t} e^{-g^i} di \cdot dt = e^{-g(q_p/2 + f_c(1-h))} \cdot \Omega \left[\mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot \left(\frac{q_p t_c}{2} + S_d \right) \right] \quad (38)$$

4.2.2 Cuencas tipo II: $f_c = S_{dd}/t_c$

a) $q_p < 2hS_{dd}/t_c$

Para este caso, el dominio de integración es igual al del caso a) para las cuencas tipo I. Luego,

$$P(Q_p > q_p) = e^{-\frac{g \cdot q_p}{2h}} \cdot \Omega \left[\mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot \left(\frac{q_p t_c}{2h} + S_{di} \right) \right] \quad (39)$$

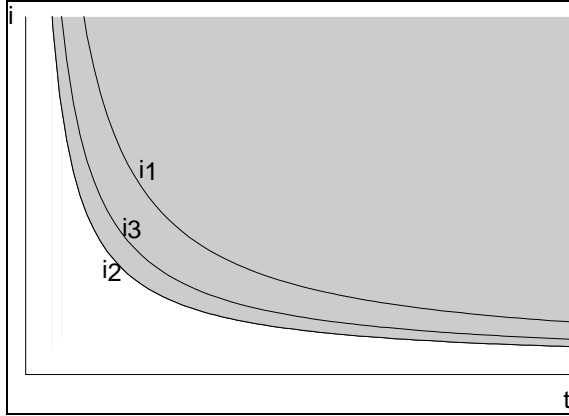


Figura 4: Región de integración para $P(Q_p > q_p)$ para cuenca tipo I con $q_p < 2f_c h$.

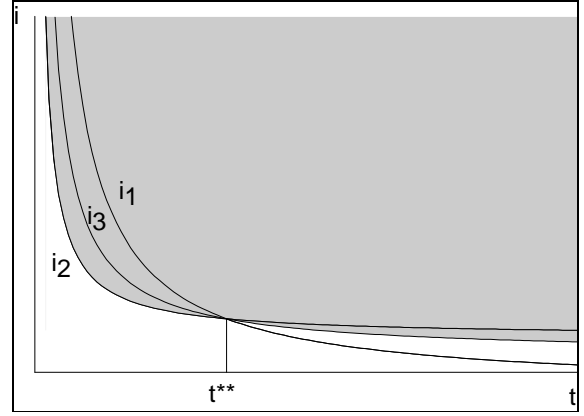


Figura 5: Región de integración para $P(Q_p > q_p)$ para cuenca tipo I con $2f_c h \leq q_p < 2hS_{dd}/t_c$

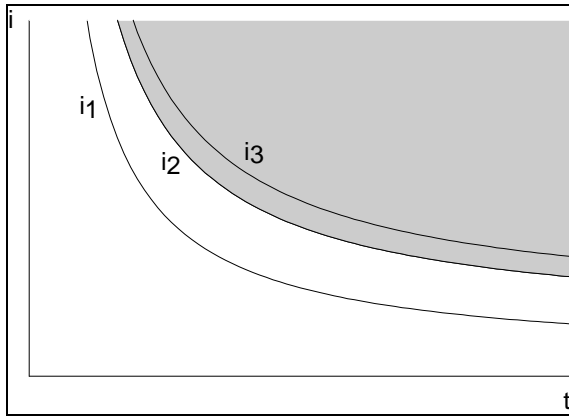


Figura 6: Región de integración para $P(Q_p > q_p)$ para cuenca tipo II con $2hS_{dd}/t_c \leq q_p < 2f_c h$

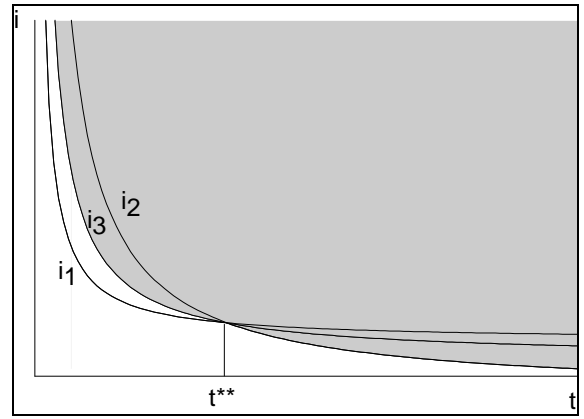


Figura 7: Región de integración para $P(Q_p > q_p)$ para cuenca tipo I con $2hS_{dd}/t_c \leq q_p$

b) $2hS_{dd}/t_c \leq q_p < 2f_c h$

Según la región de integración mostrada en la Figura 7 la probabilidad de excedencia de q_p es:

$$P(Q_p > q_p) = \int_0^{t^{**}} \int_{i3(t)}^{\infty} \mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot e^{-I t} e^{-g i} di \cdot dt + \int_{t^{**}}^{\infty} \int_{i2(t)}^{\infty} \mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot e^{-I t} e^{-g i} di \cdot dt \quad (40)$$

Con t^{**} definido en la ecuación (36). Desarrollando se obtiene:

$$P(Q_p > q_p) = e^{-g(q_p/2 + f_c(1-h))} \cdot \Omega \left[\mathbf{I} \cdot t^{**}, \mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot \left(\frac{q_p t_c}{2} + S_d \right) \right] + e^{-\frac{g \cdot q_p}{2h}} \cdot \left(\Omega \left[\mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot \left(\frac{q_p t_c}{2h} + S_{di} \right) \right] - \Omega \left[\mathbf{I} \cdot t^{**}, \mathbf{I} \cdot \mathbf{g} \cdot \left(\frac{q_p t_c}{2h} + S_{di} \right) \right] \right) \quad (41)$$

$$c) 2f_c h \leq q_p$$

Para este caso, el dominio de integración es igual al del caso c) para las cuencas tipo I. Con lo que se obtiene la misma expresión:

$$P(Q_p > q_p) = e^{-g(q_p/2 + f_c(1-h))} \cdot \Omega \left[I \cdot g \cdot \left(\frac{q_p t_c}{2} + S_d \right) \right] \quad (42)$$

5. APLICACIÓN DEL MODELO A LA CIUDAD DE SANTIAGO. COMPARACIÓN CON SIMULACIÓN CONTINUA EN SWMM

A continuación se aplica el modelo desarrollado a una cuenca ejemplo de la ciudad de Santiago, para ello se cuenta con el registro de precipitaciones de la estación de Quinta Normal, con intervalos de tiempo cada 10 minutos entre los años 1917 y 1960. Considerando un tiempo entre tormentas (TET) mínimo de 24 horas se calculan las siguientes características principales de la serie de datos de precipitación.

Tabla 2: Características de la serie de tormentas usada.

Característica	Valor
Largo del registro	44 años
Nº de tormentas	908
Nº de eventos promedio al año	20,63
Duración promedio (hr)	10,19
Intensidad promedio (mm/hr)	1,33
Tiempo entre tormentas promedio (hr)	415

Dada la carencia de datos, los resultados entregados por el modelo propuesto se comparan con resultados generados con simulación continua en SWMM y el modelo propuesto por Guo y Adams (1998). Los parámetros físicos de la cuenca modelada se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3: Parámetros físicos de la cuenca modelada.

Parámetro	h (%)	S _{di} (mm)	S _{dp} (mm)	f _m (mm/h)	f _c (mm/h)	k(1/h)	R	t _c (min)
Valor	80	1	3	18	0,3	4,14	0,01	95

Los resultados se muestran en la Figura 8, donde se observa que el modelo propuesto se ajusta bastante bien a la curva de frecuencia de volumen de escorrentía obtenida de los resultados de la simulación continua, respecto de la curva de frecuencia de caudales también se puede decir que el modelo se ajusta bien, sobre todo para el caso de periodos de retorno mayores. La concordancia de resultados demuestra que el modelo propuesto es capaz de generar resultados comparables a los de la simulación continua en lugares donde la dependencia entre el volumen de las tormentas y su duración no es despreciable. Además, se observa que en ambos casos el modelo propuesto en este trabajo presenta un mejor ajuste que el modelo de Guo y Adams (1998), donde precisamente se supone independencia entre las variables antes mencionadas.

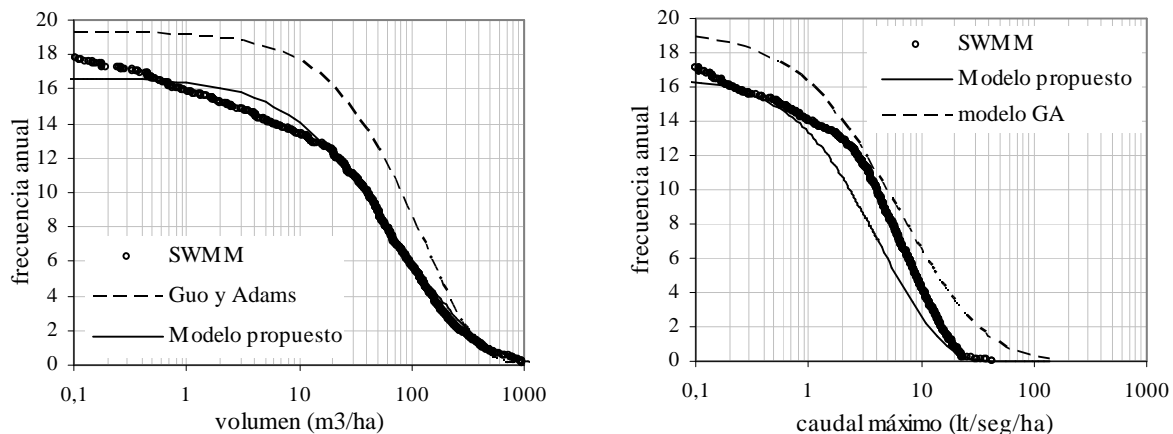


Figura 8: Comparación del modelo propuesto, resultados de la simulación continua en SWMM y el modelo de Guo y Adams (1998).

6. CONCLUSIONES

El modelo propuesto permite estimar las curvas de frecuencia del volumen de escorrentía y caudal máximo generado en cuencas urbanas donde la dependencia entre el volumen caído por tormenta y la duración de la misma resulta ser importante. Además, el modelo podría ser utilizado para evaluar el impacto del crecimiento de las áreas urbanas o del cambio del uso de suelos en la generación de escorrentía haciendo análisis de sensibilidad del volumen de escorrentía o del caudal máximo respecto de los parámetros físicos de las cuencas. Futuros trabajos podrían mejorar el modelo considerando un método más detallado que el hidrograma triangular para simular los caudales máximos.

REFERENCIAS

- Bacchi, B., et al. 1994. Bivariate exponential model applied to intensities and durations of extreme rainfall. *Journal of Hydrology*, 155, 225.
- Chen, J. Y., y B. J. Adams. 2006. A framework for urban storm water modeling and control analysis with analytical models. *Water Resources Research*, 42.
- Chen, J. Y., y B. J. Adams. 2007. Development of analytical models for estimation of urban stormwater runoff. *Journal of Hydrology*, 336, 458-469.
- Córdova, J. R., y I. Rodríguez-Iturbe. 1985. On the Probabilistic Structure of storm Surface Runoff. *Water Resources Research*, 21, 755-763.
- Díaz-Granados, M. A., et al. 1984. A Physically Based Flood Frequency Distribution. *Water Resources Research*, 20, 995-1002.
- Eagleson, P. S. 1972. Dynamics of flood Frequency. *Water Resources Research*, 8, 878-898.
- Genest, C., y A. C. Favre. 2007. Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12, 347-368.
- Goel, N. K., et al. 2000. A derived flood frequency distribution for correlated rainfall intensity and duration. *Journal of Hydrology*, 228, 56-67.
- Guo, Y. P., y B. J. Adams. 1998. Hydrologic analysis of urban catchments with event-based probabilistic models - 1. Runoff volume. *Water Resources Research*, 34, 3421-3431.
- Guo, Y. P., y B. J. Adams. 1998. Hydrologic analysis of urban catchments with event-based probabilistic models - 2. Peak discharge rate. *Water Resources Research*, 34, 3433-3443.
- Kurothe, R. S., et al. 1997. Derived flood frequency distribution for negatively correlated rainfall intensity and duration. *Water Resources Research*, 33, 2103-2107.