

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA
XVIII CONGRESO CHILENO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

**AJUSTE MATEMÁTICO DE CURVAS CONVEXAS VERTICALES
EN RADIERES DE RÁPIDOS DE DESCARGA**

ALBERTO A. SEPÚLVEDA VERA¹

RESUMEN

En los canales o rápidos de descarga el perfil de un canal abierto debe ajustarse a las condiciones topográficas y geológicas del lugar, produciéndose curvas verticales. En el caso de velocidades altas deben evitarse las curvas horizontales y para las curvas verticales se producen dos tipos de curvas: curvas cóncavas y convexas. En el caso de curvas cóncavas el radio “R” de ella sólo es limitado por la presión ejercida sobre el suelo, recomendándose que en ningún caso el radio sea menor que “10 H”, siendo “H” la altura de agua al inicio de la curva. Para el caso de las curvas convexas, para evitar la tendencia del agua a separarse del radier, la forma del piso debe estar sobre la trayectoria de un chorro que descargue libremente, definiendo la curva de la trayectoria del chorro de acuerdo a una ecuación muy conocida: $Y = X \tan\alpha + X^2 / (4 B K \cos^2\alpha)$. En este estudio se presentan tres métodos diferentes para calcular matemáticamente el radio “R” de la curva convexa. Finalmente se comparan con el ajuste numérico y se recomienda un método matemático de cálculo simple.

¹ Consultor, Ingeniero Civil Universidad de Chile. EDIC Ingenieros Ltda.

1. INTRODUCCIÓN

La forma de la curva vertical convexa en un rápido se determina tradicionalmente buscando el radio de una curva circular, que entregue valores de la cota "Y" que estén sobre la trayectoria del chorro, lo cual se ha realizado tradicionalmente en forma gráfica. La curva del chorro se inicia en el cambio de dirección del radier del canal, de acuerdo a la ecuación siguiente (U. S. Bureau of Reclamation, 1967):

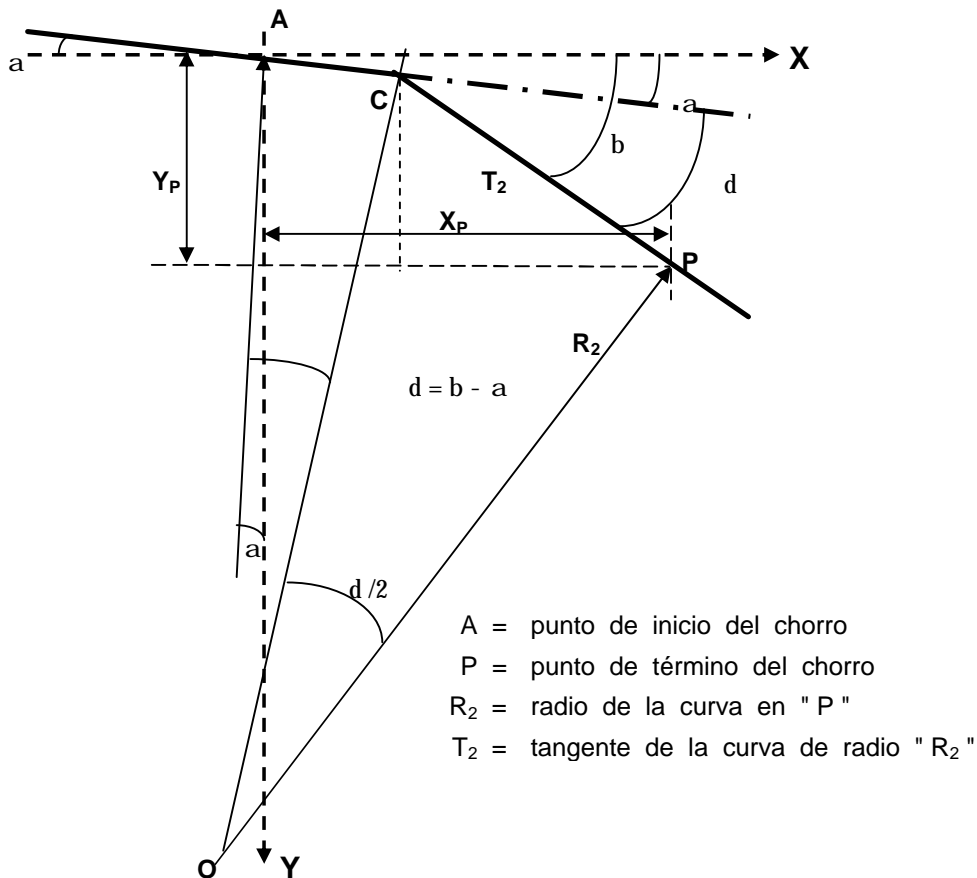
$$Y = X \operatorname{tg} \alpha + X^2 / (4 B K \cos^2 \alpha) \quad (1)$$

donde:

- Y : altura vertical del chorro con respecto al inicio de la curva
- X : distancia al inicio de la curva
- α : ángulo con la horizontal del radier recto de aguas arriba de la curva
- B : energía o Bernoulli del flujo, referida al radier en el inicio de la curva
- K : este valor debe ser "≥ 1,5" para asegurar la existencia de una presión positiva a lo largo del radier curvilíneo

.En la figura siguiente se presenta un esquema con el inicio del chorro (punto A) y el término de él (punto P), donde "dY/dX=tgβ".

FIGURA N° 1 : Esquema de los extremos del chorro



Diferenciando dos veces la ecuación (1) se obtiene:

$$dY/dX = \operatorname{tg}\alpha + X / (2 B K \cos^2\alpha) \quad (2a)$$

$$d^2Y/dX^2 = 1 / (2 B K \cos^2\alpha) \quad (2b)$$

Además:

β : ángulo con la horizontal del radier recto de aguas abajo de la curva

$$(dY/dX)_P = \operatorname{tg}\beta \quad (3)$$

$$X_P = 2 K B (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) \cos^2\alpha \quad (3a)$$

$$Y_P = X_P \operatorname{tg}\alpha + X_P^2 / (4 B K \cos^2\alpha) \quad (3b)$$

Conocidos “B”, “ α ” y “ β ” se ajusta numéricamente una curva circular hasta que “ $(dY/dX)_P = \operatorname{tg}\beta$ ”, de modo que el valor de “Y” de la curva circular sea menor que la correspondiente a la trayectoria del chorro.

En este trabajo se comparará el método numérico con tres métodos matemáticos diferentes.

2. MÉTODOS MATEMÁTICOS

En el caso de una curva circular, con el sistema coordenado de la Figura 1 se tiene:

$$X = R (\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\alpha) \quad (4a)$$

$$Y_c = R (\cos\alpha - \cos\phi) \quad (4b)$$

luego:
$$Y_c = R (\cos\alpha - (1 - (X/R + \operatorname{sen}\alpha)^2)^{1/2}) \quad (5)$$

donde: ϕ : ángulo que forma el radio “R” con la vertical en un punto del círculo

Y_c : el subíndice “c” indica que es la ordenada de la curva circular

Se puede demostrar que:

$$dY_c/dX = R \operatorname{sen}\phi \, d\phi/dX = \operatorname{tg}\phi \quad (6)$$

En el punto en que “ $\phi = \beta$ ” se tiene:
$$X_{cP} = R (\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha) \quad (7a)$$

$$Y_{cP} = R (\cos\alpha - \cos\beta) \quad (7b)$$

A continuación se presentan los métodos de cálculo matemático del radio de la curva circular.

2.1.- MÉTODO 1

Este método fue desarrollado por el ingeniero R. Lüders R. (2001) y consiste en tomar el radio “R” de la curva circular igual al radio “ ρ ” de curvatura de la trayectoria del chorro en el punto

“P”. Se puede demostrar que el radio de curvatura de una curva plana de ecuación “Y=f(X)” viene dada por:

$$\rho = (1 + (dY/dX)^2)^{3/2} / d^2Y/dX^2 \quad (8)$$

Introduciendo (2a) y (2b) en la ecuación anterior se obtiene para el punto “P”:

$$\mathbf{R} = (2 B K \cos^2\alpha) (1 + \text{tg}^2\beta)^{3/2} \quad (9)$$

En el caso que se quiere ajustar una curva circular cuando el chorro ha caído una altura “e”:

$$\begin{aligned} e &= X_e \text{tg}\alpha + X_e^2 / (4 K B \cos^2\alpha) \\ \text{o} \quad 0 &= X_e^2 / (4 K B \cos^2\alpha) + X_e \text{tg}\alpha - e \end{aligned}$$

resolviendo la ecuación de segundo grado se obtiene:

$$X_e = (-b + (b^2 - 4 a c)^{1/2}) / 2a \quad (10a)$$

$$\text{donde:} \quad a = 1 / (4 K B \cos^2\alpha) \quad b = \text{tg}\alpha \quad c = - e \quad (10b)$$

2.2.- MÉTODO 2

Este método fue desarrollado por A. Sepúlveda (2006) y consiste en tomar como tangente “T₂” de la curva de radio “R₂” la distancia entre el punto “C” (intersección entre las dos rectas de pendientes α y β) y el punto “P” (punto del chorro donde “dY/dX=tg β ”). Se puede demostrar que:

$$\begin{aligned} T_2 &= R_2 \text{tg}((\beta - \alpha)/2) \\ \text{entonces} \quad \mathbf{R}_2 &= (X_P \text{tg}\alpha - Y_P) / ((\cos\beta \text{tg}\alpha - \text{sen}\beta) \text{tg}((\beta - \alpha)/2)) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{donde:} \quad \mathbf{X}_P = 2 K B (\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha) \cos^2\alpha \quad (12a)$$

$$\mathbf{Y}_P = K B (\text{tg}^2\beta - \text{tg}^2\alpha) \cos^2\alpha \quad (12b)$$

2.3.- MÉTODO 3

En el punto final del círculo, punto “P”, se tiene, :

$$(dY_c/dX)_P = \text{tg}\beta = (X_P/R_3 + \text{sen}\alpha) / (1 - (X_P/R_3 + \text{sen}\alpha)^2)^{1/2} \quad (13)$$

$$\text{Se puede demostrar que:} \quad X_P/R_3 = \text{tg}\beta / (1 + \text{tg}^2\beta)^{1/2} - \text{sen}\alpha \quad (14)$$

Como para “X_P” se debe cumplir que: $Y_P > Y_c$

$$Y_c = R_3 (\cos\alpha - (1 - (X_P/R_3 + \text{sen}\alpha)^2)^{1/2}) \quad Y_{cP} = R_3 (\cos\alpha - \cos\beta) \quad (15)$$

$$\text{luego:} \quad Y_P > R_3 (\cos\alpha - (1 - (X_P/R_3 + \text{sen}\alpha)^2)^{1/2})$$

Finalmente se puede demostrar que:

$$R_3 > 0,5 (X_P^2 + Y_P^2) / (Y_P \cos\alpha - X_P \operatorname{sen}\alpha) \quad (16)$$

donde X_P se calcula con la ecuación (12a)
 Y_P se calcula con la ecuación (12b)

3.- COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS

A continuación se realizará una comparación entre los distintos métodos para el siguiente caso:

$B = 22,00$ m Bernoulli o energía del flujo en el punto A
 $K = 1,5$ coeficiente recomendado para que siempre haya presión positiva sobre el radier de la curva convexa
 $a = 30^\circ$ pendiente del radier recto aguas arriba del punto A
 $b = 45^\circ$ pendiente del radier recto aguas abajo del punto P

Co las ecuaciones (12) se calculan las coordenadas del término del chorro:

$$X_P = 2 K B (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) \cos^2\alpha = 20,921 \text{ m}$$

$$Y_P = K B (\operatorname{tg}^2\beta - \operatorname{tg}^2\alpha) \cos^2\alpha = 16,500 \text{ m}$$

En el cuadro siguiente se comparan los diversos métodos para determinar el radio "R" de la curva circular en el presente caso. El subíndice "0" indica el término de la curva circular, según las ecuaciones (7).

MÉTODO	R (m)	X ₀ (m)	Y ₀ (m)
Numérico	92,00	19,05	14,62
Método M1	140,01	29,00	22,25
Método M2	112,37	23,27	17,86
Método M3	92,71	19,20	14,73

Se puede demostrar que siempre se cumple: $R_1 > R_2 > R_3$

En el cuadro siguiente se compara la trayectoria del chorro con la curva circular calculada numéricamente (R) y la del Método M3 (R₃):

CUADRO N° 3 : Comparación de la trayectoria del chorro con curvas circulares

X (m)	Y (m)	dY/dX
-------	-------	-------

	CHORRO	R	R₃	CHORRO	R	R₃
0,000	0,000	0,000	0,000	0,57735	0,57735	0,57735
2,000	1,195	1,189	1,188	0,61775	0,61158	0,61131
4,000	2,471	2,447	2,446	0,65816	0,64744	0,64688
6,000	3,828	3,780	3,777	0,69856	0,68516	0,68427
8,000	5,265	5,189	5,185	0,73897	0,72498	0,72373
10,000	6,784	6,681	6,674	0,77937	0,76720	0,76553
12,000	8,383	8,260	8,249	0,81977	0,81216	0,81003
14,000	10,063	9,932	9,916	0,86018	0,86031	0,85764
16,000	11,823	11,704	11,682	0,90058	0,91216	0,90886
18,000	13,665	13,583	13,554	0,94099	0,96836	0,96433
19,054	14,668	14,620	14,587	0,96228	1,00000	0,99553
19,201	14,810		14,733	0,96525		1,00000
20,921	16,500			1,00000		

4.- CONCLUSIONES

Para determinar el radio “R” de la curva circular que mejor se ajusta a la trayectoria del chorro, se concluye que el método matemático 3 es el que más se aproxima al método de ajuste numérico. Con las ecuaciones siguientes se calcula el radio “R”:

$$R = 0,5 (X_P^2 + Y_P^2) / (Y_P \cos\alpha - X_P \operatorname{sen}\alpha) \quad (16)$$

donde: $X_P = 2 K B (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) \cos^2\alpha \quad (12a)$

$$Y_P = K B (\operatorname{tg}^2\beta - \operatorname{tg}^2\alpha) \cos^2\alpha \quad (12b)$$

REFERENCIAS

U. S. Bureau of Reclamation, 1967. Diseño de Presas Pequeñas. Editorial Continental, México.

Lüders R., Roberto, 2001. Factibilidad del embalse Chacrillas, por EDIC Ingenieros para el MOP (DOH), diciembre.

Sepúlveda V. Alberto, 2006. Factibilidad de la Central Licán, por EDIC Ingenieros para Inversiones Candelaria S.A., junio.