

**SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA**  
**XVII CONGRESO CHILENO DE INGENIERIA HIDRAULICA**

**UN MODELO NUMÉRICO CONSERVATIVO, DE ALTA RESOLUCIÓN,  
PARA EL CÁLCULO DEL FLUJO EN CANALES ABIERTOS BASADO EN EL  
MÉTODO DE LOS VOLÚMENES FINITOS**

**JEANNETTE DONOSO L. <sup>1</sup>**  
**OSCAR LINK L. <sup>2</sup>**

**RESUMEN**

Motivados por la importancia que posee conocer con exactitud las variables que definen el escurrimiento en casos donde el flujo presenta una alta variabilidad espacial y temporal, en este trabajo se estudian esquemas numéricos para resolver las ecuaciones de Saint-Venant con términos fuente. En particular, se presenta un esquema numérico tipo *flux-splitting* para el caso unidimensional, implementado en MATLAB. Se presentan resultados obtenidos en la simulación de (1) un canal rectangular con pendiente y fricción del lecho; (2) el rompimiento de una presa, con condiciones de lecho inicialmente seco; (3) el flujo sobre un vertedero con régimen subcrítico y (4) el flujo sobre un vertedero con transición de río a torrente. Los resultados numéricos se comparan con las soluciones exactas, mostrando la calidad del modelo, que resulta ser una herramienta áltamente eficaz para la modelación hidrodinámica.

<sup>1</sup>Estudiante Memorista de Ingeniería Civil, Depto. Ingeniería Hidráulica, Universidad de Concepción - mail: jdonoso@udec.cl

<sup>2</sup>Profesor Asistente, Dr.-Ing., Depto. Ingeniería Hidráulica, Universidad de Concepción - mail: olink@udec.cl

## 1. INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años se han desarrollado esquemas numéricos que permiten resolver las ecuaciones que gobiernan la hidrodinámica, cuando el flujo presenta una alta variabilidad espacial y temporal.

En la actualidad, es práctica común en la Ingeniería utilizar modelos unidimensionales para la predicción del eje hidráulico que se basan en el método del paso estándar. Entre ellos se destacan los modelos HEC-RAS y HEC-2 del *Hydraulic Engineering Center* de la *U.S. Army Corps of Engineers*. En general, estos y otros programas similares poseen cómodas interfaces gráficas, pero presentan la gran desventaja de trabajar con una versión muy simplificada de las ecuaciones gobernantes del escurrimiento en canales. Por ello, estos modelos sólo son capaces de entregar una solución aceptable para el caso particular de régimen permanente gradualmente variado y lecho fijo. Por otro lado, existen modelos que resuelven las ecuaciones de Saint-Venant que gobiernan el flujo con una alta variabilidad espacial y temporal en un cauce abierto. Estos modelos son capaces de dar solución a situaciones con flujo impermanente, debiéndose recurrir a esquemas numéricos para la formulación discreta del problema matemático. El estudio de los esquemas de discretización se desarrolló en un inicio, para resolver de manera aproximada el problema de Riemann, dando origen a los conocidos *Riemann Solvers*, partiendo de las ideas de Gudonov (1959) llegando a los esquemas tipo *flux-splitting* propuestos por Steger-Warming (1981), Viayasundaram (1982), y a los esquemas tipo *flux-difference-splitting* propuestos por Roe (1981) y van Leer (1982). Estos esquemas se han extendido para resolver las ecuaciones de Saint Venant. Recientemente se destacan los estudios realizados por García-Navarro y Alcrudo (1992), Bermúdez y Vázquez (1993), Tseng (1999) y Chacón et al. (2003a,b), entre otros.

En este trabajo, la solución numérica de las ecuaciones de Saint-Venant ha sido implementada en un código fuente utilizando el método de los volúmenes finitos. Se presentan resultados de simulaciones realizadas utilizando un esquema tipo *flux-splitting* que fue propuesto por Vijayasundaram (1982). Las soluciones obtenidas a partir del modelo unidimensional son fácilmente extensibles a modelos bi y tridimensionales.

## 2. ECUACIONES GOBERNANTES

Las ecuaciones propuestas por Barré de Saint Venant en 1871 que describen el flujo unidimensional de un fluido incompresible en un cauce abierto son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + g(S_0 - S_f) \quad (2)$$

Donde  $u$  y  $h$  representan las incógnitas de velocidad y profundidad media, respectivamente,  $g$  la aceleración de gravedad,  $S_0$  la pendiente del lecho,  $S_f$  la pendiente motriz y  $x$  y  $t$  corresponden a las coordenadas espacial y temporal, respectivamente. La Figura 1 muestra un esquema de la geometría del canal.

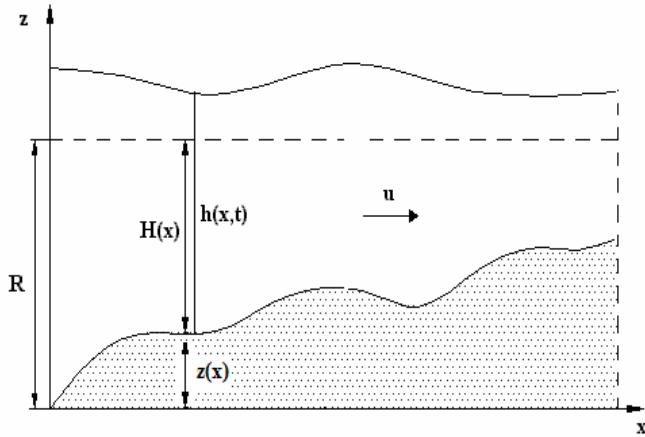


Figura 1.a. Geometría del canal. Plano x-z

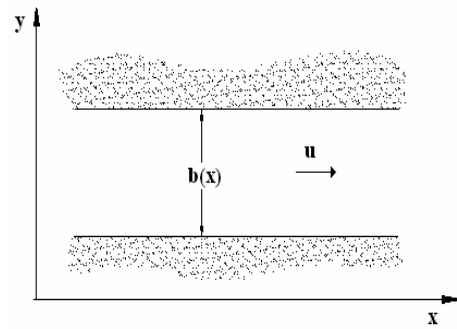


Figura 1.b. Geometría del canal.

Plano x-y

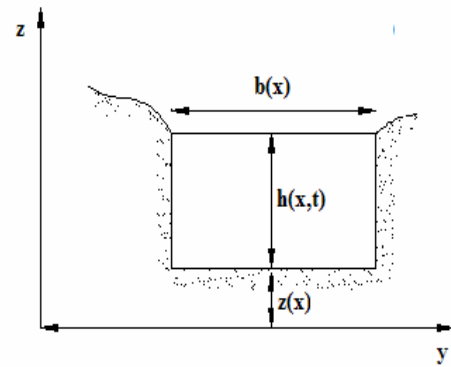


Figura 1.c. Geometría del canal.

Plano y-z

La pendiente del lecho se puede escribir como:

$$S_0 = -\frac{\partial z}{\partial x} \quad (3)$$

Donde  $z$  representa la coordenada vertical como se muestra en la Figura 1.

La pendiente motriz ó pendiente de la línea de energía, en el caso unidimensional, representa las tensiones de fondo, y para canales abiertos, se pueden escribir directamente con la fórmula de Manning.

$$S_f = \frac{Q|Q|n^2}{A^2 R_H^{4/3}} \quad (4)$$

Donde  $Q$  es el caudal circulante,  $A$  el área mojada,  $R_H$  el radio hidráulico y  $n$  el coeficiente de rugosidad del fondo, conocido como coeficiente de Manning.

### 3. FORMA DISCRETA DE LAS ECUACIONES

Asumiendo un flujo incompresible, viscoso y caracterizado por la ley hidrostática de presiones, la forma vectorial de las ecuaciones de Saint-Venant unidimensionales es:

$$\frac{\partial W_{x,t}}{\partial t} + \frac{\partial F_{x,t}}{\partial x} = G_{x,t} \quad (5)$$

Donde  $W_{x,t}$  es el vector de variables de flujo que depende tanto de la variación en el espacio,  $x$ , como de su variación en el tiempo,  $t$ .  $F_{x,t}$  es el tensor de flujo y  $G_{x,t}$  es el término independiente o término fuente. Para el flujo unidimensional en un canal prismático de sección constante, los vectores se expresan como:

$$W = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} ; \quad F = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} ; \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Donde  $q$  es el caudal específico igual a  $Q/b$ .

Los esquemas *flux-splitting*, discretizan la ecuación vectorial de manera explícita en el tiempo como muestra la ecuación 7.

$$\frac{\partial W_{x,t}}{\partial t} \cong \frac{W_{x,t}^{t+1} - W_{x,t}^t}{\Delta t} \quad (7)$$

Donde  $W_x^t$  y  $W_x^{t+1}$  son aproximaciones de la solución exacta en un tiempo  $t$  y  $t+1$ , respectivamente, y  $\Delta t$  representa el paso de tiempo.

Los esquemas explícitos, se basan en la integración hacia adelante, lo que permite evaluar  $W_x^{t+1}$  una vez conocido  $W_x^t$ , dada una condición inicial.

La ventaja de estos esquemas es su bajo costo computacional, aunque para que estos sean estables es necesario trabajar con incrementos de tiempo pequeños, de manera que se cumpla la condición de Courant, Friedrichs y Levy para advección pura. Esta asegura la estabilidad de los esquemas (ver por ejemplo Vázquez, 1994), de acuerdo a:

$$C = \frac{|u \pm c| \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (8)$$

Donde  $u$  y  $c$  representan la velocidad media del flujo y la celeridad de una onda  $c = \sqrt{\frac{1}{2}gh}$  respectivamente.

La discretización en el espacio se llevó a cabo mediante la técnica de volúmenes finitos que aproxima de manera integral la variación del flujo en un volumen de control

delimitado por las caras  $x_{i \pm 1/2}$ , según la ecuación 9, como se muestra esquemáticamente en la Figura 2.

$$\frac{\partial F_{x,t}}{\partial x} \cong \frac{\Delta F_{x,t}}{\Delta x} = \frac{f(x_i, x_{i+1}) - f(x_{i-1}, x_i)}{\Delta x} \quad (9)$$

Donde  $f(x_i, x_{i+1})$  y  $f(x_{i-1}, x_i)$  se conocen como flujos numéricos discretos que introducen los esquemas *upwind*, que son los encargados de incorporar el fenómeno físico en el problema del flujo. Estos flujos dependen de los valores de las celdas contiguas a  $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$  en el instante de tiempo  $t$  (ver por ejemplo Bermúdez, 1993).

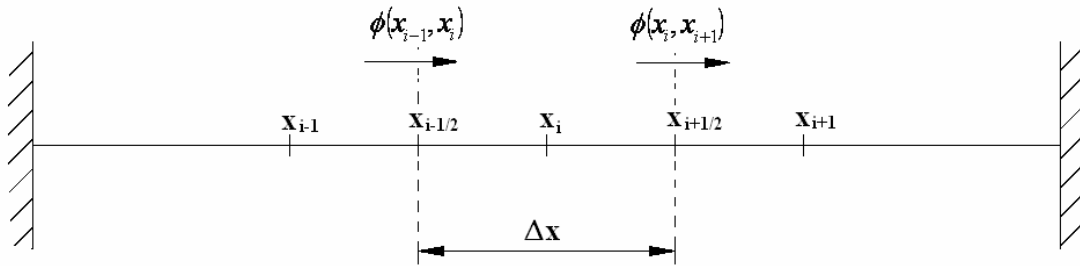


Figura 2. Esquema volúmenes finitos

En cuanto a la discretización del término fuente, éste es tratado como dos términos independientes; uno de ellos representa el fondo variable y el otro la fricción contra el fondo como muestra la ecuación 11.

$$G = G_1 + G_2 \quad (10)$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ ghS_0 \end{pmatrix} ; \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -ghS_f \end{pmatrix} \quad (11)$$

Que de forma discreta se puede representar como lo indica la ecuación 12.

$$V(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, W_{x_{i-1}}, W_{x_i}, W_{x_{i+1}}) \quad (12)$$

Con esto, la solución de la ecuación vectorial de Saint Venant queda:

$$W_i^{t+1} = W_i^t - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(x_i, x_{i+1}) - f(x_{i-1}, x_i)) + \Delta t V(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, W_{x_{i-1}}, W_{x_i}, W_{x_{i+1}}) \quad (13)$$

### 3.1. DISCRETIZACIÓN DEL TÉRMINO DE FLUJO

Los esquemas *flux-splitting* descomponen el flujo discreto en un flujo entrante y un flujo saliente de acuerdo a la ecuación 14.

$$\mathbf{f}(x_i, x_{i+1}) = \mathbf{f}^+(x_i, x_{i+1}) + \mathbf{f}^-(x_i, x_{i+1}) \quad ; \quad \mathbf{f}(x_{i-1}, x_i) = \mathbf{f}^+(x_{i-1}, x_i) + \mathbf{f}^-(x_{i-1}, x_i) \quad (14)$$

Vijayasundaram (1982), citado en Chacón et al. (2003), plantea:

$$\mathbf{f}^+(U, V) = A^+ \left( \frac{U+V}{2} \right) \cdot U \quad ; \quad \mathbf{f}^-(U, V) = A^- \left( \frac{U+V}{2} \right) \cdot V \quad (15)$$

Con  $U$  y  $V$  vectores de flujo.  $A$  es una matriz similar a la matriz Jacobiana del flujo y puede descomponerse a través de una matriz diagonal como indica la ecuación 16.

$$A^\pm = X \Lambda^\pm X^{-1} \quad (16)$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} \max(I_1, 0) & 0 \\ 0 & \max(I_2, 0) \end{pmatrix} \quad ; \quad A^- = \begin{pmatrix} \min(I_1, 0) & 0 \\ 0 & \min(I_2, 0) \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ I_1 & I_2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$I_1 = \frac{q}{h} + \sqrt{\frac{1}{2}gh} \quad ; \quad I_2 = \frac{q}{h} - \sqrt{\frac{1}{2}gh} \quad (19)$$

$I_1$  y  $I_2$  son los valores propios de la matriz de flujo.

### 3.2. DISCRETIZACIÓN DEL TÉRMINO FUENTE

Ambos términos, se discretizan de manera similar, por separado, para luego acoplar sus resultados. (ver por ejemplo Vázquez, 1998):

$$G = \frac{1}{2}(G_L + G_{L^-}) + \frac{1}{2}(G_R - G_{R^+}) \quad (20)$$

#### 3.2.1. FONDO VARIABLE

El esquema de Vijayasundaram (1982) define:

$$G_L = \begin{pmatrix} 0 \\ g \frac{3h_{i-1} + h_i}{2} \frac{H_i - H_{i-1}}{\Delta x} \end{pmatrix} \quad ; \quad G_R = \begin{pmatrix} 0 \\ g \frac{h_i + 3h_{i+1}}{2} \frac{H_{i+1} - H_i}{\Delta x} \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$G_{L^-} = \frac{1}{\Delta x} \left[ PP^* \left| A \left( \frac{W_{x_{i-1}} + W_{x_i}}{2} \right) P^{*-1} A^{-1} \left( \frac{W_{x_{i-1}} + W_{x_i}}{2} \right) P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g \frac{h_i + h_{i-1}}{2} (H_i - H_{i-1}) \end{pmatrix} \right. \right] \quad (22)$$

$$G_{R^+} = \frac{1}{\Delta x} \left[ PP^* \left| A \left( \frac{W_{x_{i+1}} + W_{x_i}}{2} \right) P^{*-1} A^{-1} \left( \frac{W_{x_{i+1}} + W_{x_i}}{2} \right) P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g \frac{h_i + h_{i+1}}{2} (H_{i+1} - H_i) \end{pmatrix} \right. \right]$$

$$P = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} ; \quad P^* = \begin{pmatrix} c_1^* & 0 \\ 0 & c_2^* \end{pmatrix} \quad (23)$$

$H$  es una función que representa la profundidad variable con respecto a una altura de referencia igual a  $R - z(x)$  (ver Figura 1).

Las matrices  $P$  y  $P^*$  son matrices de reescalamiento y se introducen en el esquema debido a la no homogeneidad del flujo. Éstas tienen efecto sobre los vectores propios de la matriz  $A$ , conservando los valores propios de esta misma, ya que estos son los que contienen la información del upwinding del esquema (ver por ejemplo Baines et al., 2004).

La matriz  $A^{-1}$  se define como se muestra a continuación:

$$A^{-1} = X^{-1} X^{-1} \quad (24)$$

Desarrollando la matriz  $\Lambda^{-1}$  se tiene:

$$\Lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Cuando uno de los valores propios de la matriz Jacobiana se anula, la matriz  $\Lambda^{-1}$  se indetermina, para evitar esto, utilizando la regla de L'Hopital para el límite cuando  $\lambda_1$  o  $\lambda_2$  tiende a cero, se define:

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\overline{\lambda_i} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_i} & ; \text{ si } \lambda_i \neq 0 \\ 0 & ; \text{ si } \lambda_i = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Para que el esquema tenga consistencia, los parámetros de las matrices de reescalamiento deben satisfacer la solución estacionaria que se muestra en la ecuación 28.

$$W = \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

En el caso de los términos fuentes asociados a fondo variable y fricción, para que la consistencia del esquema se cumpla, se debe satisfacer:

$$c_1 = \frac{1}{2}c_2 \quad ; \quad c_1^* = 2c_2^* \quad (29)$$

Se utilizaron los siguientes valores en la modelación:

$$c_1 = c_1^* = 1 \quad ; \quad c_2 = 2 \quad ; \quad c_2^* = 1/2 \quad (30)$$

### 3.2.2. FRICCIÓN

Las funciones que definen el término fuente asociado a la fricción contra el fondo son:

$$G_L = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \frac{|q_i + q_{i-1}|}{2} \left| \frac{q_i + q_{i-1}}{h_i + h_{i-1}} \right| \left( \frac{n^2 (h_i + h_{i-1} + b)^{4/3}}{\left( \frac{h_i + h_{i-1}}{2} \right)^{4/3}} \right) \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$G_R = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \frac{|q_i + q_{i+1}|}{2} \left| \frac{q_i + q_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \right| \left( \frac{n^2 (h_i + h_{i+1} + b)^{4/3}}{\left( \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \right)^{4/3}} \right) \end{pmatrix}$$

$$G_L = \frac{1}{\Delta x} \left[ PP^* \left| A \left( \frac{W_{x_i} + W_{x_{i-1}}}{2} \right) \right| P^{*-1} A^{-1} \left( \frac{W_{x_i} + W_{x_{i-1}}}{2} \right) P^{-1} \right] G_L \quad (32)$$

$$G_{R^*} = \frac{1}{\Delta x} \left[ PP^* \left| A \left( \frac{W_{x_i} + W_{x_{i+1}}}{2} \right) \right| P^{*-1} A^{-1} \left( \frac{W_{x_i} + W_{x_{i+1}}}{2} \right) P^{-1} \right] G_R$$



## 4. RESULTADOS

### 4.1 TEST N°1 – LECHO CON PENDIENTE Y FRICCIÓN

Se realiza la simulación de un canal rectangular de ancho unitario constante, de largo igual a 100 metros, pendiente igual a  $2/1000$  y un coeficiente de Manning igual a  $0,02$ . Se utilizó una discretización espacial  $\Delta x = 1$  metros con una condición de Courant inicial igual a  $0,17$ .

La Figura 3 muestra las condiciones iniciales. La condición de borde impuesta aguas arriba fue una profundidad de agua igual a  $0,3$  metros.

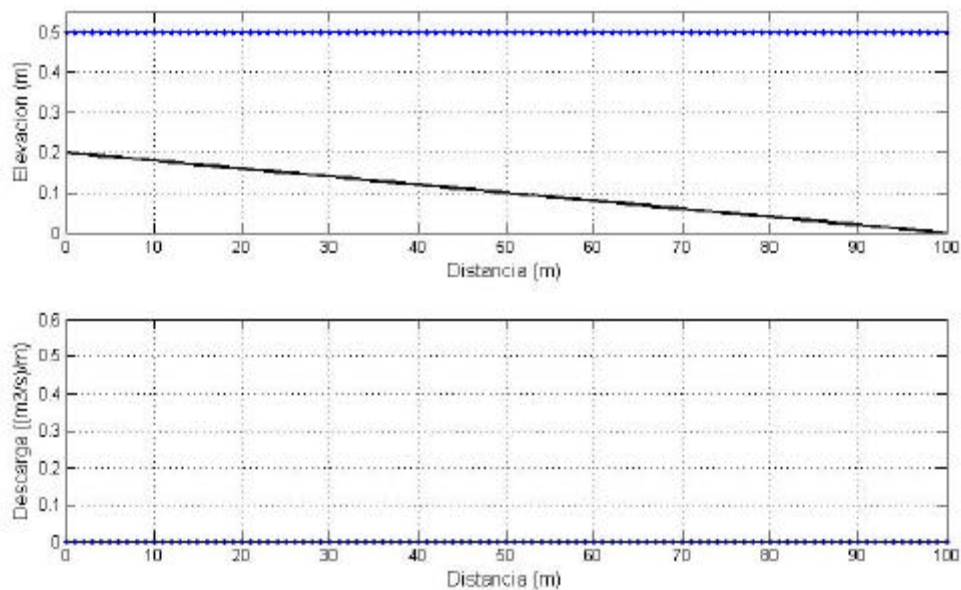


Figura 3. Condición inicial Test N°1,  $t = 0$  s

La Figura 4 muestra el resultado obtenido a los 300 segundos de simulación.

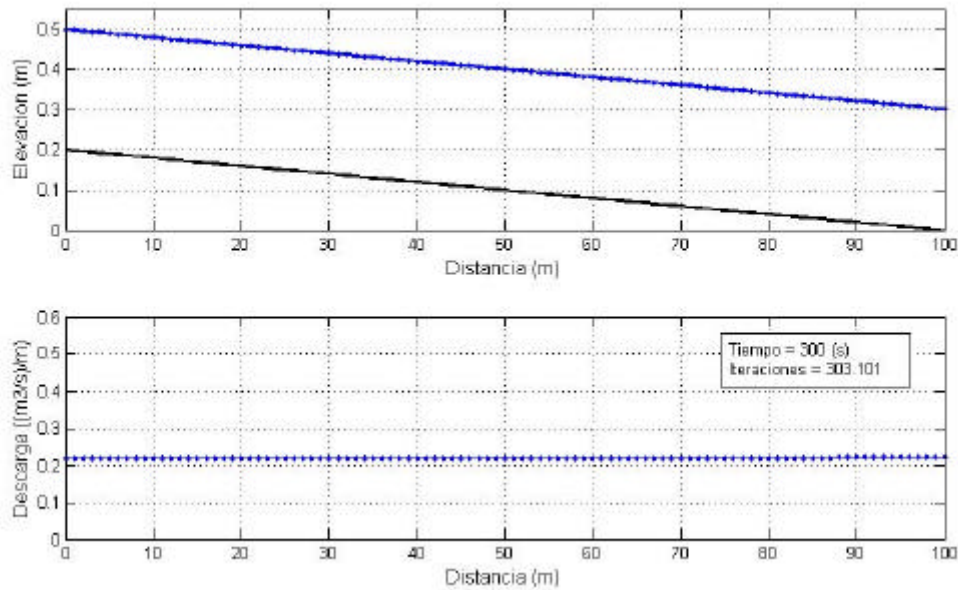


Figura 4. Resultado numérico obtenido después de  $t = 300$  segundos de simulación

Se puede observar que la profundidad aguas abajo del canal se estabilizó en la condición de borde impuesta aguas arriba.

También se observa un caudal estable aproximadamente igual a 0,22 metros cúbicos por segundo por metro de ancho que se corrobora aplicando la fórmula de Manning.

$$q = \frac{Q}{b} = \frac{1}{n} \sqrt{S} \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} = \frac{1}{n} \sqrt{S} \frac{(bh)^{5/3}}{(b+2h)^{2/3}} = \frac{1}{0,02} \sqrt{0,002} \frac{(1 \cdot 0,3)^{5/3}}{(1+2 \cdot 0,3)^{2/3}} = 0,22 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$$

## 4.2 TEST N°2 - ROMPIMIENTO DE PRESAS

Se realiza la simulación del flujo en un canal rectangular de ancho unitario constante, de 100 metros de largo, con condición inicial de lecho seco después del rompimiento instantáneo de una presa ubicada aguas arriba con una altura máxima de agua igual a 50 centímetros y un coeficiente de rugosidad de Manning igual a 0,02. La veracidad de la simulación es comprobada con la solución analítica propuesta por Chanson (2005).

La discretización espacial utilizada es  $\Delta x = 0,1$  metros con una condición de Courant inicial igual a 0,31.

En la Figura 5 se puede ver el resultado de la simulación para un tiempo igual a 10 segundos.

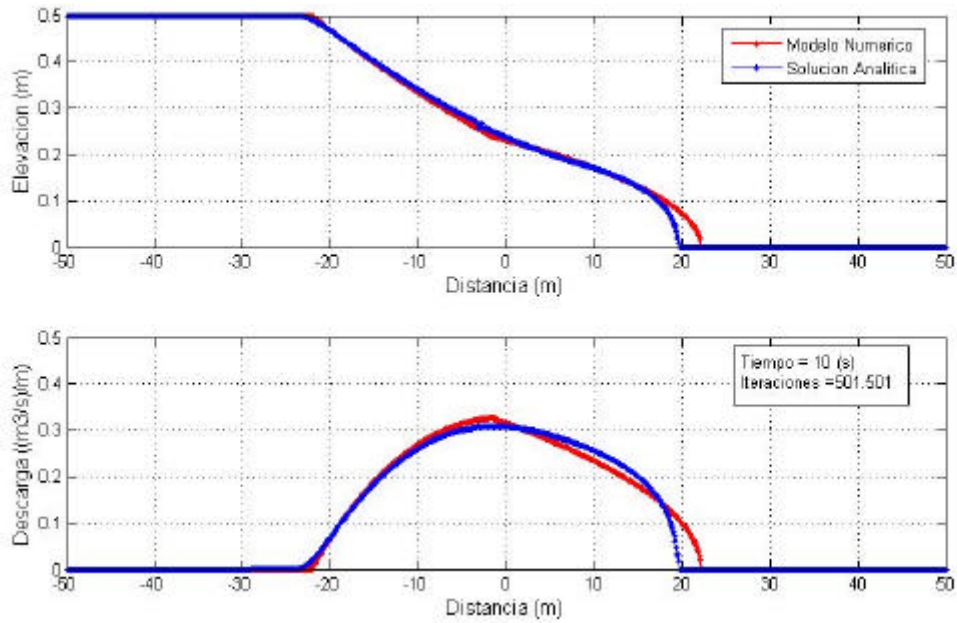


Figura 5. Resultados modelación rompimiento de presa después de  $t = 10$  segundos

En cuanto a la altura de agua, se puede observar que, aguas arriba, el esquema numérico se ajusta muy bien a la solución analítica, llegando con un error promedio del orden de un 4,5 por ciento aguas abajo.

Algo similar se observa con la descarga, sin embargo, la solución analítica propuesta por Chanson (2005), fue hecha en base a la calibración de la altura de agua en el extremo de la onda basado en mediciones publicadas por Dressler (1954), dentro de la cual no hace alusión a la velocidad.

### 4.3 TEST N°3 – VERTEDERO CON RÉGIMEN SUBCRÍTICO

Se realiza una simulación del flujo sobre un vertedero, cuya geometría queda descrita por la ecuación 33, bajo tres condiciones iniciales y de borde distintas, comparándolo con la solución analítica publicada por Alcrudo (2000).

$$z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2 & ; \quad 8 < x < 12 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases} \quad (33)$$

En el primer test se utiliza una discretización  $\Delta x = 0,1$  metros y una condición de Courant inicial igual a 0,53. La condición inicial dada es una profundidad igual a 2,50 metros en estado estacionario. Las condiciones de borde impuestas son, aguas abajo, una profundidad igual a 2,00 metros y aguas arriba un caudal específico igual a 4,42 metros cúbicos por segundo por metro de ancho, estableciendo régimen subcrítico en todo el dominio de estudio.

Los resultados de la simulación pueden verse en la Figura 6 junto con la solución analítica de este problema.

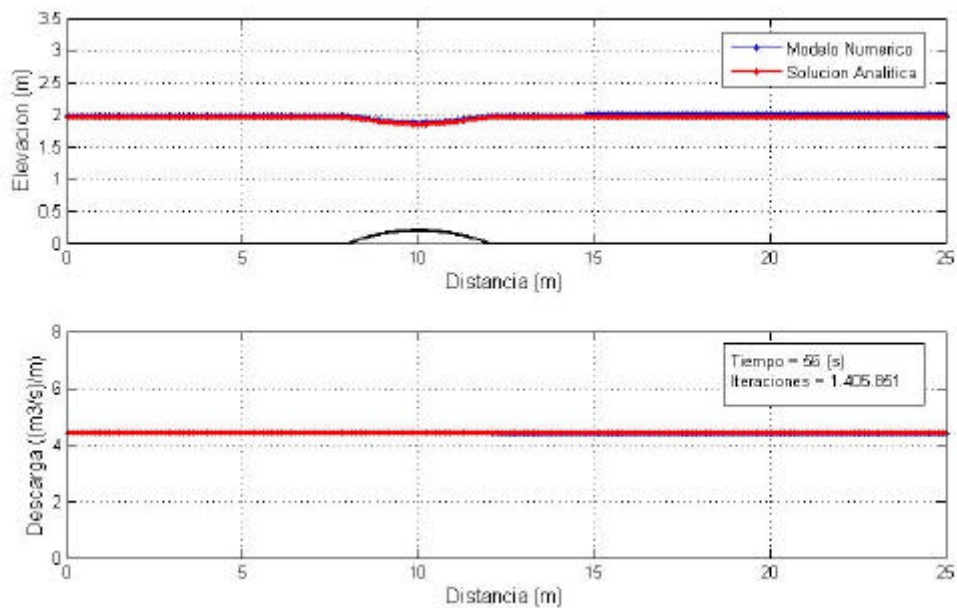


Figura 6. Resultados modelación vertedero caso 1

En la Figura 6 se observa la capacidad que tiene el esquema numérico de aproximar la solución del problema hidrodinámico, con un error promedio del orden del 0,9 por ciento.

#### 4.4 TEST N°4 – VERTEDERO CON CAMBIO DE RÉGIMEN

Se estableció como condición inicial, en estado estacionario, una profundidad igual a 1,25 metros. Las condiciones de borde impuestas fueron, aguas abajo, una profundidad igual a 0,4 metros y aguas arriba un caudal específico igual a 1,53 metros cúbicos por segundo por metro de ancho. Pasando de régimen subcrítico desde aguas arriba hacia flujo en régimen supercrítico aguas abajo.

La discretización utilizada fue  $\Delta x = 0,1$  metros con una condición de Courant inicial igual a 0,37.

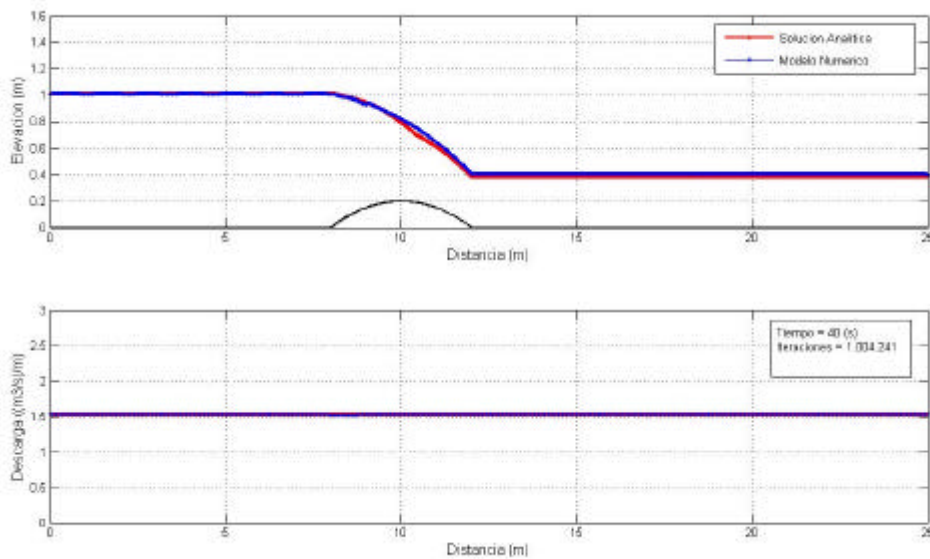


Figura 7. Resultados modelación vertedero caso 2

## 5. CONCLUSION

En este trabajo se ha presentado un esquema numérico tipo *flux-splitting* que permite la simulación de flujo unidimensional en aguas someras tanto en régimen permanente como impermanente.

Cabe mencionar que en los test N°1 y N°2, el error se atribuye a la ecuación que describe la fricción en el fondo, presentada en la ecuación 31, la cual puede ser reemplazada por una que ajuste mejor los resultados. Sin embargo, se considera que la precisión del modelo es excelente y permite estudiar situaciones donde el flujo presenta alta variabilidad espacial y temporal en forma numérica.

## AGRADECIMIENTOS

Se agradece el financiamiento proporcionado por la Dirección de Investigación de la Universidad de Concepción a través del proyecto DIUC 207.091.045-1.0 “Estudio Experimental y Numérico de la Distribución Espacio-temporal de la Temperatura en un Cuerpo de Agua Somera con presencia de Efluentes y Contaminación Térmica”.

## REFERENCIAS

Alcrudo, F. y Benkhaldoun, F. (2000) High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. **Journal of Computational Physics**. **135(2)**. 260-278.

Baines, M., Lemos, A. y Nichols, N. (2004) Upwind Solution of Singular Differential Equations Arising from Steady Channel Flows. **Computers and Fluids**. **33(5-6)**. 821-827.

Bermúdez, A. y Vázquez, M. (1993) Upwind Métodos for Hyperbolic Conservation Laws with Source Terms. **Computer and Fluids**. **23(8)**. 1049-1071.

Chacón, T., Domínguez, A. y Fernández, E. (2003a) Flux Splitting Solvers for Shallow Water Equations with Source Terms. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**. **42(1)**. 23-55.

Chacón, T., Domínguez, A. y Fernández, E. (2003b) A Family of Stable Numerical Solvers for the Shallow Water Equations with Source Terms. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. **192(1-2)**. 203-225.

Chanson, H. (2005) **Applications of the Saint Venant Equations and Method of Characteristics to the Dam Beak Wave Problem**. Department of Civil Engineering. University of Queensland. Australia.

Chanson, H. (2005) **Analytical Solution of Dam Break Wave with Flow Resistance. Application to Tsunami Surges**. Department of Civil Engineering. University of Queensland. Australia.

Dressler, R.F. (1952). "Hydraulic Resistance Effect upon the Dam-Break Functions." *Jl of Research, Natl. Bureau of Standards*, Vol. 49, No. 3, pp. 217-225.

Dressler, R. (1954). "Comparison of Theories and Experiments for the Hydraulic Dam-Break Wave." *Proc. Intl Assoc. of Scientific Hydrology Assemblée Générale, Rome, Italy*, Vol. 3, No. 38, pp. 319-328.

García, P. y Vázquez, M. (2000) On Numerical Treatment of the Source Terms in the Shallow Water Equations. **Computers and Fluids**. **29(8)**. 951-979.

Tseng, M. (1999) Verification of 1-D Transcritical Flow Model in Channels. **Proceedings of the National Science Council**. Taiwan. **23(5)**.654-664.

Vázquez, M. (1998) Improved Treatment of Source Terms in Upwind Schemes for the Shallow Water Equations in Channels with Irregular Geometry. **Journal of Computational Physics**. **148(2)**. 497-526.

Vázquez, M. (1994) **Estudio de Esquemas Descentrados para su Aplicación a las Leyes de Conservación Hiperbólicas con Términos Fuente**. Ph.D. Tesis. Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Santiago de Compostela. España.

Vijayasundaram, G (1982) **Resolution Numérique des équations d'Euler pour des écoulements transsoniques ave un schema de Godunov en elements finis**. Ph.D. Thesis L'Université Pierre et Marie Curie Paris VI. Francia.