

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

XVII CONGRESO CHILENO DE HIDRÁULICA

**ESTUDIO NUMÉRICO DE LA ADVECCIÓN CAÓTICA DE PARTICULAS SÓLIDAS
EN FLUJOS ROTATORIOS TRIDIMENSIONALES**

CRISTIAN ESCAURIAZA¹

RESUMEN

A través de la teoría de advección caótica se han podido estudiar muchos problemas de transporte y mezcla en flujos no turbulentos, con el propósito de entender y cuantificar las características del movimiento de partículas de fluido en simples flujos analíticos mediante un análisis Lagrangiano. Recientemente se han realizado nuevos estudios que han extendido esta investigación a flujos mucho más complejos, que también pueden estudiarse experimentalmente, sin embargo, existe muy poco conocimiento sobre la dinámica de flujos caóticos con múltiples fases. El propósito de esta investigación es estudiar numéricamente la dinámica de partículas sólidas en un flujo tridimensional dentro de un cilindro cerrado, con tapas que rotan en dirección contraria a la misma velocidad angular. En este caso se realizan simulaciones desacopladas del flujo que se basan en modelos analíticos de las fuerzas que actúan sobre las partículas, y con un esquema de colisión elástica con las paredes. Las soluciones muestran como el efecto de la gravedad puede suprimir el movimiento caótico que se ha observado en partículas de fluido. El efecto de la inercia de las partículas se analiza a través de mapas Lagrangianos promedio, y de la varianza de concentración, mostrando que la mezcla disminuye en el caso de partículas sólidas dentro del cilindro.

¹ Departamento de Ingeniería Hidráulica y Ambiental, Pontificia Universidad Católica de Chile. PhD candidate, Georgia Institute of Technology, Atlanta USA.

1. INTRODUCCIÓN

Procesos de mezcla y transporte escalar en flujos no turbulentos han sido estudiados extensivamente en los últimos 20 años, debido a que muchos flujos geofísicos y aplicaciones en ingeniería exhiben un comportamiento caótico a números de Reynolds bajos, originando agitación que se produce por el estiramiento y plegamiento de las líneas materiales del flujo (Ottino 1990). La teoría de advección caótica, introducida inicialmente por Aref (1984), ha sido desarrollada para analizar flujos de mezcla conectando los conceptos de dinámica no-lineal con mecánica de fluidos, basado en el espacio de estado definido por la representación Lagrangiana de partículas de fluido que presentan inestabilidad local y mezcla global de trayectorias.

El marco teórico en el que se describen estos flujos fue desarrollado inicialmente para estudiar casos idealizados de flujos en dos y tres dimensiones, que corresponden a soluciones analíticas de simplificaciones de las ecuaciones de Navier-Stokes (Dombre et al. 1986, Chien et al. 1986, Beigie et al. 1994). Varios experimentos se han realizado para esclarecer los mecanismos de advección caótica producidos principalmente por vórtices que homogenizan la concentración de escalares pasivos (Rothstein et al. 1999, Aref 2002, Solomon y Mezic 2003).

Recientemente se han realizado investigaciones numéricas de flujos tridimensionales de dispositivos de mezcla que pueden reproducirse experimentalmente, lo cual ha entregado mayor información sobre la mezcla de partículas no difusivas. Los complejos mecanismos de la dinámica Lagrangiana de burbujas de desagregación de vórtices (vortex breakdown bubbles) en flujos dentro de dispositivos cilíndricos, ha sido estudiada extensivamente en experimentos y simulaciones (Sotiropoulos et al. 2001, 2002), estableciendo los parámetros adimensionales que determinan las características Lagrangianas del flujo.

Las inestabilidades que se desarrollan en un recipiente cilíndrico con tapas que rotan en dirección opuesta, que también se conoce como el flujo rotatorio de *von Karman*, fue calculado y estudiado en detalle por Lackey (2004), que identificó las características caóticas a diferentes números de Reynolds. Sus resultados también mostraron cómo la capa de corte en el centro del cilindro se desestabiliza generando vórtices axiales y radiales que inician el movimiento caótico Lagrangiano, mientras algunas órbitas periódicas se mantienen en islas o en regiones toroidales cercanas a las tapas. De la inestabilidad del flujo emergen vórtices radiales y estacionarios en el centro del recipiente, en una cantidad equivalente al número de onda azimutal más inestable del flujo dependiendo de la relación entre el ancho y radio del cilindro, y del número de Reynolds del flujo.

A pesar de todo el conocimiento acumulado en los estudios Lagrangianos de flujos tridimensionales, pocas investigaciones han relacionado estos flujos con el transporte y mezcla de partículas inerciales. El estudio de flujos con más de una fase tiene un gran rango de aplicación en problemas de combustión, sprays, flujos con burbujas, fenómenos atmosféricos y transporte de sedimentos, y las simulaciones deben considerar que esas partículas no actúan como escalares pasivos, sino como una fase dispersa independiente, que está sujeta a fuerzas de volumen, superficie, y a colisiones con los bordes sólidos o con otras partículas.

La mayoría de los estudios de partículas sólidas han sido desarrollados en flujos analíticos bidimensionales (Wang et al. 1992), y en sistemas hamiltonianos tridimensionales para los cuales las partículas pesadas tenían comportamiento caótico (Tsega et al. 2001).

En este trabajo se estudia numéricamente el flujo tridimensional con partículas sólidas en un recipiente cilíndrico, con tapas que rotan a la misma velocidad pero en direcciones opuestas. Las trayectorias de las partículas permiten comparar los resultados con la dinámica de partículas pasivas, y determinar los parámetros adimensionales que caracterizan el comportamiento caótico. En las secciones siguientes se desarrolla el modelo y se explica el alcance de los resultados que pueden entregar mayor información sobre los flujos bifásicos en estas condiciones.

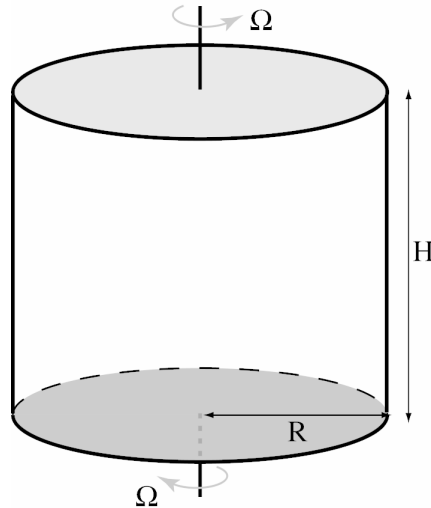


Figura 1. Flujo dentro de un cilindro con tapas rotando en dirección contraria a velocidad W .

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El flujo incompresible y permanente dentro de un recipiente cilíndrico de radio R y altura H , con tapas que rotan a la misma velocidad angular, Ω , pero en direcciones opuestas, como se muestra en la Figura 1, puede caracterizarse con dos parámetros adimensionales: el número de Reynolds:

$$\text{Re} = \frac{\Omega R^2}{\nu} \quad (1)$$

y la proporción entre la altura y el radio del cilindro:

$$AR = H / R \quad (2)$$

El flujo axisimétrico básico está formado por una región invariante de dos toros donde sólo existen órbitas quasi-periódicas de las partículas de fluido. Las mitades superiores e inferiores de cilindro tienen patrones recirculatorios por el “bombeo” de Ekman y el chorro radial que se forma al centro del recipiente, lo que genera una capa de corte que es el mecanismo inicial de la mezcla caótica.

Estudios de este flujo para diferentes valores de Re y AR , y velocidades angulares de las tapas (Nore et al. 2003, 2004; López et al. 2002; Moisy et al. 2003) han demostrado que la capa de corte se desestabiliza excitando modos tridimensionales que desorganizan la simetría del flujo.

Lackey (2004) efectuó simulaciones para valores de $AR=1$, en un rango de números de Reynolds entre 295 y 850, integrando las ecuaciones de Navier-Stokes en tres dimensiones, con esquemas de segundo orden usando un total de 2.7×10^6 elementos en la discretización con coordenadas cilíndricas. La Figura 2 muestra la solución a $Re=350$, para la cual el modo 3 es excitado. Dos iso-superficies de velocidad radial muestran el flujo tridimensional producido por vórtices radiales, cuyos centros son focos estables en el plano azimutal. Para números de Reynolds mayores estas características son aún más evidentes como se discute en Lackey (2004).

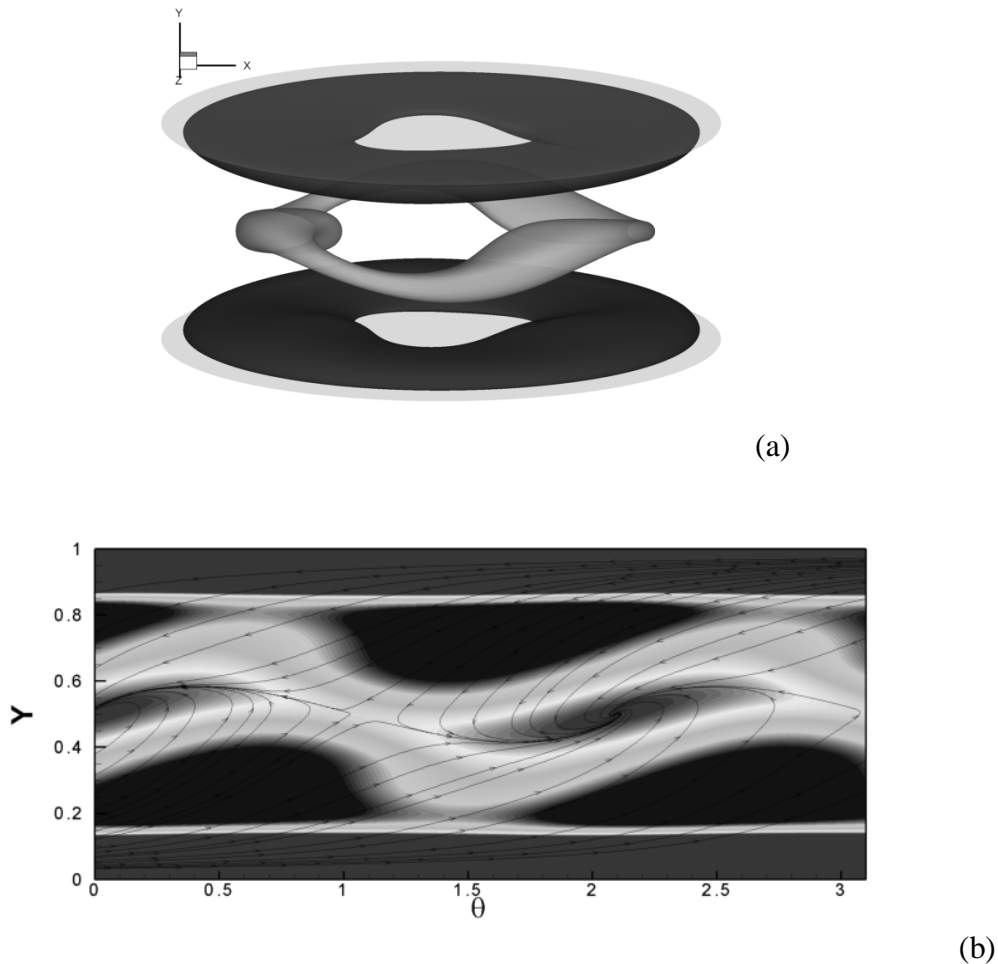


Figura 2. Flujo tridimensional con $Re=350$ y $AR=1$ (Lackey 2004). (a) Iso-superficies de velocidad radial $u_r=0.065\Omega R$, y (b) Contornos de vorticidad radial y líneas de corriente en el plano $Y-\theta$, a un radio $r=0.75R$, y $0 \leq \theta \leq \pi$.

A través de las trayectorias de partículas de fluido, desde el punto de vista Lagrangiano, se pueden identificar las regiones caóticas e invariantes dentro del flujo y observar los efectos de la agitación en función del número de Reynolds, e integrando las ecuaciones de cantidad de movimiento para partículas que tienen su propia masa, se puede explorar la dinámica del flujo

bifásico y la interacción con las regiones caóticas producidas por la capa de corte. Anteriormente el movimiento caótico de partículas inerciales había sido estudiado solamente en flujos analíticos bidimensionales recirculatorios, como los trabajos de Maxey (1990), Wang et al. (1990), Wang et al. (1992), y Tsega et al. (2001), los que conectaron la dinámica de las partículas con las escalas de tiempo características del flujo y de respuesta de las partículas, así como también de la relación entre la densidad de ambas fases, sin embargo estos resultados no se han investigado en flujos tridimensionales que puedan reproducirse experimentalmente.

Para simular la dinámica de las partículas sólidas, en este caso a $Re=350$ y $AR=1$, establecemos las ecuaciones de la trayectoria y de la cantidad de movimiento para una partícula, que pueden ser escritas en notación tensorial como:

$$\frac{dx_{pi}}{dt} = v_{pi} \quad (3)$$

$$m \frac{dv_{pi}}{dt} = f_i \quad (4)$$

donde v_{pi} y x_{pi} corresponden a la velocidad y posición de la partícula en cada coordenada respectivamente, m es la masa de la partícula y f_i representa la suma de fuerzas en la dirección i .

La fuerza total que actúa sobre una partícula sólida puede componerse por tres partes: (1) Fuerzas de volumen como la gravedad; (2) Fuerzas de superficie como el arrastre y la sustentación; y (3) Fuerzas debido a interacción con otras partículas y con colisiones con bordes físicos dentro del flujo.

En este caso se utilizan relaciones empíricas para las fuerzas de arrastre, sustentación y masa adicional para partículas esféricas que se trasladan sin rotación (Crowe et al. 1998). La ecuación para la fuerza de arrastre se obtiene a través de análisis dimensional con un coeficiente de arrastre C_D , calculado en función del número de Reynolds de la partícula, Re_r :

$$C_D = \frac{24}{Re_r} (1 + 0.15 Re_r^{0.687}) \quad (5)$$

Re_r depende del diámetro, y de la magnitud de la velocidad relativa:

$$Re_r = \frac{|\mathbf{v}_r|d}{\nu} \quad (6)$$

Para los modelos de fuerzas de sustentación y masa adicional se utilizan las relaciones de Auton et al. (1988) con coeficientes C_L y C_m respectivamente. La ecuación de cantidad de movimiento se puede expresar entonces en forma adimensional, usando como escalas el radio del cilindro R , y la velocidad angular de las tapas Ω :

$$\frac{dv_{pi}}{dt} = \frac{1}{(SG + C_m)} \left[-\frac{\delta_{i3}}{Fr^2 \tilde{d}} + \frac{SG}{St} v_{ri} + C_L (\epsilon_{ijk} v_{rj} \omega_k) + (1 + C_m) \frac{Du_i}{Dt} \right] \quad (7)$$

donde \tilde{d} es el diámetro adimensional de la partícula, v_{pi} y u_i son las componentes de velocidad de la partícula y del flujo, y ω_i son las componentes de la vorticidad.

Otros tres parámetros adimensionales aparecen en la ecuación (7): La gravedad específica que es la relación entre las densidades del sólido y del fluido $SG=\rho_s/\rho$, el número de Froude densimétrico que relaciona las fuerzas de inercia y gravedad:

$$Fr = \frac{\Omega R}{\sqrt{(SG - 1)gd}} \quad (8)$$

y el número de Stokes que se define como la relación entre el tiempo de respuesta de la partícula y la escala de tiempo característica del flujo dentro del recipiente, suponiendo que el arrastre es la fuerza dominante:

$$St = \frac{4}{3} \frac{d}{C_D} \frac{SG}{|\mathbf{v}_r|} \Omega \quad (9)$$

Este parámetro refleja el comportamiento de la partícula en relación a las características del flujo. Si $St \ll 1$ la partícula tiene el tiempo suficiente para responder a los cambios de velocidad, y puede seguir de cerca el movimiento de las escalas más grandes del flujo. Por otro lado, si $St \gg 1$, la velocidad instantánea de la partícula no es afectada por el flujo, y las trayectorias de partículas sólidas y de fluido divergen rápidamente.

Las condiciones de borde tienen gran relevancia en el comportamiento dinámico de las partículas debido a que el contacto con las paredes sólidas altera la cantidad de movimiento y la trayectoria, lo que puede modelarse con un esquema de colisión que simule la pérdida de energía cinética debido a efectos inelásticos y de fricción. En este caso se adopta un modelo perfectamente elástico de colisión, en el cual se asume que no existe deformación ni fricción, calculando las velocidades posteriores al choque con un coeficiente de restitución igual a 1.

3. SIMULACIÓN DESACOPLADA DE PARTICULAS SÓLIDAS

Las ecuaciones (3) y (4) de trayectoria y cantidad de movimiento, describen la dinámica de una partícula sólida con una representación puntual, en la que todas las fuerzas se concentran en el centro de masa de la esfera, y el fluido no es afectado por el movimiento de la partícula, lo que corresponde a una simulación desacoplada del flujo. En este caso ambas ecuaciones se resuelven con un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden y el modelo de colisión. Una simulación detallada de las partículas y su interacción con el fluido requeriría utilizar metodologías de modelación de interfases como la desarrollada por Gilmanov et al. (2003).

La dinámica de las partículas inerciales se puede estudiar separando los efectos de la gravedad con aquellos producidos por el contacto entre las dos fases. Inicialmente se calculan las trayectorias de 1250 partículas sin el término de gravedad ($Fr \rightarrow \infty$), y también con un número de Froude de $Fr=6.15$, como se muestra en la Figura 3. Se puede observar que sin gravedad, la inestabilidad de la capa de corte contribuye al estiramiento y plegamiento de las líneas de trayectoria, y aunque el movimiento de las partículas sólidas es distinto al de las de fluido, las islas sin mezcla todavía persisten, como se observa en los mapas de Poincaré de la Figura 4.

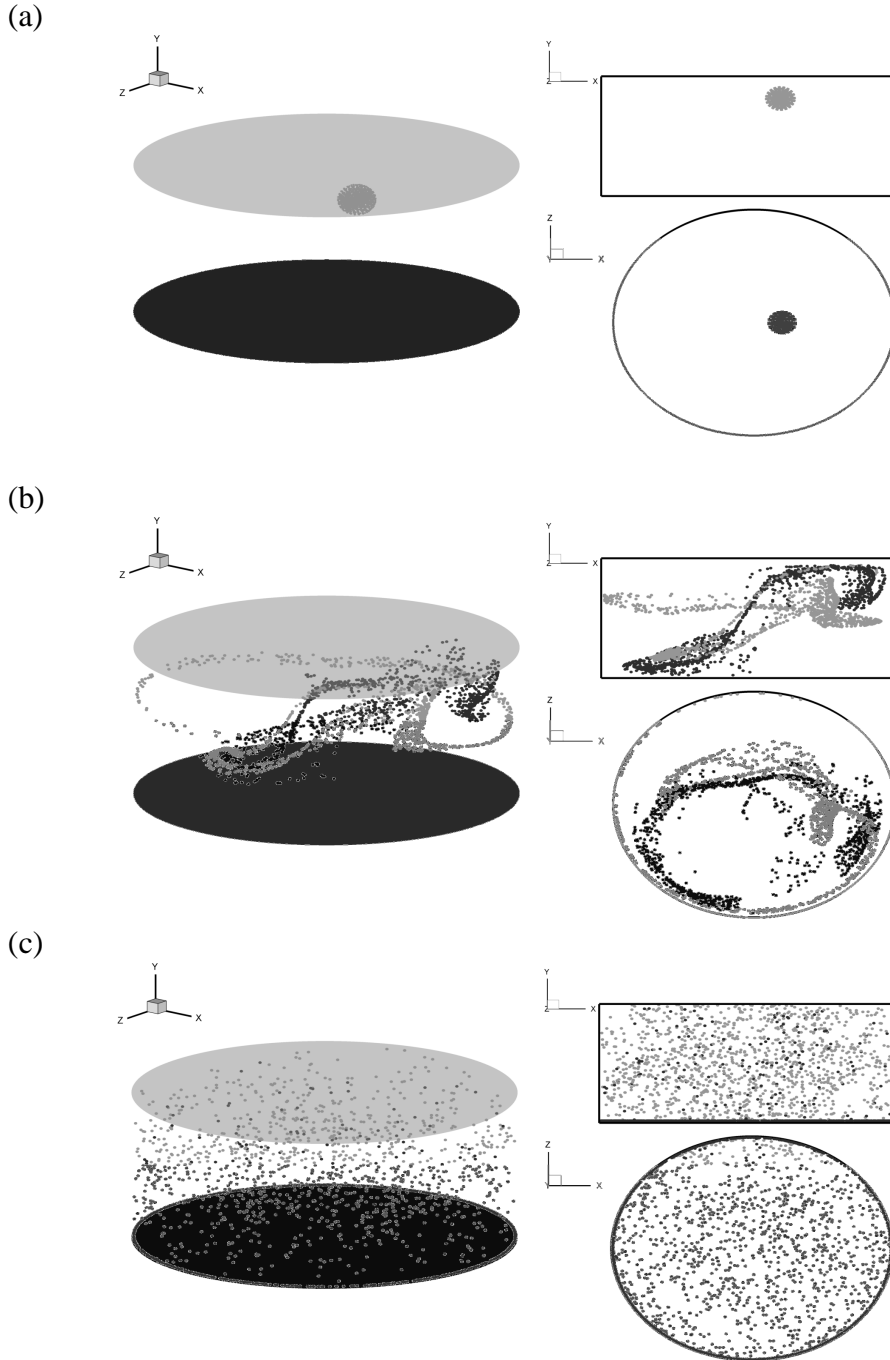


Figura 3. Simulación de 1250 partículas en el flujo, vistas tridimensional, lateral y de planta. Las partículas más claras no consideran el efecto de la gravedad, para las más oscuras $Fr=6.15$. Ambas simulaciones consideran los parámetros adicionales $Re=350$, $AR=1$, $\tilde{d}=0.02$, $SG=2.65$. (a) Condiciones iniciales para los dos grupos de partículas. (b) Posición de las partículas después de 4 rotaciones de las tapas. (c) Posición de las partículas después de 21 rotaciones de las tapas.

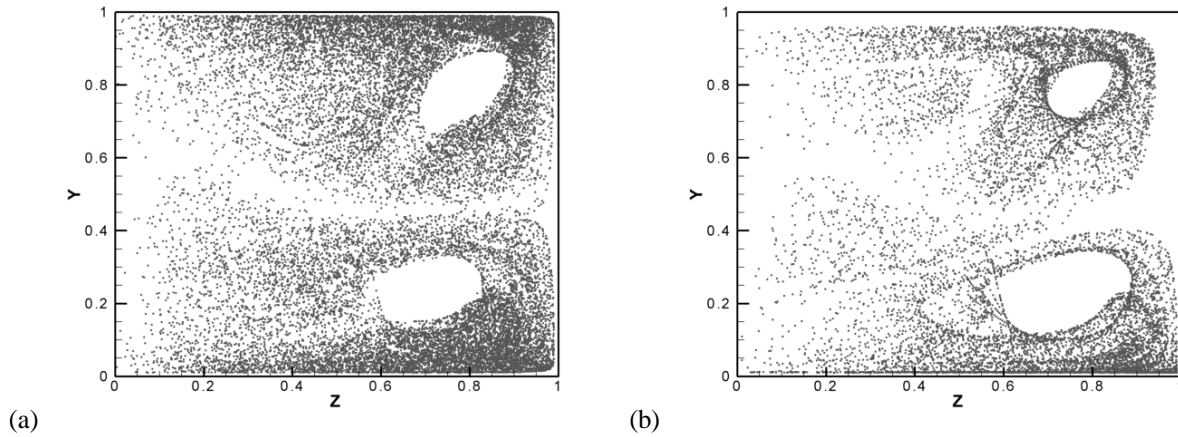


Figura 4. Secciones de Poincaré en el plano $x=0$. (a) Sin gravedad las islas se mantienen en el sistema de partículas sólidas. (b) Con $Fr=6.15$, todas las trayectorias convergen a la esquina inferior derecha del mapa.

La gravedad, sin embargo, introduce una componente vertical que depende de la magnitud del número de Froude. Para un Fr suficientemente pequeño, los efectos inerciales no pueden mantener a las partículas en suspensión, y toda la estructura del flujo se disgrega, destruyendo el proceso de mezcla cuando ocurre sedimentación.

La sección de Poincaré construida en este caso es menos densa, debido a que las partículas con cualquier condición inicial terminan sobre la tapa inferior, donde son empujadas hacia la esquina por la aceleración centrífuga, y se mantienen atrapadas porque la magnitud de la gravedad es mayor que el arrastre o la sustentación, previniendo el escape de partículas y su reingreso al flujo.

De estos resultados se deduce que para un determinado Re , existe un Fr mínimo tal que el movimiento caótico de partículas sólidas no se anula. Los siguientes análisis de la topología del flujo consideran sólo el efecto de la inercia, con el propósito de entender los mecanismos de dispersión con $Re=350$. La identificación de las estructuras dentro del flujo se realiza a través de mapas Lagrangianos promedio, en una sección transversal del cilindro, con un ángulo constante.

Los mapas Lagrangianos se construyen al simular las velocidades y trayectorias de 10.000 partículas que se encuentran inicialmente en esta sección, y calcular la diferencia relativa de la magnitud de la velocidad de las partículas, con la velocidad promedio de todo el flujo:

$$\tilde{u}^L(i, j) = \frac{u^L(i, j) - \langle u \rangle}{\langle u \rangle} \quad (10)$$

donde $u^L(i, j)$ es el promedio Lagrangiano a lo largo de la longitud de la partícula cuya posición inicial es el punto (i, j) de la sección, y $\langle u \rangle$ es la magnitud de la velocidad promedio del flujo.

En regiones donde el flujo es caótico, las partículas cubren ergódicamente el dominio, y muestrean todas las velocidades del flujo, por lo tanto su valor es aproximadamente cero en el caso de partículas pasivas de fluido. Como se muestra en la Figura 5, el mapa Lagrangiano revela las zonas caóticas y la magnitud de la región toroidal, que disminuye de tamaño en el caso de

partículas sólidas. Las órbitas quasi-periódicas dentro de esta región se desestabilizan en zonas donde existe menor traspaso de cantidad de movimiento, y el flujo no puede sobreponerse a la inercia, permitiendo el escape por efectos que dependen del número de Stokes local. El mismo fenómeno ocurre en las secciones integrables cercanas al eje, donde las menores velocidades son incapaces de mantener el movimiento organizado en partículas sólidas.

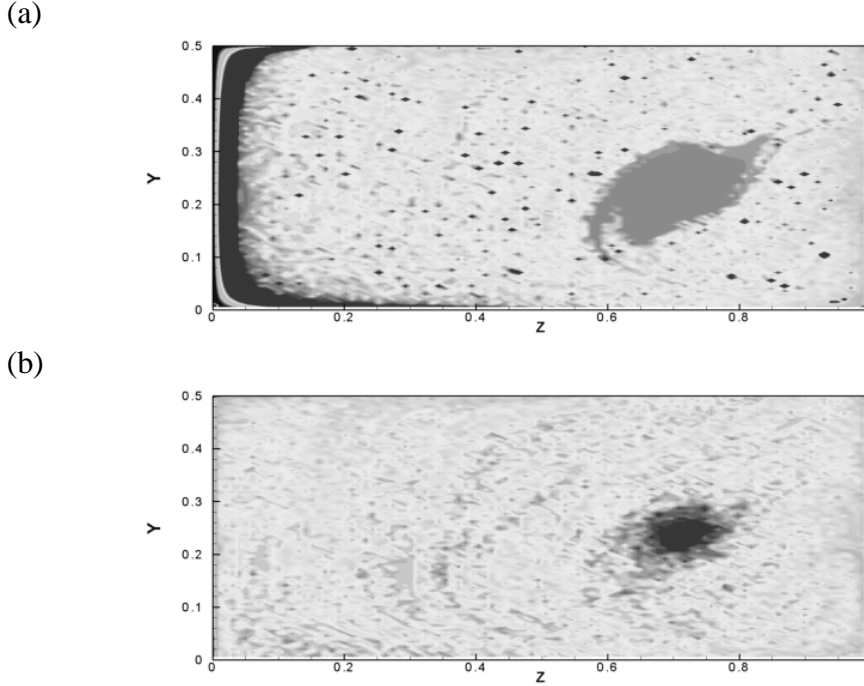


Figura 5. Mapas Lagrangianos promedio en $x=0$. (a) Mapa de partículas de fluido muestran la región toroidal y la zona integrable cercana al eje, y (b) Mapa para las partículas inerciales donde las secciones integrables disminuyen, pero algunas bandas aparecen en el área de mezcla.

En el caso de partículas sólidas, los mapas muestran también pequeñas bandas invariantes que aparecen sobre el toro, en una zona que está aparentemente bien mezclada desde el punto de vista del fluido. Una forma de determinar si globalmente la mezcla es mayor es calcular la varianza de concentración (Lackey 2004), que corresponde al segundo momento estadístico centrado del número de partículas contenido en un plano bidimensional en un instante de tiempo, lo que se obtiene al colapsar la dirección θ de la malla en coordenadas cilíndricas:

$$\sigma_c^2(t) = \frac{1}{I \times J} \sum_i^I \sum_j^J (C^t(i, j) - \bar{C}(t))^2 \quad (11)$$

donde I y J son los números máximos de nodos en las direcciones coordenadas r y z respectivamente, y la concentración instantánea promedio es:

$$\bar{C}(t) = \frac{1}{I \times J} \sum_i^I \sum_j^J C^t(i, j) \quad (12)$$

De esta forma podemos cuantificar la mezcla y compararla en ambos casos. Al calcular la varianza de concentración de partículas inerciales después de 40 rotaciones de las tapas, con parámetros $Re=350$, $AR=1$, $SG=2.65$, y $\tilde{d} = 0.02$, obtenemos un valor de $\sigma_c^2 = 3.15$, lo que indica que el flujo es menos homogéneo, comparado con el valor calculado para partículas pasivas de fluido $\sigma_{cf}^2 = 1.00$ (Lackey, 2004), lo que confirma que la mezcla es más lenta en el caso de partículas sólidas.

4. CONCLUSIÓN Y DISCUSIÓN

En este estudio se investiga numéricamente la dinámica de partículas sólidas en el flujo permanente tridimensional dentro de un cilindro, con tapas que rotan en dirección contraria a la misma velocidad, cuyos parámetros son $Re=350$ y $AR=1$. El flujo está caracterizado por la inestabilidad de la capa de corte desarrollada en el plano central, lo que genera una zona caótica que contribuye a la mezcla de las partículas sólidas.

Las ecuaciones de trayectoria y de cantidad de movimiento se resuelven con modelos empíricos de las fuerzas de superficie, y de forma desacoplada con respecto al flujo, usando un esquema de colisión elástica con los bordes sólidos. Las simulaciones mostraron que el flujo caótico depende de una relación entre el número de Reynolds y el número de Froude, ya que la gravedad puede suprimir la mezcla cuando Fr disminuye. Los análisis posteriores que no consideran gravedad, mostraron que las regiones integrables persisten, aunque su tamaño se redujo debido a efectos inerciales.

A pesar de que el diámetro de las islas observadas en los mapas Lagrangianos y en las secciones de Poincaré se redujo, la varianza de concentración demostró que la mezcla es más lenta para las partículas sólidas. Este fenómeno ocurre debido a que en ciertas regiones del flujo la escala de tiempo intrínseca de las partículas inerciales es mayor que la escala de tiempo de las estructuras más grandes del flujo, lo que se refleja en la magnitud del número de Stokes.

Muchos aspectos adicionales se descubrieron en este estudio que requieren mayor investigación para evaluar en detalle la dependencia de los parámetros definidos en la ecuación dinámica de las partículas. Primero, la aparición del modo 3 en el flujo tridimensional impone una simetría en $1/6$ del cilindro, lo que puede simplificar el análisis e investigar otras secciones de Poincaré como se muestra en la Figura 6. La identificación de nuevas estructuras y barreras en las trayectorias motiva a estudiar las órbitas periódicas y el cálculo de otros observables en el flujo con la teoría explicada por Cvitanovic et al. (2005). Un valor de interés es la dispersión de partículas, lo que puede calcularse también a partir de la teoría de Taylor para la difusión turbulenta, obteniendo la función de autocorrelación de la velocidad, y considerando el efecto que pudieran tener las colisiones en la pérdida de dependencia temporal de las velocidades Lagrangianas de las partículas.

La teoría de advección caótica puede ayudar a explorar estos flujos complejos con otros números de Reynolds, y encontrar resultados de relevancia física que permitan diseñar experimentos para validar y complementar estos resultados, y finalmente crear dispositivos que sean capaces de mezclar con alta eficiencia.

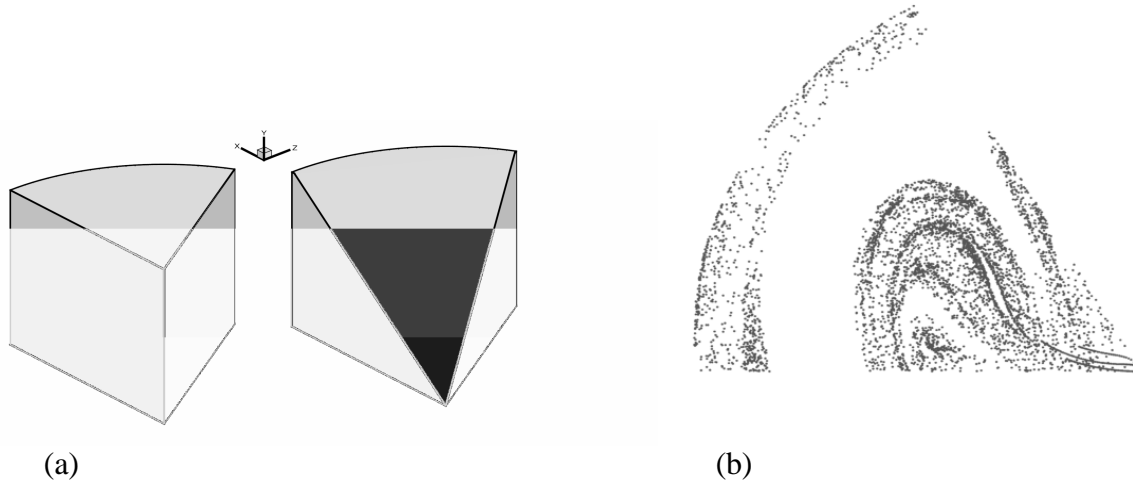


Figura 6. Sección de Poincaré en un plano transversal. (a) División de un sexto del cilindro antes y después de intersectarlo con el plano de la sección. (b) La sección de Poincaré de las partículas sólidas muestra estructuras adicionales de las trayectorias, lo que explicaría las bandas en el mapa Lagrangiano.

REFERENCIAS

Aref, H., 1984. Stirring by chaotic advection, *J. of Fluid Mechanics* 143, 1-21.

Aref, H., 2002. The development of chaotic advection, *Phys. of Fluids* 14, 1315-1325.

Auton, T. R., Hunt, J. C. R., Prud'homme, M. 1988. The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotational flow, *J. of Fluid Mechanics* 197, 241-257.

Beigie, D., Leonard, A., Wiggins, S. 1994. Invariant manifold templates for chaotic advection, *Chaos, Solitons, and Fractals* 4, 749-868.

Chien, W.L., Rising, H., Ottino, J. M. 1986. Laminar mixing and chaotic mixing in several cavity flows, *J. of Fluid Mechanics* 170, 355-377.

Crowe, C. T., Troutt, T. R., Chung, J. N. 1998. *Multiphase Flows with Droplets and Particles*, CRC Press.

Cvitanovic P. et al., 2005. *Chaos: Classical and Quantum*, advanced graduate e-textbook, ChaosBook.org (Niels Bohr Institute, Copenhagen).

Dombre, T. et al., 1986. Chaotic streamlines in ABC flows, *J. of Fluid Mechanics* 167, 353-391.

Gilmanov, A., Sotiropoulos, F., Balaras E., 2003. A general reconstruction algorithm for simulating flows with complex 3D immersed boundaries on Cartesian grids, *J. Comput. Phys.* 191, 660-669.

Lackey, T. C., 2004. Numerical investigation of chaotic advection in three-dimensional experimentally realizable rotating flows, PhD Thesis, Georgia Institute of Technology.

Lopez J. M. et al., 2002. Instability and mode interactions in a differentially driven rotating cylinder, *J. of Fluid Mechanics* 462, 383-409.

Maxey, M. R. 1990. On the advection of spherical and nonspherical particles in a non-uniform flow. *Phil. Trans: Phys. Sci. and Eng.* 333, 289-307.

Moisy, F., Pasutto, T., Rabaud, T. 2003. Instability patterns between counter-rotating disks. *Nonlin. Proc. In Geophysics* 10, 281-288.

Nore, C. et al., 2003. The 1:2 mode interaction in exactly counter-rotating von Karman swirling flow, *J. of Fluid Mechanics* 477, 51-88.

Nore, C. et al., 2004. Survey of instability thresholds of flow between exactly counter-rotating disks, *J. of Fluid Mechanics* 511, 45-65.

Ottino, J. M., 1990. Mixing, chaotic advection, and turbulence, *Annual Rev. Fluid Mech.* 22, 207-253.

Rothstein, D., Henry, E., Gollub, J.P. 1999. Persistent patterns in transient chaotic fluid mixing, *Nature* 401, 770-772.

Solomon, T. H., Mezic, I. 2003. Uniform resonant chaotic mixing in fluid flows, *Nature* 425, 376-380.

Sotiropoulos, F., Ventikos, Y., Lackey T. C., 2001. Chaotic advection in three-dimensional stationary vortex-breakdown bubbles: Šil'nikov's chaos and the devil's staircase, *J. of Fluid Mechanics* 444, 257-297

Sotiropoulos, F., Webster, D. R., Lackey, T. C. 2002. Experiments on Lagrangian transport in steady vortex breakdown bubbles in a confined swirling flow, *J. of Fluid Mechanics* 466, 215-248.

Tsega, Y., Michaelides, E. E., Eschenazi, E. V. 2001. Particle dynamics and mixing in the frequency driven "Kelvin cat eyes" flow, *Chaos* 11, 351-358 (2001).

Wang, L. P., Burton, T. D., Stock, D. E. 1990. Chaotic dynamics of heavy particle dispersion: Fractal dimension versus dispersion coefficients, *Phys. Fluids A* 2, 1305-1308.

Wang, L. P., Burton, T. D., Stock, D. E. 1991. Quantification of chaotic dynamics for heavy particle dispersion in ABC flow", *Phys. Fluids A* 3, 1073-1080.

Wang L. P. et al, 1992. Chaotic dynamics of particle dispersion in fluids, *Phys. Fluids A* 4, 1789-1804.

