

Financiamiento: FONDECYT 1970507-1997, FONDEF 97-2028 y ENDESA SA.

Este Proyecto cuenta con el financiamiento de los proyectos FONDECYT 1970507-1997, FONDEF 97-2028 y ENDESA SA. Adicionalmente el autor desea dar las gracias a Caminos y Nieve de la División ANDINA-CODELCO por facilitar la información nivometeorológica utilizada en este trabajo.

Referencias Bibliográficas

Vergara, J., 1997: Pronóstico Numérico del tiempo con fines hidrológicos: Resultados preliminares, XIII Congreso Chileno de Ingeniería Hidráulica, Desastres Naturales: Impacto en los recursos hídricos y obras hidráulicas, Santiago, 22, 23 y 24 de Octubre de 1997. 139-150.

Vergara, J., 1998: Pronóstico del tiempo aplicado al sector hidroeléctrico chileno, Seminario Latino-Americano Sobre los Impacto de El Niño/La Niña en Geostro de Recursos Hídricos em Sistemas Hidroeléctricos, 14 páginas.

Vergara, J., Hann-Ming Henry Juang and Song-You Hong, 1998: An evaluation of the regional mesoscale forecasting for Chile-South America. 16th Conference on Weather Analysis and Forecasting and 12th Conference on Numerical Weather Prediction, 11-16 January 1998, Phoenix, Arizona.

Vergara, J., 1998: Anuario nivometeorológico Lagunitas-1997: CODELCO-CHILE, CD-ROM.

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

XIV CONGRESO CHILENO DE HIDRAULICA

USO DE WAVELETS PARA LA MODELACIÓN DE CAUDALES.

XIMENA VARGAS M.¹

CRISTIAN NÚÑEZ R.²

RESUMEN

Una moderna herramienta matemática utilizada para el análisis de señales, como es la transformada wavelet, es empleada en el análisis de series de caudales medios diarios y caudales medios mensuales. En el trabajo se verifica que este tipo de series hidrológicas puede ser modelada usando este procedimiento.

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0 \quad (6)$$

¹ Ingeniero Civil. Profesor Asociado, Depto. Ingeniería Civil, Universidad de Chile

² Egresado de Ingeniería Civil. Ayudante de Investigación. Depto. Ingeniería Civil, Universidad de Chile

1. INTRODUCCIÓN

Los registros de una señal tienen como objetivo el realizar un análisis eficiente de su evolución y comportamiento a través del tiempo, para de este modo interpretar la información y posteriormente reconstruir el fenómeno y su comportamiento.

Como es sabido, una señal consiste básicamente en información codificada de un cierto fenómeno y, por lo general, para trabajar con esta información el modo de codificación se realiza a través de números, los cuales se obtienen a través de mediciones con algún método de registro según sea el fenómeno en estudio. Cuando estos registros se realizan a través del tiempo, se habla de series de tiempo (Meyer et al., 1993).

Entre las herramientas matemáticas que se han utilizado tradicionalmente para analizar señales se pueden citar la transformada de Fourier y la transformada de Fourier Windowed; actualmente se han visualizado grandes ventajas de la transformada wavelet, pues presenta un mejor comportamiento en el ámbito temporal cuando se tienen procesos no estacionarios (Kumar, 1994).

La aplicación que comúnmente se encuentra en la literatura en relación con este tema es en el campo de las comunicaciones donde, al conocerse cómo es la señal que debe recibirse, la wavelet permite verificar el comportamiento y distinguir si se observan desviaciones respecto a dicho comportamiento típico.

En el campo de la hidrología existen escasas investigaciones respecto de la aplicabilidad de esta herramienta para el análisis de las series de tiempo de variables hidrológicas como son los caudales medios diarios o mensuales, por lo que en este trabajo se analiza la potencialidad de las wavelets tanto para representar el comportamiento de estas variables como para usarlas para el relleno y ampliación de datos.

2. ANTECEDENTES TEÓRICOS.

Wavelet es una función $\psi(t)$ que debe satisfacer la condición que su integral sobre el eje de su dominio es nula, tal como se expresa en la ecuación 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \quad \forall k \in N \quad (1)$$

Mientras la transformada de Fourier trabaja orientada a conocer la frecuencia, sin relacionarla con el tiempo, Wavelets identifica bandas de frecuencia en su escala (dilataciones y contracciones), a la vez que la relaciona con el tiempo (traslaciones), por lo que se perfila su gran importancia para el estudio de diversos tipos de señales (Mueller, 1998).

La transformada continua wavelet de una señal $x(t)$ se define como:

$$W_x(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{a,b}(t) dt \quad (2)$$

donde $\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ $a, b \in R$ y $a \neq 0$

La función $\psi(t)$ se denomina wavelet madre, la cual es una función oscilatoria y amortiguada. Cada función $\psi_{a,b}(t)$ que deriva de esta wavelet madre, es una traslación y compresión o dilatación de la wavelet madre. El parámetro 'a' representa la dilatación o compresión de la wavelet madre y 'b' representa la traslación de ésta en el tiempo, $|a|^{-1/2}$ es un factor de normalización que mantiene la energía de las funciones generadas $\psi_{a,b}(t)$ igual a la energía de la wavelet madre $\psi(t)$ (Meyer, 1994).

La reconstrucción de la señal $x(t)$ se logra a través de la suma de las proyecciones ortogonales de la señal en la wavelet, mientras que los coeficientes de la wavelet son calculados como productos internos, ecuación 3 (Barrios, 1997).

$$x(t) = C_\psi \int_{a>0} \int_{b \in R} W_x(a,b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (3)$$

C_ψ constante que depende de $\psi(t)$

Algunas wavelets típicas son las denominadas Haar y Daubechies que se muestran en las figuras 1 y 2. La más simple, la wavelet Haar, se define como:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 0.5 \\ -1 & 0.5 \leq t < 1 \\ 0 & \forall t < 0 \wedge t \geq 1 \end{cases} \quad (4)$$

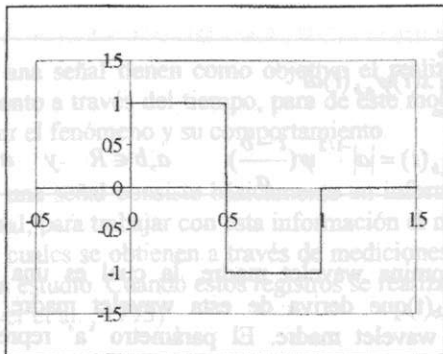


Fig. 1. Haar Wavelet.

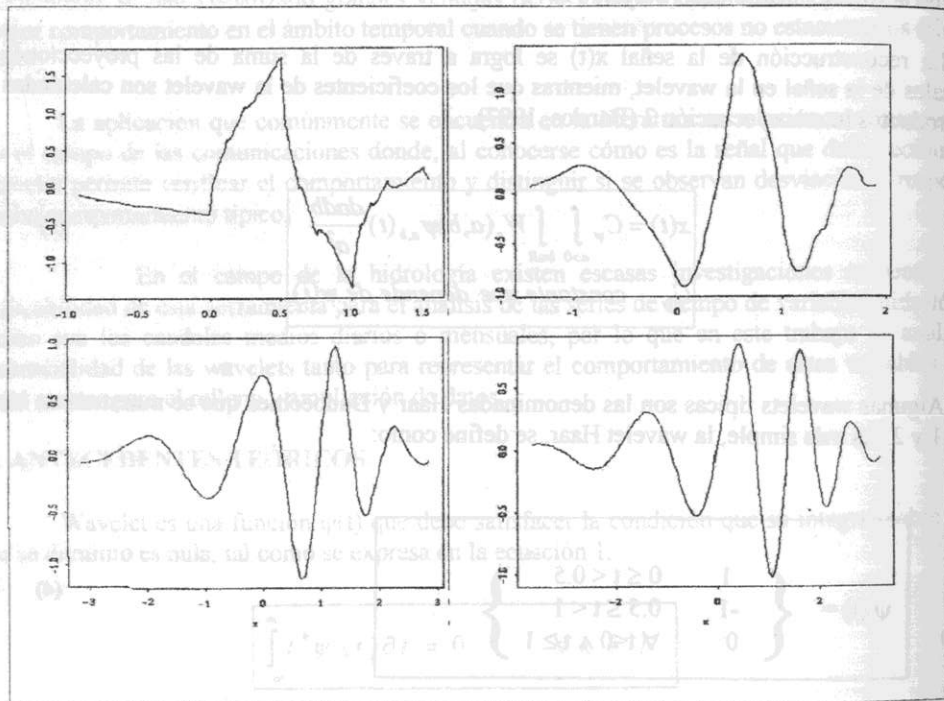


Fig. 2. Familia de wavelets Daubechies

Para aclarar la ventaja de analizar una señal a través de wavelets, en la figura 3 se presentan las bases para descomponer una señal en el plano Tiempo-Frecuencia, donde se indica la frecuencia contenida en una señal, en el dominio del tiempo. Toda descomposición a través de un plano Tiempo-Frecuencia se encuentra dividido en celdas, llamadas celdas de Heisenberg, cuya mínima área está determinada por el principio de incertidumbre. El principio de

incertidumbre de Heisenberg indica que no se puede medir arbitrariamente, con una resolución elevada, tanto en el eje Tiempo como en el de Frecuencia. Cuando se utiliza una base estándar en el dominio tiempo, es decir, funciones delta de Dirac, se puede localizar muy bien el proceso en el dominio tiempo, pero no en todo el dominio de Frecuencia. Lo anterior se encuentra representado a través de delgadas celdas alargadas en la Fig. 3a. En el caso de realizar el análisis basándose en series de Fourier, se obtiene una localización casi exacta de la ubicación de la frecuencia (magnitud), pero no se le puede ligar con algún instante de tiempo (con gran precisión), lo cual, se aprecia en la Fig. 3b. Se puede aplicar también una ventana móvil para analizar la señal, aplicando la transformada de Fourier en cada uno de estos segmentos para tratar de localizar la presencia de cambios en la frecuencia a través del dominio tiempo, de manera más precisa (transformada de Fourier Windowed). Estas particiones cubren completamente el plano Tiempo-Frecuencia con celdas regulares, del mismo tamaño y de la misma razón entre sus lados, lo cual, es una limitante para su aplicación en cuanto a resolución, Fig. 3c. La transformada wavelet está representada en el plano Tiempo-Frecuencia, de la Fig. 3d, en este esquema, altas frecuencias pueden ser bien localizadas en el tiempo, pero la incertidumbre en la ubicación de la frecuencia aumenta tanto como esta se incrementa, lo cual se ve reflejado en las delgadas y alargadas celdas que se forman al ir aumentando la frecuencia. Consecuentemente, el eje de frecuencia está dividido (particionado) finamente entorno a bajas frecuencias. Esta limitación aparece porque en la transformada wavelet la resolución que se alcanza en la frecuencia resulta de la incertidumbre asociada con esta, lo cual, esta asociado en forma inversa a la escala de análisis (Kumar, 1996).

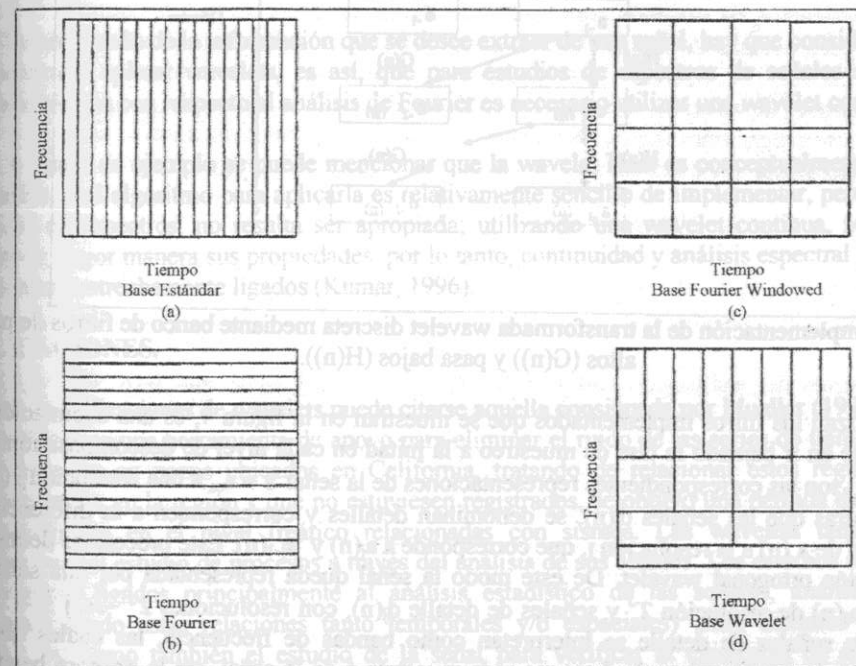


Fig. 3. Esquema de la descomposición en el plano Tiempo-Frecuencia utilizando diferentes bases

Una semejanza entre la transformada de Fourier y la transformada wavelet, es que ambas son operadores lineales que generan una estructura de datos que contienen $\log_2 n$ segmentos de diversa longitud, usualmente para el trabajo de estos datos se utiliza un vector de longitud 2^n (Graps, 1995).

2.1. ANALISIS DE SEÑALES UTILIZANDO WAVELETS.

Para la aplicación de la transformada wavelet discreta de manera eficiente se utiliza el análisis de multiresolución de señales, el cual permite descomponer la señal en distintas resoluciones, es decir diferentes grados de detalles. Entendiendo por resolución el contenido de frecuencias de la señal original, el nivel máximo de resolución esta dado por la cantidad de puntos de muestreo (n), siendo el nivel j definido como:

$$J = \log_2(n) \quad (5)$$

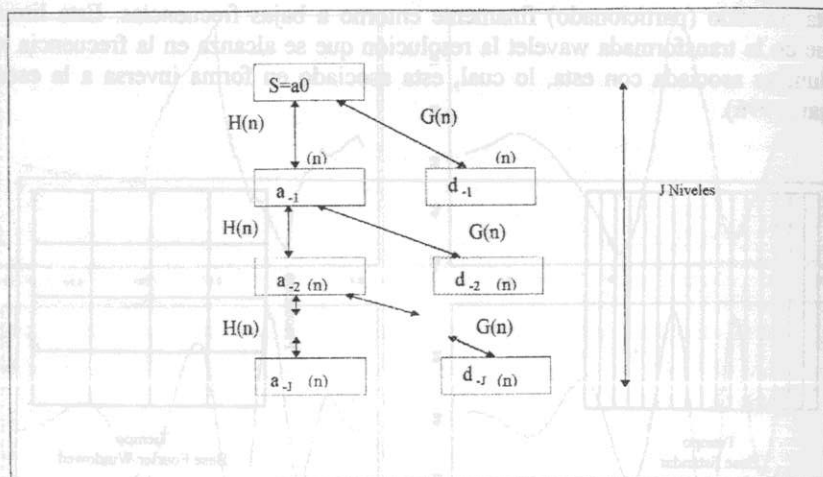


Figura 4: implementación de la transformada wavelet discreta mediante banco de filtros de pasa altos ($G(n)$) y pasa bajos ($H(n)$).

Lo que realizan los filtros implementados que se muestran en la figura 4, es una decimación, la cual consiste en ir bajando la tasa de muestreo a la mitad en cada nivel de descomposición. Las señales $a_j(n)$ son las correspondientes representaciones de la señal $S = a_0$, a una resolución j ($-J \leq j \leq -1$), mientras que las señales $d_j(n)$, se denominan detalles y corresponden a la diferencia de información de $x(n)$ a la resolución j , que corresponde a $a_j(n)$ y $a_{j-1}(n)$. Este proceso se denomina representación ortogonal wavelet. De este modo la señal queda representada por una señal de referencia $a_j(n)$ de resolución 2^{-j} y señales de detalle $d_j(n)$, con resoluciones 2^{-j} $-J \leq j \leq -1$. Este conjunto de señales de detalle se interpretan como bandas de frecuencia, las cuales quedan definidas por la decimación y la frecuencia de muestreo f de la señal, así la primera banda de frecuencia sería para el nivel $-J$ y estaría comprendida entre f y $f/2$ (Barrios, 1997).

2.2 ELECCIÓN DE WAVELET.

Para seleccionar la wavelet (Haar, Daubechies, Morlet, Hat, etc.) apropiada para el estudio que se está realizando, debe tomarse en cuenta tanto las características de éstas (simétricas o antisimétricas, regulares o irregulares) como consideraciones acerca del objetivo que tenga el estudio de la señal, es decir, se la da una prioridad al dominio físico (tiempo o espacio) o al dominio de Fourier.

A través del uso de wavelets es posible hacer hincapié en cada región para el estudio de la forma de transición entre frecuencias o actividad estacionaria, para lo cual se debe hacer la elección de un tipo apropiado de wavelet.

Una wavelet irregular o discontinua y uniforme, es la wavelet Haar, la cual a menudo resulta ser una buena y simple elección para aplicaciones donde los procesos poseen variaciones en la forma de su comportamiento. Wavelets más sofisticadas, como lo son las continuas regulares o suaves, algunas veces no entregan resultados significativamente mejores, por lo que es necesario tener especial cuidado en contrapesar las ventajas de estas wavelets regulares contra las más simples e irregulares. Al trabajar con una wavelet regular y suave hay un incremento en el número de componentes de ésta con relación a una irregular, y consecuentemente aumenta la complejidad los algoritmos para trabajar con su transformada, por otro lado hay que considerar que al trabajar con una wavelet irregular, es decir posee un número finito de componentes, se produce una pérdida de información que debe ser considerada (Daubechies, 1992).

Dependiendo de la información que se desee extraer de una señal, hay que considerar si es o no necesario aplicar wavelets, es así, que para estudios de espectros de señales sean una verdadera ventaja con respecto al análisis de Fourier es necesario utilizar una wavelet continua.

A modo de ejemplo se puede mencionar que la wavelet Haar es conceptualmente simple de entender, y el algoritmo para aplicarla es relativamente sencillo de implementar, pero para su aplicación en espectros, no resulta ser apropiada; utilizando una wavelet continua, se pueden localizar de mejor manera sus propiedades, por lo tanto, continuidad y análisis espectral (filtrado) se encuentran estrechamente ligados (Kumar, 1996).

3. APLICACIONES.

Entre las aplicaciones de wavelets puede citarse aquella consignada por Mueller (1998) donde al utilizarla como una herramienta de apoyo para eliminar el ruido de las series de tiempo de los niveles freáticos en pozos ubicados en California, tratando de relacionar estos registros con sismos ocurridos en la región y que no estuviesen registrados, se obtuvo una pérdida de parte de las fluctuaciones en el nivel freático relacionadas con sismos. Las wavelets también son utilizadas para el estudio de procesos a través del análisis de sus señales. Los estudios realizados se encuentran ligados principalmente al análisis estadístico de las señales, análisis de las relaciones (siendo estas relaciones tanto temporales y/o espaciales) entre distintos procesos (señales), así como también el estudio de la señal para verificar la existencia de estructuras coherentes y poder reproducir el comportamiento del proceso. Otra aplicación, es utilizar wavelets para analizar fenómenos para poder conocer su comportamiento espacial.

En el caso del trabajo de Von Sachs (1998), se muestra el desarrollo de un test para el estudio de la estacionariedad de una serie de tiempo; para esto, se analiza la evolución de la covarianza a través del tiempo utilizando wavelets, para identificar las variaciones en su frecuencia a través del tiempo.

En el estudio de Whitcher (1998), se aplican wavelets para el análisis de la evolución de la varianza en series de tiempo. El Test planteado para la homogeneidad de la varianza se aplica a un registro de la altura mínima de escurrimiento anual medida a partir del año 622 hasta 1284 D.C. en el río Nilo. Al realizar una descomposición de esta serie de tiempo se identificó que existía un cambio en el comportamiento de la varianza, el cual, al ser analizado se verifica que coincide con el cambio del instrumento de medición de la altura de escurrimiento.

Una aplicación de wavelets para análisis de fenómenos que se encuentran relacionados entre sí, pero cuyo análisis en su conjunto no entrega buenos resultados por encontrarse caracterizados en escalas de tiempo diferentes, se muestra en el trabajo realizado por Nason et al. (1997). Este problema es muy común en los procesos geofísicos en general, si bien el trabajo no se realizó sobre un proceso geofísico, sino al campo de la medicina, muestra como utilizando wavelets, e interpretando la representación de las series de tiempo, es posible estudiar su comportamiento en conjunto (entre estas series existe una relación, que no necesariamente se conoce completamente). Es así, como se analizó la relación entre el estado de vigilia de un bebe y las pulsaciones que ésta registra a través de un tiempo determinado.

La aplicación de wavelets para el estudio de estructuras coherentes, puede dar buenos resultados, pero además de aplicar la descomposición de la señal para el análisis de ésta es necesario conocer y comprender completamente el proceso. La investigación en procesos geofísicos a través de wavelets, se encuentra en un estado de pleno desarrollo, es así, como se han desarrollado investigaciones acerca del comportamiento de las tormentas, a través de las wavelets para poder identificar si existen estructuras coherentes en las señales registradas.

3.1 MODELACION DE CAUDALES

Para la aplicación de la metodología de análisis de señales a través de wavelets y su transformada, se han seleccionado tres estaciones las cuales se identifican en la tabla 1.

A través del análisis de multiresolución, es posible modelar una serie en período de tiempo determinado de manera muy eficiente y con errores mínimos, en este caso se aplica la descomposición a la estación Río Maipo en el Manzano para el periodo 1983-1986 utilizando la wavelet Haar, pero sobre la base de la metodología se toman sólo 1024 valores. Los resultados y detalles se muestran en las figuras: 5 y 6.

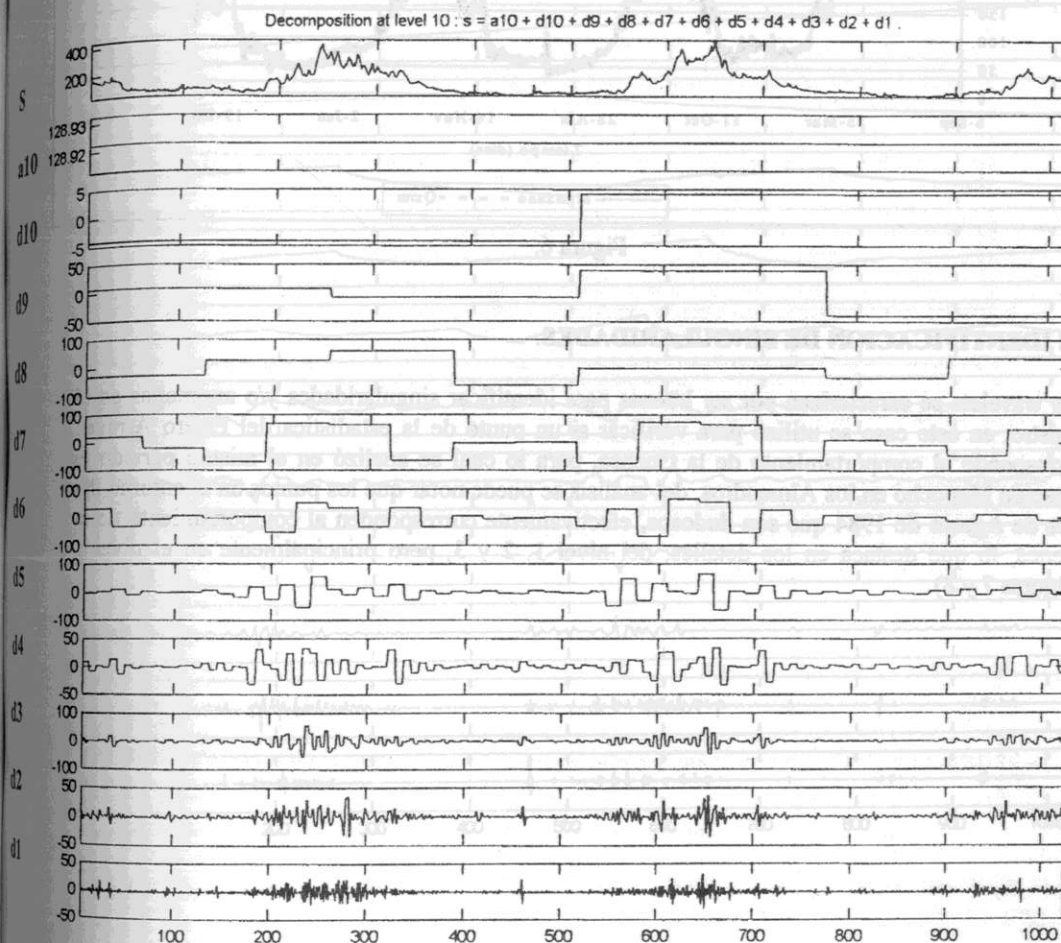
La serie de tiempo (señal), puede ser representada por:

$$S(t) = a_J(t) + \sum_{j=1}^J d_j(t) \quad (6)$$

Tabla 1: ESTACIONES ANALIZADAS

Estación	Código BNA	Cuenca	Latitud	Longitud	Area	Altitud
Río Maipo en el Manzano	05710001-K	Río Maipo	33° 35' S	70° 24' W	4968 Km ²	850 m.s.n.m
Estero Arrayán en la Montosa	05722001-5	Río Maipo	33° 21' S	70° 29' W	219 Km ²	880 m.s.n.m
Río Mapocho en los Almendros	05722002-3	Río Maipo	33° 22' S	70° 28' W	620 Km ²	1024 m.s.n.m

Figura 5: Modelación de Caudales diarios Estación Río Maipo en Manzano (años 83-86)



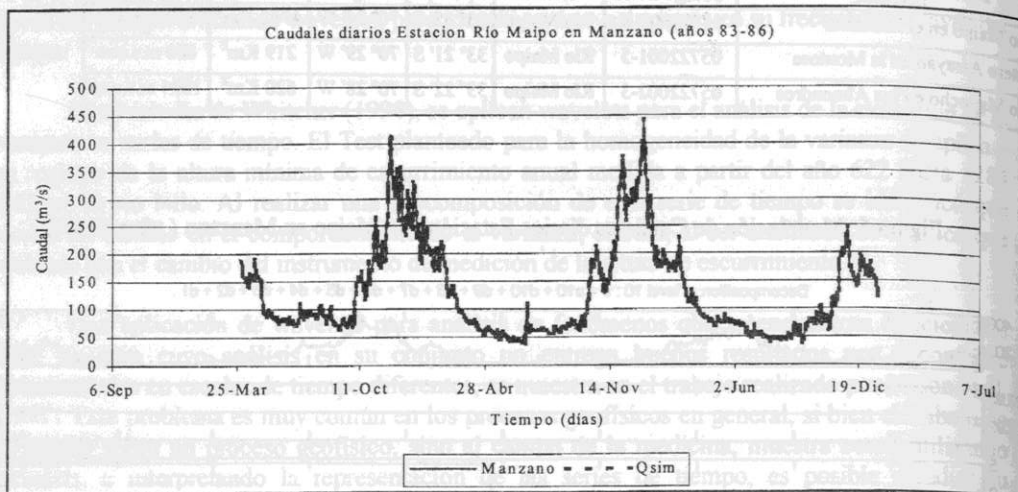
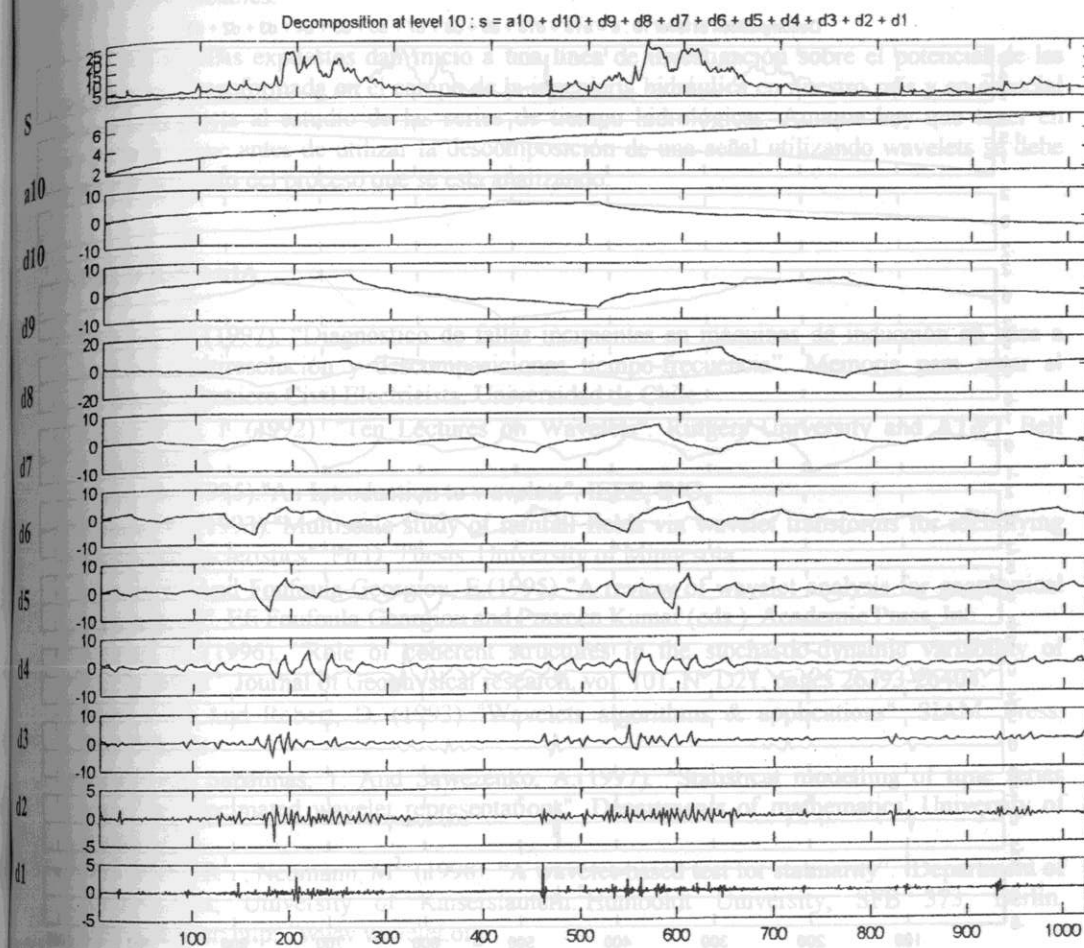


Figura 6.

3.2 IDENTIFICACION DE SINGULARIDADES.

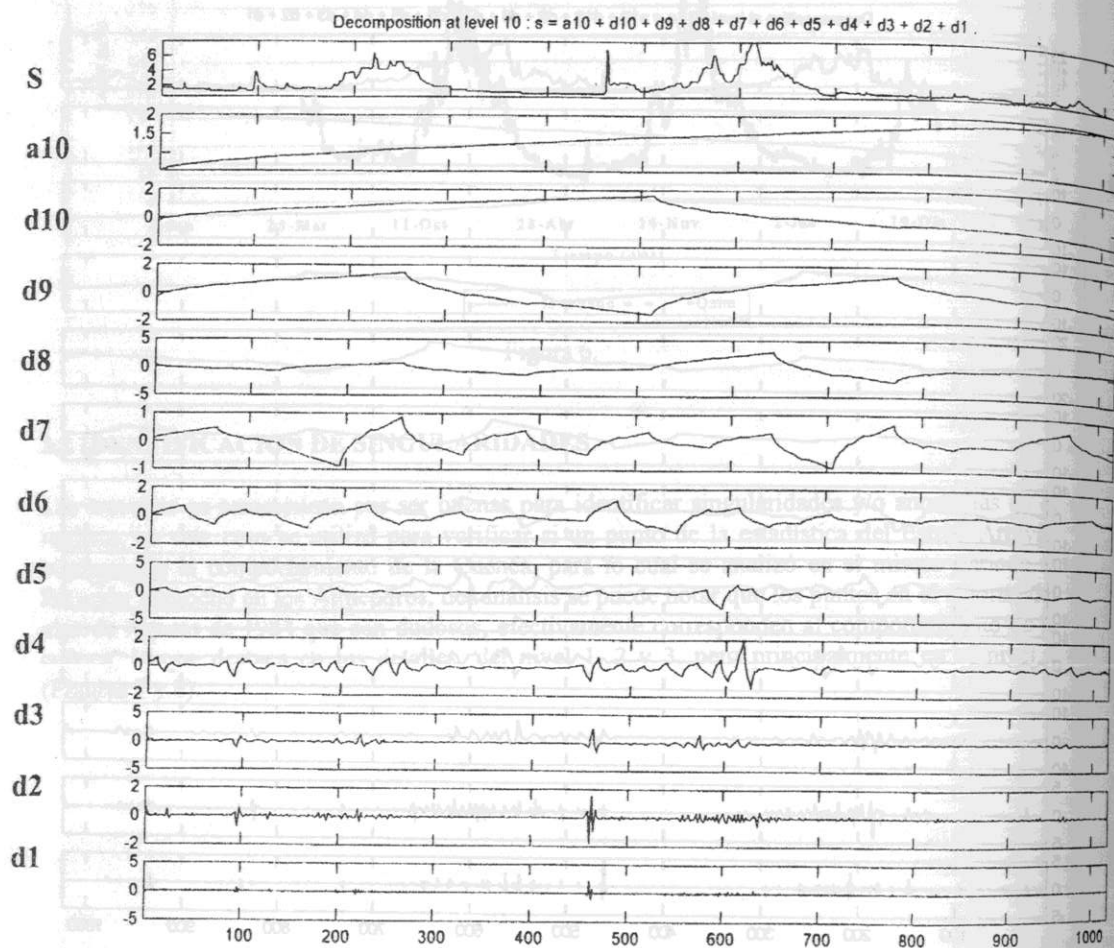
Las wavelets se caracterizan por ser buenas para identificar singularidades y/o anomalías en el registro, en este caso se utilizó para verificar si un punto de la estadística del Estero Arrayán corresponde al comportamiento de la Cuenca, para lo cual se analizó en el mismo periodo la Estación Mapocho en los Almendros, del análisis se puede notar que los puntos en el entorno del mes de Agosto de 1984 que son dudosos, efectivamente corresponden al comportamiento de la cuenca, lo que destaca en los detalles, del nivel 1, 2 y 3, pero principalmente en el nivel 1 (Figuras 7 y 8).

Figura 7: Descomposición de Caudales diarios Estación Río Mapocho en los Almendros usando wavelet Db2 (años 83-86)



Buyers, S., Guttorp, P. And Percival, D. (1998). "Testing for homogeneity of time series: Long memory, wavelets and the Nile river". Disponible en <http://www.earth.berkeley.edu/~percival/>

Figura 8: Descomposición de Caudales diarios Estación Estero Arrayán en la Montosa usando wavelet Db2 (años 83-86)



4. CONCLUSIONES

Sobre la base de los análisis realizados es posible señalar que las funciones wavelets son capaces de modelar una serie de tiempo en forma exacta, aplicadas para reconstruir la serie en el mismo período de tiempo. Por otro lado, queda bastante explícito su potencial para la detección de singularidades en señales de las cuales se conoce el tipo de comportamiento a través del estudio de sus detalles.

Los análisis expuestos dan inicio a una línea de investigación sobre el potencial de las wavelets y su transformada en el campo de la ingeniería hidráulica en nuestro país y en especial en lo que respecta al estudio de las series de tiempo hidrológicas. Aunque hay que tener en consideración que antes de utilizar la descomposición de una señal utilizando wavelets se debe tener conocimiento del proceso que se está analizando.

5. BIBLIOGRAFIA

- Barrios, A. (1997). "Diagnóstico de fallas incipientes en máquinas de inducción en base a análisis multiresolución y descomposiciones tiempo-frecuencia". Memoria para optar al Título de Ingeniero Civil Electricista. Universidad de Chile.
- Daubechies, I. (1992). "Ten Lectures on Wavelets". Rutgers University and AT&T Bell Laboratories.
- Graps, A. (1995). "An Introduction to wavelets". IEEE, INC.
- Kumar, P. (1993). "Multiscale study of rainfall fields via wavelet transforms for identifying scaling characteristics". Ph.D. Thesis. University of Minnesota.
- Kumar, P. And Foufoula-Georgiou, E. (1995). "A review of wavelet analysis for geophysical applications". Efi Foufoula-Georgiou and Praveen Kumar (eds.). Academic Press, Inc.
- Kumar, P. (1996). "Role of coherent structures in the stochastic-dynamic variability of precipitation". Journal of Geophysical research, vol. 101, N° D21, pages 26393-26404.
- Meyer, Y. And Robert, D. (1993). "Wavelets algorithms & applications". SIAM. Press, Philadelphia.
- Nason, G., Sapatinas, T. And Sawezenko, A. (1997). "Statistical modelling of time series using non-decimated wavelet representations". Departments of mathematics, University of Bristol, UK.
- Von Sachs, R¹, Neumann, M². (1998). "A wavelet-based test for stationarity". ¹Department of Mathematics, University of Kaiserslautern. ²Humboldt University, SFB 373, Berlín. Disponible en <http://www.wavelet.org>.
- Whitcher, B., Buyers, S., Guttorp, P. And Percival, D. (1998). "Testing for homogeneity of variance in time series: Long memory, wavelets and the Nile river". Disponible en <http://www.wavelet.org>.