SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

XIV CONGRESO CHILENO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

PROPUESTA DE UN MODELO MATEMÁTICO PARA LA GENERACIÓN DE LEYES REGIONALES PRECIPITACIÓN-ESCORRENTÍA

DR. ING. ROBERTO PIZARRO TAPIA, INGENIERO FORESTAL[1]

DR. ING. IGNACIO LÓPEZ TORRES, INGENIERO NAVAL[2]

RESUMEN

Este trabajo presenta las características principales del modelo precipitación-escorrentía (Pizarro, 1996), que se propone como complementario o alternativo a los que hoy se utilizan para definir leyes regionales en la España peninsular. Asimismo, analiza la relación precipitación-escorrentía, en 22 cuencas sometidas a régimen natural y distribuidas por el territorio español peninsular. Para ello, se utilizan análisis de regresión no paramétricos, que permiten determinar la ductilidad de tres modelos de base física, a saber:

a) $A=Pe^{(-k/P)}$ (Modelo A, Budyko, 1948)

b) $A=P-[P/(1+(P/k)^2)^{0,5}]$ (Modelo B, Turc-Pike, 1964)

c) $A=P[1-e^{(-P/k)}]$ (Modelo C, Pizarro, 1996)

Donde A: Aportación específica (mm); P: Precipitación areal (mm); ETP: Evapotranspiración potencial (mm); k: Parámetro a estimar por mínimos cuadrados y e: Base de los logaritmos neperianos.

A nivel anual y para cada cuenca los resultados no son del todo satisfactorios. Sin embargo, se consigue alcanzar un R^2 de hasta 0,8 agrupando las cuencas bajo los criterios de pertenencia a las grandes cuencas hidrográficas.

Finalmente, al analizar el modelo C propuesto, $A=P[1-e^{(-P/K)}]$, se comprueba que éste consigue mejores resultados que los modelos A y B, especialmente en áreas de menor escorrentía media anual.

[1] Profesor Escuela de Ingeniería Forestal, Universidad de Talca, Chile.
[2] Profesor Escuela de Ingenieros de Montes, Universidad Politécnica de Madrid, España.

INTRODUCCION.

Las relaciones precipitación-escorrentía se encuentran ampliamente tratadas en la literatura técnica respectiva, aunque los resultados que se desprenden de las diversas experiencias llevadas a cabo son muy disímiles, por variados motivos. Uno de ellos, es que estas relaciones pueden ser expresadas mediante diversos tipos de modelos, que parten de relaciones directas precipitación-escorrentía, establecidas por modelos determinísticos, físicos o estocásticos, o bien relaciones más complejas, que modelan detalladamente el ciclo hidrológico y que requieren de un soporte informático de mayor magnitud.

En este marco, la utilización de modelos matemáticos simples que establezcan relaciones precipitación-escorrentía, puede constituirse en una adecuada herramienta para conseguir explicaciones del fenómeno a escala anual e interanual, y ello en la perspectiva de contribuir a un mayor y mejor conocimiento de dicho proceso. Por tanto, este artículo tiene por objetivo presentar el desarrollo y aplicación de un nuevo modelo (MODELO C), que al parecer presenta mejores niveles de ajuste bajo ciertas condiciones hidrológicas, además de un análisis comparativo que resulta de la aplicación de tres modelos regionales a datos reales obtenidos de 22 cuencas, sometidas a regimen natural.

OBJETIVOS

Analizar las características matemáticas del modelo precipitación escorrentía propuesto por Pizarro en 1996.

Desarrollar un análisis comparativo entre el modelo de Pizarro y los que actualmente se utilizan en España, a saber, Budyko y Turc-Pike.

ANTECEDENTES GENERALES

Los modelos A, B y C que serán analizados en este artículo, tienen las siguientes expresiones matemáticas:

MODELO A : $A = P * e^{(-k/P)}$ (Budyko, 1948)

MODELO B : $A = P - [P/(1 + (P/k)^2)^{0,5}]$ (Turc-Pike, 1964)

MODELO C : $A = P[1 - e^{(-P/k)}]$ (Pizarro, 1996)

Donde:

A=Aportación específica; P=Precipitación areal; k=Parámetro a estimar por mínimos cuadrados y e=Base de los logaritmos neperianos.

Los tres modelos que se estudian, tienen la particularidad de que representan las relaciones precipitación-escorrentía en un contexto físico, dado que su formulación matemática evita que en

algún momento la precipitación se vea superada por la escorrentía.El modelo $A=P*e^{(-ETP/P)}$, donde la ETP representa la evapotranspiración potencial, es una expresión propuesta por Budyko, (1948), basada en otra anterior de Schreiber (1904), elaborada para estimar la evapotranspiración anual (Singh, 1988; Estrela, 1995). Es decir, lo que señala Budyko es que si se tiene una expresión para la evapotranspiración y es posible aplicar la ecuación reducida del balance hídrico, es decir A=P-E (escorrentía igual a precipitación caída menos las pérdidas totales de la cuenca), entonces se llega a la expresión que él propone.

Dicha expresión, ha tenido muy buenos resultados en España a nivel interanual. Asimismo y dada la importancia que le concede la bibliografía, es importante analizar su comportamiento frente a datos reales. Por tratarse de un análisis de tipo anual basado en metodologías estadístico-matemáticas, y derivado de que la ETP varía muy poco año a año, en este caso se cambia la ETP por un parámetro k a estimar.

La ecuación $A=P-[P/(1 + (P/ETP)^2)^{0,5}]$, corresponde al modelo de Turc-Pike, que es una derivación desarrollada por Pike, a partir del modelo de Turc para la estimación de la evapotranspiración (Singh, 1988; Estrela, 1995). Este modelo que también es de base física, al igual que el anterior utiliza conceptualmente la ecuación reducida del balance hídrico. Pike, cambia el parámetro L de la ecuación original de Turc, por el valor de la evapotranspiración potencial, ETP; asimismo, Pike no utiliza el valor 0,9 de la expresión original, sino que utiliza el valor 1, con el fin de evitar que la expresión final tenga resultados negativos.

Este modelo ha mostrado buenos resultados en España, y en este sentido, prácticamente no presenta diferencias con el de Budyko, según diversas experiencias. Por las mismas razones que el modelo de Budyko, es importante estudiar su comportamiento con datos reales. Como es un análisis de nivel anual, la ETP es reemplazada por un parámetro k a ser estimado.

El modelo $A=P[1-e^{(-P/K)}]$ es una expresión propuesta por Pizarro (1996), cuya derivación y profundización de la base conceptual del modelo, se presenta en puntos posteriores. Responde conceptualmente por una parte, a que la variación de la escorrentía con respecto a la precipitación caída no es sólo función de dicha precipitación, sino que la escorrentía posee una componente resultado de aguas provenientes del almacenaje en la cuenca; y por otra parte a que si este análisis se realiza a partir de una ecuación diferencial, no es posible aplicar la ecuación reducida del balance hídrico.

METODOLOGÍA

La metodología a aplicar contempla en primer lugar un planteamiento y análisis matemático del nuevo modelo propuesto, para a continuación establecer una metodología de aplicación que permita comparar los modelos de Budyko, Turc-Pike y Pizarro.

Planteamiento y análisis del nuevo modelo propuesto.

Sean **P** la precipitación caída en una determinada cuenca, y **A** la escorrentía generada, referidas ambas a un intervalo temporal determinado, con A = A(P) función diferenciable con continuidad.

Un incremento de la precipitación de valor **ΔP** producirá un incremento de la escorrentía de valor **ΔA** que obedecerá fundamentalmente a dos causas:

a) Un aporte directo, en concepto de la precipitación caída realmente escurrida.

b) Un aporte indirecto, atribuíble a aguas previamente almacenadas en la cuenca.

Pasando a expresar el anterior balance hídrico en términos de incrementos, se puede plantear la siguiente ecuación:

$$\Delta A = \Delta P - \frac{P-A}{P}.\Delta P + \frac{P-A}{P}.\Delta P.f(A,P) \qquad (1)$$

Los dos primeros términos del segundo miembro representan el mencionado aporte directo, que se obtiene sustrayendo del incremento de precipitación aquella parte del mismo que no ha escurrido (nótese que (P-A)/P es la tasa de pérdida de la cuenca), mientras que el tercero representa el aporte indirecto, que puede ser expresado mediante la aplicación de un factor variable (f(A,P)), a dicha precipitación no escurrida.

Dividiendo en (1) por ΔP y pasando al límite cuando ΔP→0, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dA}{dP} = \frac{A}{P} + (1-\frac{A}{P}).f(A,P) \qquad (2)$$

Antes de proceder a su resolución, es importante analizar qué condiciones generales ha de reunir la función f(A,P):

a) Regularidad y positividad: Teniendo en cuenta la hipótesis planteada originalmente para A = A(P), se ha de partir de funciones f(A,P) diferenciables con continuidad. Además, f(A,P) □ 0 .

b) Homogeneidad: Si la precipitación caída y la escorrentía generada varían en la misma proporción, no cabe esperar que se produzcan variaciones sustanciales en el término tercero del segundo miembro de (1), teniendo en cuenta lo que éste representa. Es decir:

$$f(\lambda A, \lambda P) = f(A,P)$$

Por tanto, f ha de ser una función homogénea de grado 0, lo que en este caso equivale a afirmar que existe una función g:[0,1] ∈ R tal que:

$$f(A,P) = g(A/P)$$

La ecuación diferencial (2), se reescribe entonces de la forma siguiente:

$$\frac{dA}{dP} = \frac{A}{P} + (1-\frac{A}{P}).g(\frac{A}{P}) \qquad (3)$$

Planteando mas condiciones, ahora sobre g, se tiene:

c) Contorno: Evidentemente, ha de verificarse que

$$\lim_{\frac{A}{P}\to 0} (1-\frac{A}{P}).g(\frac{A}{P}) = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \quad y$$

$$\lim_{\frac{A}{P}\to 1} (1-\frac{A}{P}).g(\frac{A}{P}) = 0$$

d) Monotonía: En general, cabe esperar un aumento en la mencionada aportación indirecta a la escorrentía al aumentar la tasa (P-A)/P , lo que equivale a admitir que g ha de ser una función monótona creciente de (P-A)/P.

Por otra parte, un aumento de la precipitación lleva asociado un aumento de la escorrentía, lo que se traduce asimismo en una monotonía creciente para la función de escorrentía A = A(P), es decir:

$$\frac{dA}{dP} = \frac{A}{P} + (1-\frac{A}{P}).g(\frac{A}{P}) \geq 0$$

Establecidas estas condiciones, se puede pasar a la resolución de la ecuación diferencial (3), dado que es homogénea y de primer orden. Efectuando el cambio de variable, queda lo siguiente, establecida por Z=A/P, lo que determina que dA/dP=z+P*(dZ/dP) y que (dZ/dP)*P=(Z-1)*Ln(1-Z).

Para resolver la anterior integral, es necesario elegir una función g que verifique las condiciones anteriormente avanzadas.

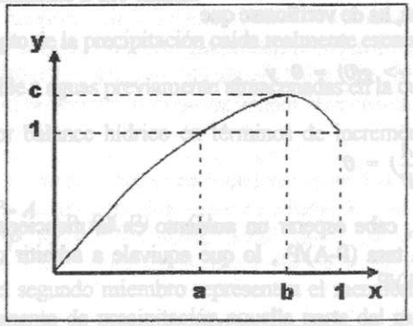
Dentro del repertorio de las llamadas funciones elementales, quizás la solución más "natural" y sencilla al problema sea g(z) = -Ln(1-z) definida en 0<z<1 , que verifica todas las condiciones establecidas. En tal caso, la ecuación diferencial, de partida, queda así:

$$\frac{dA}{dP} = \frac{A}{P} - (1-\frac{A}{P}).\mathrm{Ln}(1-\frac{A}{P}) \qquad (5)$$

Antes de pasar a calcular la integral que da la solución de (5), conviene analizar el segundo miembro de dicha ecuación diferencial.

Haciendo x = A/P y representando en la Figura 1 la curva y = x - (1-x).Ln(1-x), queda lo siguiente:

FIGURA 1: Representación de y = dA/dP en función de x = A/P



Se observa un intervalo crítico (a,1) , con a = 0,632121 , del eje x = A/P en el cual la escorrentía aumenta más que proporcionalmente al aumentar la precipitación, obteniéndose la situación límite en el máximo de dicha curva, situado en el punto (b,c), con $b = 1-e^{-2} = 0{,}864665$ y $c = 1+e^{-2} = 1{,}135335$

Ello se explica en este modelo por el anteriormente mencionado aporte indirecto, cuya contribución a la formación de la anterior curva es

$$y = -(1-x).Ln(1-x)$$

Establecido lo anterior, se puede pasar a resolver la integral que se había planteado anteriormente:

Deshaciendo valor absoluto $(Ln|Ln(1-z)| = -Ln[Ln(1-z)]$ dado que $Ln(1-z)>0$ para $0<z<1$), incorporando el cambio de variable, y despejando A = A(P), se obtiene la expresión explícita del modelo C propuesto:

$$A = P.\left[1 - e^{-\frac{P}{K}} \right]$$

En la expresión obtenida, el parámetro K>0 se estima para cada cuenca por técnicas de regresión en base a datos de campo, por lo que es necesario evaluar la sensibilidad de la escorrentía dada por la misma ante posibles variaciones de K.

Dicha función es acotada (el mínimo de la curva está en el punto $(2,-(2/e)^2)$), con tendencia asintótica al eje ox, y con derivada en el origen nula. Por tanto, pequeñas variaciones en el valor de K estimado para la cuenca, no producirán variaciones sustanciales en la escorrentía que el modelo predice.

Definido esto, es posible analizar la capacidad del modelo propuesto para ajustarse a los datos disponibles de precipitación-escorrentía en las cuencas de la península.

Marco de aplicación de los modelos precipitación escorrentía

La aplicación práctica de lo expuesto anteriormente, se plantea en base al estudio de pares de datos reales precipitación-escorrentía, los cuales corresponden a un conjunto de 22 cuencas sometidas a régimen natural y repartidas por todo el estado español. Estas cuencas están ubicadas en las zonas de cabecera de cuencas mayores.

La disponibilidad de estadísticas pluviométricas y foronómicas de un conjunto de 22 cuencas, ha sido posible en virtud de un proyecto que desarrolla el Grupo de Hidrología Regional Alpina y Mediterránea, AMHY, en el cual participa España a través del Comité Nacional del Programa Hidrológico Internacional. Asimismo, este proyecto ha sido acogido por el Programa Hidrológico Internacional de UNESCO, 1991-1995, fase IV, y 1996-2000, fase V, por medio del proyecto específico FRIEND, (Flow Regimes from International Experimental and Network Data).

En virtud de este proyecto, se han seleccionado 22 cuencas repartidas por España, que cuentan con estadísticas pluviométricas y foronómicas y que están sometidas a régimen natural.

Para estas cuencas se recabó información estadística en relación a las precipitaciones habidas en las cuencas y las aportaciones registradas. Se planteó un período mínimo de treinta años, 1960-1989, aunque existen cuencas en las cuales los registros no alcanzan un mínimo esperado.

Asimismo, en el desarrollo de esta investigación se pretendió establecer relaciones precipitación-escorrentía sólo a partir de datos reales, es decir, sin recurrir a métodos para completar estadísticas, con el fin de no añadir más elementos a la componente aleatoria que los métodos estadísticos conllevan. De igual forma la información original fue sometida a una selección de datos considerados fiables por una parte, y posteriormente se realizó una depuración estadística de los mismos, consiguiéndose así las series de datos que permiten llevar a cabo el estudio.

En función de esta información, fue posible desarrollar un análisis estadístico- matemático de los datos. Este análisis, se plantea en términos anuales para cada cuenca en particular, y posteriormente se realiza una agrupación de los datos en función de su pertenencia a alguna de las 10 grandes cuencas en que se divide el territorio español peninsular.

Por otra parte, las medidas empleadas para determinar el grado de ajuste de los tres modelos, son principalmente el coeficiente de determinación, por tratarse de regresiones no paramétricas, R^2, y el error estándar de la estimación, EEE, como un apoyo a la comprensión del R^2. De igual forma, el ajuste se realizó utilizando el programa Statgraphics para DOS, que cuenta con rutinas para satisfacer este tipo de regresiones.

Las cuencas seleccionadas son las siguientes: Sella, Dubra, Cabe, Riaza, Esgueva, Moros, Tajo, Azuer, Arochete, Córcoles, Ruecas, Ujíjar, Turón, Alcaucín, Perea, Alfambra, Marimota, Ega I, Jalón, Foix, Llemana y Francolí. Asimismo, algunas de las características específicas de las cuencas en estudio, referidas éstas a aspectos físicos y administrativos se presentan en la Tabla 1.

TABLA 1: Características específicas de las cuencas seleccionadas.

COMUNIDAD AUTONOMA	CUENCA	NOMBRE DE LA ZONA	AREA Km^2	PDPA (*)	GRAN CUENCA HIDROGRAFICA A QUE PERTENECE
Asturias	Sella	Cangas Onís	486	24	Norte
Galicia	Dubra	Portomouro	91	17	Norte
Galicia	Cabe	Rivas Altas	353	26	Norte
Castilla y León	Riaza	Riaza	36	22	Duero
Castilla y León	Esgueva	Cabañes de Esgueva	271	26	Duero
Castilla y León	Moros	El Espinar	35	26	Duero
Aragón y Castilla La Mancha	Tajo	Peralejo de las Truchas	410	27	Tajo
Castilla La Mancha	Azuer	Vallehermoso	470	28	Guadiana
Andalucía	Arochete	Aroche	48	17	Guadiana
Castilla La Mancha	Córcoles	Los Castellones	92	22	Guadiana
Extremadura	Ruecas	Cañamero	42	22	Guadiana
Andalucía	Ujíjar	Tosquillas	120	26	Sur
Andalucía	Turón	Ardales	211	26	Sur
Andalucía	Alcaucín	La Viñuela	67	28	Sur
Murcia	Perea	Mula	43	9	Segura
Aragón	Alfambra	Villalba	478	24	Júcar
Castilla La Mancha	Marimota	Belmontejo	187	20	Júcar
País Vasco	Ega I	Marañón	87	20	Ebro
Castilla y León	Jalón	Jubera	196	23	Ebro
Cataluña	Foix	Foix	279	23	Pirineo Oriental
Cataluña	Llemana	Ginesta	79	18	Pirineo Oriental
Cataluña	Francolí	Montblanc	338	23	Pirineo Oriental

(*): Pares de datos precipitación-aportación específica usados por cuenca.

RESULTADOS.

Resultados de los ajustes alcanzados en cada una de las 22 cuencas.

En términos generales y a nivel de cada cuenca en particular, se aprecia que los modelos estudiados presentan resultados muy similares. Sin embargo, el modelo C estudiado en este artículo, resulta más efectivo en zonas que pueden ser definidas globalmente como de mayor aridez, es decir zonas ubicadas más al sur en el territorio español peninsular o en zonas de clima más mediterráneo. Esto se debería a que la ecuación diferencial que define al modelo, utiliza como base la tasa de pérdida de las precipitaciones, valor que en teoría es mucho más sensible en zonas semiáridas y subhúmedas, que en zonas de mayor pluviometría.

Asimismo, si se asume que un modelo es mínimamente satisfactorio con un valor de explicación de la variación de las aportaciones, superior a 0,4, entonces el modelo C supera dicho valor en 15 de las 22 cuencas estudiadas; el modelo A en 12 de las 22 cuencas y el modelo B en 11 de las 22 cuencas. Se estima, por tanto, que el modelo estudiado en este artículo obtiene mejores resultados relativos que los otros dos.

Sin embargo, es menester destacar que el número de datos por cuenca no es suficiente para poder plantear conclusiones definitivas.

Otro aspecto importante a analizar, son los valores que asume la constante K para cada uno de los tres modelos en estudio. Así, el valor de K teóricamente responde a una expresión de la evapotranspiración potencial, ETP; luego, conceptualmente se define por una expresión del tipo K=ß*ETP, en que ß es una constante que pondera a la ETP. De esta manera se observa que ß es mayor en el modelo propuesto por este estudio que en los restantes dos modelos. Asimismo, el modelo que estudia este artículo, es más sensible en lo que respecta al parámetro K dados los valores obtenidos. Así, presenta un valor máximo para K=12805 y un valor mínimo K=680. El modelo A presenta un valor máximo de K=2066 y un valor mínimo de K=261. Asimismo el modelo B denota un valor máximo de K=2042 y un valor mínimo de K=231. Igualmente, el coeficiente de variación (CV) de K para el modelo C que se propone, alcanza un valor CV=0,76 , por un CV=0,47 en el modelo A y un CV=0,49 en el modelo B; , esto corrobora lo aseverado en términos de la mayor variabilidad y sensibilidad del parámetro K en el modelo que se ha propuesto.

En el mismo marco, el parámetro K parece ser función de variables distintas dependiendo de qué modelo se trate. Así, para los modelos A y B hay importantes correlaciones lineales, (superiores a 0,5) en ciertas variables, como por ejemplo la diferencia entre la precipitación media y la aportación media para las 22 cuencas, es decir, las pérdidas anuales. Por el contrario, el modelo de C parece depender de un número mayor de variables y no se visualiza una dependencia relevante de ninguna variable específica, como la vegetación, es decir, el parámetro K parece estar determinado más por un conjunto de variables que por alguna o algunas en particular.

Discusión de los ajustes alcanzados agrupando las 22 cuencas.

En el mismo marco, las cuencas con su respectiva información estadística, fueron agrupadas en función de su pertenencia a las grandes cuencas peninsulares, definiéndose las siguientes agrupaciones: Norte (Sella, Dubra y Cabe); Sur (Ujíjar , Turón y Alcaucín); Duero (Riaza, Esgueva y

Moros); Guadiana (Azuer, Arochete, Córcoles y Ruecas); Júcar (Alfambra y Marimota); Ebro (Ega I y Jalón) y Pirineo Oriental (Foix, Llemana y Francolí).

Los ajustes conseguidos a este nivel son, en general, mejores en sus resultados que los obtenidos a nivel de las cuencas componentes de la agrupación, aunque los resultados son en general muy similares para todos los modelos estudiados.

Sin embargo se consigue apreciar con mayor evidencia que en aquellas cuencas ubicadas más al sur del territorio español peninsular, el modelo C que se estudia en este artículo, tiende a ser más dúctil que los modelos A y B, y sus ajustes se aprecian notoriamente más altos como es el caso de Sur. Una situación similar se verifica en la cuenca del Ebro aunque ésta se ubica en la zona norte peninsular.

Confirmando lo anteriormente expuesto, se puede decir que asumiendo que un valor $R^2>0,4$ es mínimamente aceptable, en 6 de las 7 agrupaciones por grandes cuencas se verifica que el modelo C cumple esa premisa; el modelo A lo hace en 5 de 7 y el B en 6 de 7,.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En función de los resultados obtenidos, es posible plantear las siguientes conclusiones:

a) Los resultados obtenidos a nivel anual, permiten concluir que no existen grandes diferencias entre los distintos modelos analizados. Ahora bien, el modelo C propuesto presenta una mayor ductilidad y mejores resultados, especialmente en zonas ligadas a climas mediterráneos.

b) El análisis cuenca a cuenca determinó que es muy difícil a ese nivel modelar adecuadamente, y con tal número de datos. Así, a nivel anual y de cada cuenca estudiada, los modelos utilizados ofrecen resultados que funcionan razonablemente en la región hidrográfica Norte, es decir, en las zonas húmedas del estado español, y en algunas otras cuencas de la zona Sur y Mediterránea, con un nivel de explicación de la variación de las aportaciones que alcanzó al 79% en el mejor de los casos y al 0% en los casos extremos, pasando por una mayoría de valores que no superaron el 60%.

c) La modelación anual y el agrupamiento de cuencas, han permitido establecer relaciones matemáticas de calidad que explicaron hasta el 80% de la variación total de las aportaciones para los tres modelos estudiados. Esto se obtuvo para la agrupación de las grandes regiones hidrográficas Norte, Duero, Guadiana, Pirineo Oriental y Ebro.

Por otra parte, para las grandes regiones hidrográficas de Sur y Júcar no se consiguió en base a ningún modelo matemático de los analizados, una explicación satisfactoria de la variación de las aportaciones. Sin embargo, el modelo C propuesto presenta mejores resultados que los A y B.

d) Otro elemento importante que surge, es la necesidad de obtener un mayor conjunto de datos temporales y espaciales precipitación-escorrentía, así como incorporar la variable vegetación. De esta manera se reducirían los errores de muestreo que este tipo de información conlleva y podrían desarrollarse estudios de mayor alcance. Así se podrían corroborar, rechazar o modificar los resultados que en esta investigación se han obtenido.

e) Se considera recomendable continuar la investigación en base al estudio de las variables que pudieran caracterizar el parámetro K del modelo C propuesto.

f) Finalmente, y en este contexto, pudiera ser recomendable incorporar el modelo C, en los estudios que se desarrollan en los correspondientes organismos técnicos, con el objetivo de establecer leyes regionales precipitación-escorrentía, dado que actualmente se utilizan primordialmente los modelos A y B.

REFERENCIAS

BEDIENT, P. y HUBER, W. 1992. Hydrology and floodplain analysis.Adisson-Wesley Publishing Company. Estados Unidos. 692 p.

BLACK, P. 1991. Watershed hydrology. Prentice Hall. New Jersey, Estados Unidos. 408 p.

BUREAU OF RECLAMATION. 1989. Flood hydrology manual. Department of the Interior, Denver Office, Estados Unidos. 243 p.

CHOW, V. 1994. Hidrología aplicada. Mc Graw Hill Interamericana S.A. Colombia. 584 p.

DOODGE, J. 1986. Looking for hydrologic laws. Water resources research, Vol. 22, Nº9, p. 46s-58s. Estados Unidos.

ESTRELA, T. 1993. Modelos matemáticos para la evaluación de recursos hídricos. Centro de Estudios Hidrográficos, Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente. Madrid, España. 55 p.

ESTRELA, T.; FERRER, M. y ARDILES, L. 1995. Estimation of precipitation-runoff regional laws and runoff maps in Spain using a geographical information system. Proyecto FRIEND- AMHY, Centro de Estudios Hidrográficos, Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente. Madrid, España. 9p.

LLAMAS, J. 1993. Hidrología general. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco. España. 635 p.

MAC CUEN , R. 1989. Statistical methods for engineers. Prentice Hall. New Jersey, Estados Unidos. 867 p.

MAIDMENT, D. (Editor). 1993. Handbook of hydrology. Mc-Graw Hill. Estados Unidos. p.i.

MOORE, R. 1990. Hydrological modelling for water management in arid and semiarid areas of Africa. International Water Resources Association Urban, p. 36-45. Estados Unidos.

PIZARRO, R. 1996. Análisis comparativo de modelos matemáticos precipitación-escorrentía en cuencas de la España peninsular. Tesis para optar al grado de Doctor Ingeniero Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes, Departamento de Ingeniería Forestal. Madrid, España. 277 p. y anexos.

QUINTAS, L.; ARDILES, L. y FERRER, M. 1995. Analysis of the spanish data in the FRIEND AMHY database. AMHY FRIEND meeting, Thessaloniki. Centro de Estudios Hidrográficos, Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente. Madrid, España.

SINGH, V. 1988. Hydrologic systems. Prentice Hall. Englewoods Cliffs. New Jersey, EEUU. 2 vols.

WARD, R. Y ROBINSON, M. 1989. Principles of hydrology. Mc Graw-Hill International. Gran Bretaña. 365 p.

WILSON, E. 1990. Engineering hydrology. Mc Millan Education. London, Inglaterra. 348 p.