

USO DE UNA SOLUCIÓN ANALÍTICA APROXIMADA DE LA ECUACION DE RICHARDS PARA SIMULAR EL MOVIMIENTO DEL AGUA EN LA ZONA VADOSA

JOSE LUIS ARUMI R.¹
DERREL L. MARTIN²
DARREL G. WATTS³

RESUMEN

Se presenta el desarrollo de un algoritmo basado en el uso de la técnica de descomposición para producir una solución aproximada de la ecuación de Richards. El objetivo de la creación de este algoritmo fue la construcción de un modelo rápido que permitiera la conexión entre una serie de análisis hechos con modelos agrícolas y un modelo regional de aguas subterráneas. Para ello el modelo debe estimar el volumen de agua que alcanza cierta profundidad de la zona vadosa después que una cantidad conocida de agua ha percolado desde la zona radicular. El modelo desarrollado en este trabajo fue denominado "Vadose Zone Model" (VZM). Se validó el modelo utilizando una comparación de los resultados producidos por el modelo con los valores estimados por el modelo HYDRUS-2D. Los resultados demostraron que las predicciones de volumen a una profundidad determinada eran adecuadas si se controlaba el ingreso de agua al modelo mediante la condición de borde superior del sistema.

¹ Ingeniero Civil Ph.D., Facultad de Ingeniería Agrícola, Universidad de Concepción, Campus Chillán. Casilla 537 Chillan, Chile. E-mail jarumi@udec.cl

² Professor Biological Systems Engineering. Univ. of Nebraska-Lincoln. Lincoln, NE, 68583-0726. U.S.A. E-mail dmartin2@unl.edu.

³ Professor, Biological Systems Engineering. Univ. of Nebraska-Lincoln. Lincoln NE 68583-0726 U.S.A.

INTRODUCCIÓN

En la zona central de los Estados Unidos de América, específicamente en el Medio Oeste, los depósitos de aguas subterráneas constituyen la principal reserva del recurso hídrico. Debido al intensivo uso de químicos en la agricultura estos depósitos se encuentran amenazados, en el mejor de los casos, o simplemente altamente contaminados como es el caso del acuífero superficial del Valle de Río Platte en Nebraska.

En el Estado de Nebraska, como en los demás estados colindantes (figura 1), la contaminación del agua subterránea por nitratos es considerada como uno de los problemas prioritarios a afrontar por el Estado y el Gobierno Federal. Por esta razón, muchas organizaciones reguladoras se encuentran desarrollando programas para proteger los acuíferos mediante el empleo de mejores prácticas de manejo agrícola, especialmente en lo que se refiere a riego y fertilización.

La modelación se ha usado intensivamente para predecir el impacto de diferentes alternativas de manejo agrícola que se puedan implementar. Sin embargo, la mayor parte de los modelos desarrollados no poseen una conexión definida entre la simulación de las prácticas que se realizan en la superficie y el impacto en las aguas subterráneas. El transporte de agua y nutrientes a través de la zona vadosa es frecuentemente despreciado o sobre-simplificado. Lo anterior a pesar de que la dinámica de la respuesta del sistema de aguas subterráneas depende del tiempo de residencia del agua y los nutrientes en la zona vadosa, el cual según el tipo de suelo puede ser de meses o incluso años.

La evaluación de prácticas de manejo se realiza normalmente con modelos agrícolas que predicen valores de rendimiento de cultivos, percolación profunda y lixiviación de nutrientes desde la zona radicular. Estos modelos se aplican sobre un dominio definido por áreas agrícolas que tienen características homogéneas tanto de suelos como de cultivos, riego y fertilización. En cambio, los modelos de aguas subterráneas simulan el comportamiento del acuífero a escala regional. La diferencia de los dominios de ambos tipos de modelos dificulta su conexión, y hace necesario una integración espacial y temporal de los resultados de ambos modelos.

Este trabajo fue realizado en el marco de la continuación del proyecto "Management System Evaluation Area" (MSEA) en Nebraska. Este proyecto tiene como objetivo el ayudar a reducir los niveles de contaminación por nitratos en la Zona Central del Valle del Río Platte en Nebraska (figura 1).

Se presenta el desarrollo de un algoritmo basado en el uso de la técnica de descomposición para producir una solución aproximada de la ecuación de Richards (ecuación que describe el movimiento de agua en suelos no saturados). El objetivo de este trabajo fue crear un algoritmo relativamente simple y rápido de procesar. Dicho algoritmo debe permitir la integración, sobre una región geográficamente extensa, de los resultados de simulaciones realizadas con modelos agrícolas (como EPIC o OPUS), conectándolos con un modelo regional de aguas subterráneas (MODFLOW y MT3D). Para ello el modelo debe estimar el volumen estimado de agua que alcanza cierta profundidad de la zona vadosa después que una cantidad conocida de agua ha percolado desde la zona radicular.

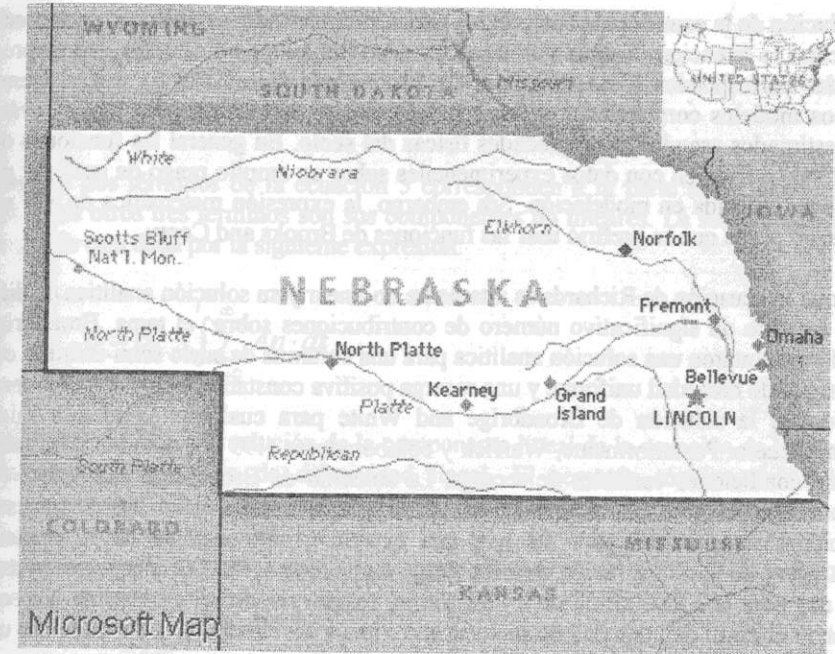


Figura 1. Ubicación del área donde se desarrolla el proyecto MSEA

ECUACIÓN DE RICHARDS

Debido a que la percolación de agua es un proceso predominantemente vertical, la ecuación de Richards puede ser aplicada sobre una columna de suelo.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (1)$$

En la ecuación 1, z es la elevación (positiva hacia abajo), t es el tiempo, $\theta(z, t)$ es el contenido volumétrico de agua en el suelo, $K(\theta)$ es la conductividad del suelo no saturado y $D(\theta)$ es la difusividad del agua en el suelo definida por la siguiente ecuación.

$$D(\theta) = \frac{K(\theta)}{\frac{\partial \theta}{\partial h}} \quad (2)$$

En la ecuación anterior h es la presión hidrostática y el denominador del lado derecho es conocido como la capacidad específica del suelo (Stephens, 1996).

Para la resolución de la ecuación de Richards es necesario introducir expresiones que representen la relación entre la retención de agua y la conductividad hidráulica no saturada. Las expresiones más utilizadas corresponden a las funciones de Brooks and Corey (1966) y Van Genuchten (1980) ambos modelos corresponden a funciones altamente no lineales, pero cuyos parámetros pueden ser estimados usando las propiedades físicas del suelo. En general las funciones de Van Genuchten (VG) coinciden con datos experimentales sobre un amplio rango de suelos y por eso es ampliamente utilizada en modelación. Sin embargo, la expresión matemática de VG es muy compleja, razón por la que se prefirió usar las funciones de Brooks and Corey.

A pesar de que la ecuación de Richards es altamente no lineal y su solución analítica es difícil de obtener, ha existido un significativo número de contribuciones sobre el tema. Broadbrige and White (1988) presentaron una solución analítica para una columna de suelo semi-infinita, con una condición inicial de humedad uniforme y una recarga positiva constante. Warrick y colaboradores (1990) extienden la solución de Broadbrige and White para cualquier condición inicial de humedad en el suelo. Posteriormente, Warrick y colaboradores (1991) extienden nuevamente la solución para condiciones variables de recarga. La solución de Broadbrige and White (1988), extendida por Warrick y colaboradores (1990 y 1991), esta basada en el uso de una serie de transformaciones matemáticas para resolver una expresión adimensional de la ecuación de Richards. A pesar de que la solución de Broadbrige and White (1988) es una solución analítica exacta, su uso para la construcción de un algoritmo, resultó ser difícil e inestable. La solución diverge cuando el perfil de humedad de suelo se aproxima a las condiciones de gradiente unitario (Presión hidrostática constante con respecto a la profundidad).

Serrano (1998) usa el método de descomposición para desarrollar una solución aproximada de la ecuación de Richards. Se consideró que este método ofrecía la posibilidad de obtener una aproximación de la solución analítica factible de ser implementada en un algoritmo computacional.

DESARROLLO DEL MODELO.

La base del método de descomposición es la suposición de que la difusividad alcanza un valor máximo (D_s) cerca de la presión de entrada de aire en el suelo (bubling Pressure), donde el contenido de agua en el suelo se acerca a la saturación y la conductividad hidráulica se aproxima al valor saturado. Definiendo una función auxiliar:

$$D_p(\theta) = D_s - D(\theta) \quad (3)$$

Remplazando la expresión anterior en la ecuación de Richards:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_s \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial D_p}{\partial z} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} - D_p \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial K}{\partial z} \quad (4)$$

Es posible re escribir la ecuación de Richards de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - D_s \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial D_p}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 + D_p \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial K}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

Los primeros dos términos de la ecuación 5 corresponden a la parte lineal de la ecuación de Richards y los otros tres términos son sus componentes no lineales. La solución de la ecuación anterior puede esta dada por la siguiente expresión:

$$\theta = \theta_0 - \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot dt \quad (6)$$

En la expresión 6, θ_0 es la solución de la componente lineal de la ecuación de Richards, que es conocida como la ecuación de difusividad lineal. El segundo término del lado derecho corresponde a la solución de los componentes no lineales de la ecuación.

La ecuación de difusividad lineal, para una columna vertical de suelo es expresada como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D_s \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (7)$$

Considerando el caso de una columna seminfinita, con una condición inicial de humedad constante y una condición de borde superior dada por una serie de pulsos:

$$\theta(0, t) = \sum_j \Phi(t - T_j) \cdot \Delta \theta_j \quad (8)$$

La solución de la ecuación 7 esta dada por:

$$\theta(z, t) = \sum_j \Delta \theta_j \cdot \text{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{4 \cdot D_s \cdot (t - T_j)}}\right) \cdot \Phi(t - T_j) + \theta_0 \quad (9)$$

En la expresión anterior, $\text{erfc}(x)$ corresponde al complemento de la función de error; $\Phi(x)$ es la función escalón de Heaviside (0 si $x < T$ o 1 en otro caso).

Los términos no lineales, que conforman el segundo término del lado derecho de la ecuación 6 pueden ser calculados usando las siguientes expresiones:

$$A_0 = N(\theta_0) \quad (10)$$

$$A_1 = \theta_1 \cdot \frac{dN(\theta_0)}{d\theta_0} \quad (11)$$

$$A2 = \theta2 \cdot \frac{dN(\theta)}{d\theta} + \frac{\theta1^2}{2!} \cdot \frac{d^2N(\theta)}{d\theta^2} \quad (12)$$

En las expresiones anteriores, $N(\theta)$ incorpora los términos no lineales de la solución y es expresado usando la siguiente ecuación:

$$N(\theta) = \frac{\partial Dp}{\partial \theta} \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 + Dp \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial K}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (13)$$

La serie converge rápidamente en este caso el término $A2$ puede ser considerado despreciable. La función de Brooks and Corey fue usada para incorporar la relación entre conductividad hidráulica, dispersión y contenido de agua en el suelo.

Usando el desarrollo anterior fue posible crear un algoritmo que calcule el contenido volumétrico de agua en el suelo en función del tiempo y la profundidad. Las integraciones necesarias para las ecuaciones fueron hechas numéricamente.

Para estimar recarga al agua subterránea y el tiempo de resistencia en la zona vadosa es necesario evaluar el volumen acumulado de agua que alcanza una determinada profundidad con respecto al tiempo. Como lo muestra la ecuación 14, en suelos no saturados la velocidad de infiltración es función de la conductividad hidráulica la difusividad y el contenido de agua en el suelo.

$$v = K(\theta) - D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (14)$$

Usando una aproximación de diferencias finitas con un intervalo discreto Δz , la derivada del contenido de agua en el suelo con respecto a la profundidad es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_i = \frac{\theta(i + \Delta z) - \theta(i - \Delta z)}{2 \cdot \Delta z} \quad (15)$$

Finalmente, el volumen acumulado de agua que alcanza el punto z es dado por la ecuación:

$$V(t) = \int_0^t v dt \quad (16)$$

RESULTADOS

El modelo desarrollado en este trabajo fue denominado "Vadose Zone Model" (VZM). Se validó el modelo utilizando una comparación de los resultados producidos por el modelo con los valores estimados por el modelo HYDRUS-2D usando el mismo dominio, condiciones de borde y valores iniciales de humedad en el suelo.

HYDRUS-2D (Simunek y colaboradores, 1996) es un modelo de simulación numérica, para el movimiento de agua y solutos en un medio poroso con un grado de saturación variable. El modelo HYDRUS-2D es una modernización del modelo SWMS-2D que utiliza el método de elementos finitos para resolver la ecuación de Richards.

Debido a que HYDRUS-2D utiliza la función de Van Genuchten para estimar las relaciones de retención, dispersividad y conductividad hidráulica, fue necesario utilizar la metodología de Lenhard y colaboradores (1989) modificada por Stankovich and Lockington (1995) para calcular parámetros equivalentes para la función de Brooks and Corey.

Ambos modelos (VZM y HYDRUS-2D) fueron usados para simular el movimiento de una serie de pulsos de aguas aplicados en la parte superior de una columna vertical de suelo. Estos pulsos, tienen por objetivo simular la percolación mensual que se produce desde la zona radicular de un área cultivada. La comparación estuvo basada en la determinación del volumen de agua que alcanza una profundidad de 2, 5 y 10 metros en tres tipos distintos de columnas de suelo: arena, franco y limo. Los suelos fueron caracterizados usando los parámetros sugeridos en la base de datos incluida en HYDRUS-2D (Tabla 1).

Tabla 1. Parámetros de Van Genuchten utilizados en la simulación.

Parámetros	Arena	Franco	Limo
Conductividad hidráulica [cm/hr]	29.70	1.040	0.250
Contenido de agua en el suelo saturado [cm ³ /cm ³]	0.430	0.430	0.460
Contenido de agua en el suelo residual [cm ³ /cm ³]	0.045	0.078	0.034
Alfa [cm ⁻¹]	0.145	0.036	0.013
n	2.268	1.560	1.370

Los pulsos aplicados en la parte superior de la columna de suelo fueron estimados sobre la base de simulaciones realizadas con el Modelo EPIC (Willians y colaboradores, 1984). Seis series distintas fueron estimadas para cada una de las familias de suelos presente en el área de estudio del proyecto. Cada serie corresponde un promedio de combinaciones de cultivos y métodos de irrigación ponderados por la superficie que estos ocupan en el área de estudio. Las series comprenden un período de tres años, simulado en forma mensual.

La condición de borde superior fue determinada asignando un valor de contenido de agua en el suelo, de forma tal que el flujo de agua bajo condiciones de gradiente unitario, sea el mismo que el flujo medio mensual correspondiente al mes simulado. Las condiciones iniciales fueron estimadas sobre la base de simulaciones de 15 años hechas con HYDRUS-2D, para cada tipo de suelo.

Los resultados mostrados que el volumen de agua infiltrado simulado con VZM es persistentemente menor que el volumen simulado con HYDRUS-2D. Esta diferencia se debe a que la componente lineal de la ecuación de Richards (ecuación 7) no incluye un término que represente la acción de la gravedad. La solución de la ecuación 7 es presentada en la ecuación 9 y corresponde al primer término del lado derecho de la ecuación 6.

Como dicha solución no incluye la acción de la gravedad, al simular el movimiento de agua en una columna vertical, se obtiene un menor valor de velocidad de infiltración que el que ocurre en la realidad. En un principio se supuso que los términos no lineales de la solución, expresados en la segunda componente del lado derecho de la ecuación 6 debían compensar la simplificación mencionada anteriormente, pero los resultados demostraron en forma consistente que esto no se produjo.

En la figura 1 se presenta la tasa de infiltración estimada usando VZM con diferentes condiciones de borde en la parte superior de una columna de suelo franco. Por las razones que se explicaron anteriormente, este valor es persistentemente menor que el valor correspondiente a la existencia de una condición de gradiente unitario en la parte superior de la columna de suelo. Sin embargo la curva generada con VZM puede ser utilizada para la calibración de la condición de borde superior de la columna de suelo.

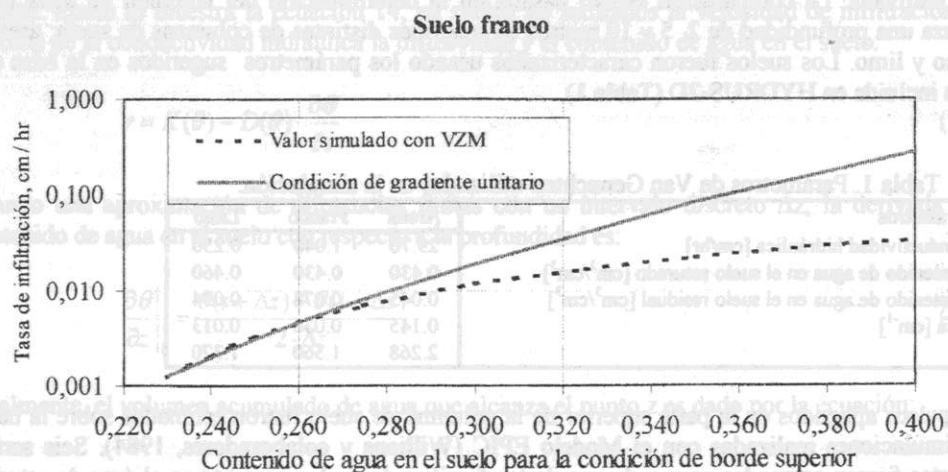


Figura 1. Tasa de infiltración estimada usando VZM en función de la condición de borde superior de la columna de suelo franco.

Como el volumen de agua que se desea infiltrar es conocido por las simulaciones mensuales hechas con el modelo agrícola, es posible calcular la tasa media mensual de percolación de la zona radicular. La condición de borde superior puede ser ajustada de forma tal de que el valor de infiltración simulado produzca una tasa similar al valor medio mensual de agua que se está introduciendo a la zona vadosa.

La altura de agua acumulada que alcanzó un punto de control ubicado a cinco metros de profundidad en un suelo franco, es mostrada en la figura 2. Como se puede observar al ajustar la condición de borde superior, VZM predice valores cercanos a aquellos obtenidos usando HYDRUS-2D.

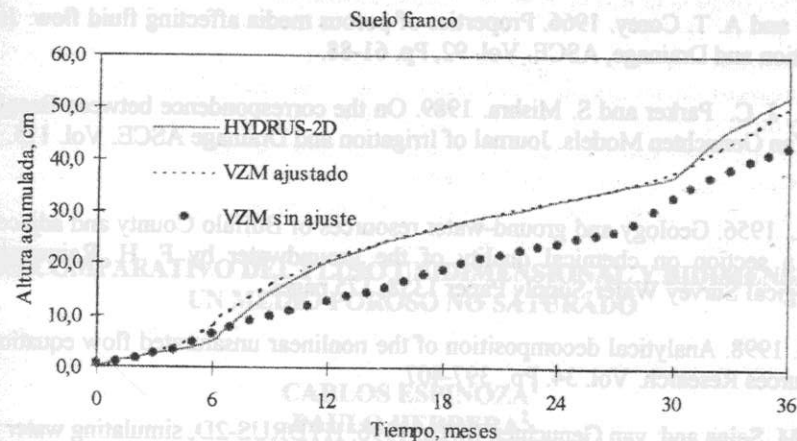


Figura 2. Altura de agua acumulada que alcanza los 5 metros de profundidad en un suelo franco durante 3 años de simulación.

CONCLUSIONES

Se desarrolló un modelo simple para la simulación del movimiento de agua en el suelo no saturado. Dicho modelo es más limitado que modelos numéricos como HYDRUS-2D. Pero, también es más simple de usar y requiere de mucho menos tiempo computacional. En un estudio a escala regional, la principal limitante para el análisis del efecto de la zona vadosa en la recarga del agua subterránea es la obtención de los parámetros que caracterizan los distintos tipos de suelos presentes en el área. Este es un trabajo formidable y muy difícil de lograr a un costo razonable. Frente a esta situación cualquier modelo, por sofisticado que sea, no predecirá valores adecuados.

Es por esa razón que el uso de una herramienta simple como VZM permite entender cual es el efecto, a escala regional, de la zona vadosa en la recarga de agua y lixiviación de nutrientes en el sistema de aguas subterráneas.

Ing. Civil, Ph.D. Académico-División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.
 Ing. Civil (E). Ayudante de Investigación División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.

BIBLIOGRAFÍA

- Broadbridge, P. and I. White. 1988. Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model. I Analytical solution. Water Resources Research. Vol. 24. Pp. 145-154.
- Brooks R. H. and A. T. Corey. 1966. Properties of porous media affecting fluid flow. Journal of Irrigation and Drainage, ASCE. Vol. 92, Pp. 61-88.
- Lenhard R. J., J. C. Parker and S. Mishra. 1989. On the correspondence between Brooks-Corey and Van Genuchten Models. Journal of Irrigation and Drainage ASCE. Vol. 115. Pp. 744-751.
- Schreus, R. L. 1956. Geology and ground-water resources of Buffalo County and adjacent areas, with a section on chemical quality of the groundwater by F. H. Rainwater. U. S. geological Survey Water-Supply Paper 1358, 175 pages.
- Serrano S. E. 1998. Analytical decomposition of the nonlinear unsaturated flow equation. Water Resources Research. Vol. 34. Pp. 397-407.
- Simunek J., M. Sejna and van Genuchten M.Th. 1996. HYDRUS-2D, simulating water flow and solute transport in two-dimensional variably saturated media. International Ground Water Modeling Center, Golden, Colorado.
- Stankovich J. M. and D. A. Lockington. 1995. Brooks-Corey and Van Genuchten soil-water-retention models. Journal of Irrigation and Drainage. ASCE. Vol. 121. Pp.1-7.
- Stephens, D. B. 1996. Vadose Zone Hydrology. Lewis Publishers. Boca de Raton, Florida. 339 p.
- Van Genuchten, M.T. 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Science Society of America Journal. Vol. 44. Pp. 892-898.
- Warrick A. W., A. Islas and D. O. Lomen. 1991. An analytical solution for Richards' Equation for time-varying infiltration. Water resources research. Vol. 27. Pp. 763-766.
- Warrick A.W., D. O. Lomen and A. Islas. 1990. An analytical solution for Richards' equation for a draining soil profile. Water Resources Research. Vol. 26. Pp. 253-258.
- Williams J. R., C. A. Jones, and P.T. Dyke. 1984. A modeling approach to determining the relationship between erosion and soil productivity. Transactions of ASAE. Vol.27. Pp. 129-144.

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

XIV CONGRESO CHILENO DE HIDRAULICA

ANALISIS COMPARATIVO DEL FLUJO UNIDIMENSIONAL Y BIDIMENSIONAL EN UN MEDIO POROSO NO SATURADO

CARLOS ESPINOZA¹
PAULO HERRERA²

RESUMEN

La motivación principal para el presente trabajo nace de la importancia de comprender el fenómeno de flujo en medios porosos bidimensionales no saturados, para poder estudiar los procesos de transporte y degradación que afectarían a elementos contaminantes presentes en el agua servida que es infiltrada al suelo luego de un tratamiento primario y/o preliminar. Este tipo de proceso recibe el nombre genérico de Sistemas de Tratamiento Suelo Acuífero (SAT: Soil Aquifer Treatment).

El objetivo principal de este trabajo es visualizar las diferencias fundamentales que existen entre el flujo en la zona no saturada que se desarrolla en una columna vertical, con respecto a un sistema real que considere la posibilidad de flujo lateral.

Este trabajo considera el desarrollo de un modelo de simulación matemático bidimensional, el cual se basa en la técnica numérica de los elementos finitos. Dicho modelo permite estudiar las diferencias fundamentales entre un problema de flujo que tiene lugar en un sistema vertical (columna de laboratorio) y uno real en terreno.

¹ Ingeniero Civil, Ph.D., Académico División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile

² Ingeniero Civil (E), Ayudante de Investigación División de Recursos Hídricos y Medio Ambiente, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile