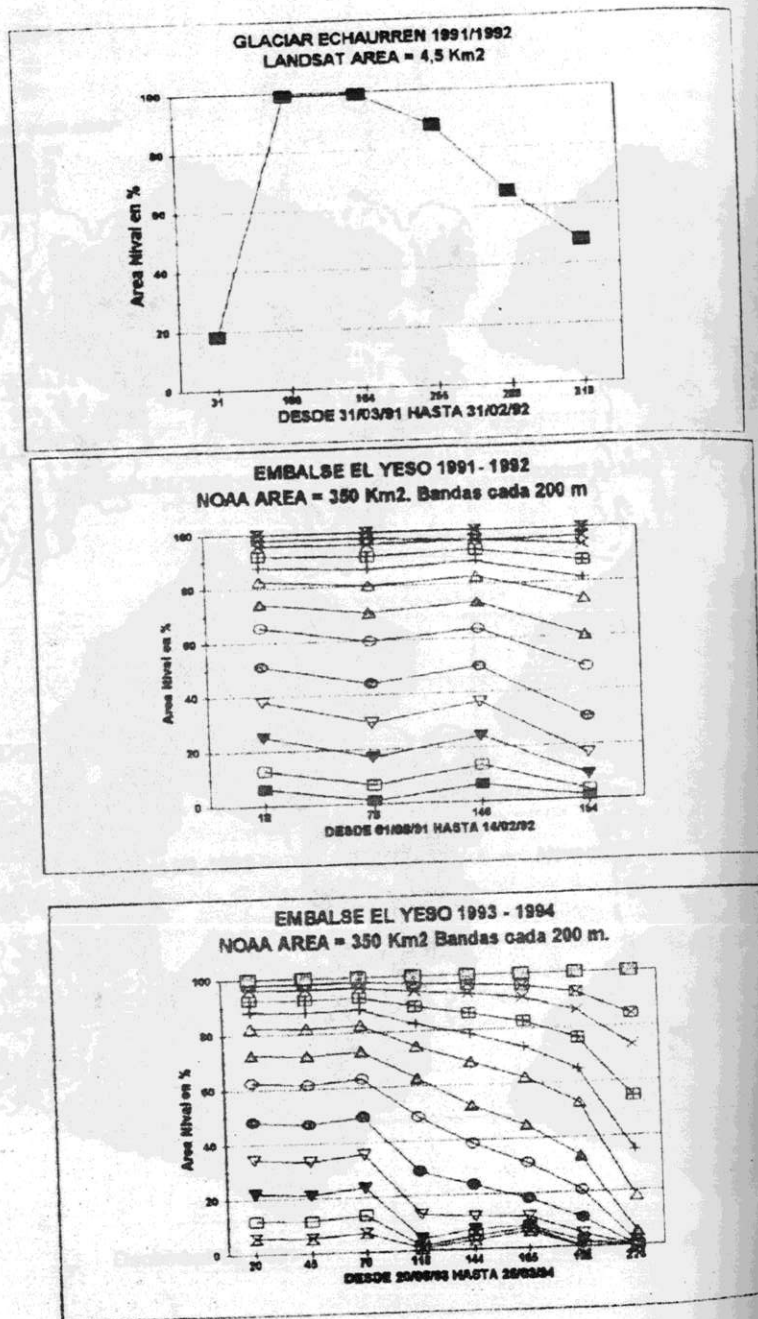


Fig. 3 Areas Nivales obtenidas de Imágenes LANDSAT TM y NOAA



XIII CONGRESO CHILENO

2.5.- RASTREO HIDROLOGICO DE CRECIDAS
COMPARACION ENTRE METODOS CINEMATICOS

RUBÉN SALGADO C. ¹
ENRIQUE ALVAREZ H. ²
LEOPOLDO ARRIAGADA O. ³

RESUMEN

Se resumen y comparan los principales métodos para el rastreo hidrológico de crecidas en canales y se establecen sus ventajas y desventajas relativas: método de la onda cinemática (soluciones analíticas, lineal y no lineal), método de muskingum, método de kalinin-milyukov y el método muskingum-cunge.

$$Q^{i+1} + ZQ^{i+1} + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^{i+1} + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right)^{i+1} = 0 \quad (4)$$

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \dots$$

¹ Ingeniero Civil, Ph.D., Gerente de Operaciones de ESSEL S.A.
² Ingeniero Civil, Ph.D., Departamento de Ingeniería en Obras Civiles, Universidad de Santiago.
³ Ingeniero Civil, CADE IDEPE

1.- INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se resumen y comparan las características de algunos modelos hidrológicos, llamados «cinemáticos», con la finalidad de seleccionar el más conveniente para ser usado posteriormente, en un sistema general de modelación del flujo impermanente en redes de canales. Las ecuaciones fundamentales son las de Saint Venant, que están formadas por la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q = 0 \quad (1.a)$$

y la ecuación de la dinámica (o del momentum):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + gI \right) - gA(S_o - S_f) - qV_x = 0 \quad (1.b)$$

con la simbología siguiente:

"t" y "x": denotan derivadas parciales respecto del tiempo y la posición, respectivamente

A : sección de escurrimiento

Q : caudal

g : constante de gravedad

A : sección transversal de escurrimiento (promedio)

S_o : pendiente de fondo

S_f : pendiente de la línea de energía

q : aporte lateral de caudal por unidad de longitud de canal

V_x : velocidad del caudal aportado lateralmente (q), en el sentido longitudinal.

I : integral de Escoffier.

El modelo cinemático se representa por [Vargas y Fernández (1994)]:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha\beta Q^{\beta-1} \frac{\partial Q}{\partial t} - q = 0 \quad (2)$$

ecuación que incluye a las ecuaciones de continuidad y dinámica.

2.- MÉTODOS DE SOLUCIÓN

La solución general de la ecuación de la onda cinemática debe realizarse mediante métodos numéricos, siendo el método de diferencias finitas la metodología predominante [Chow et al. (1988), Dooge (1986), Vargas y Fernández (1994)]. Con este fin se discretiza el espacio (x) en la definición del problema. Sin embargo, en unos pocos casos simplificados, la ecuación de la onda cinemática puede resolverse analíticamente. En otros casos, es posible utilizar expresiones empíricas, válidas para una sección específica del canal (modelos concentrados).

2.1.- Solución Analítica

Si se desprecia el aporte de caudal lateral «q», la ecuación de la onda cinemática en forma característica se reduce a

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (3)$$

Lo que implica que, para un observador que se desplaza a través de una línea característica a una velocidad igual a la celeridad de la onda cinemática en un canal, el caudal no parece variar de un extremo a otro del tramo de canal en estudio. Si el caudal es constante, la celeridad también lo es y el rastreo consiste sólo en trasponer temporalmente el caudal entre la entrada y salida del tramo, en un tiempo determinado por L/C_k .

Otras soluciones analíticas se basan en la convolución de funciones de respuestas del sistema (1) linealizado [Dooge (1986), Napiorkowski y Dooge (1988)], similares a las utilizadas para construir el hidrograma unitario de una cuenca. Dooge (1986) se sorprende que estas soluciones no hayan sido aplicadas en mayor escala a canales.

2.2.- Solución Numérica

En general, las soluciones numéricas por diferencias finitas pueden clasificarse en explícitas e implícitas. Sin embargo, en el caso cinemático, dadas las características del problema y de las condiciones de borde, los esquemas resultantes son siempre explícitos, sin necesidad de sistemas de ecuaciones.

El esquema numérico resultante depende de la forma como se realice la aproximación de las derivadas parciales por diferencias finitas. Por ejemplo, Chow et al. (1988) sugieren el esquema lineal:

$$Q_{i+1}^{j+1} = \frac{Q_i^{j+1} + ZQ_{i+1}^j + \frac{\Delta x}{2}(q_{i+1}^{j+1} + q_i^j)}{(1+Z)} \quad (4)$$

con

$$Z = \frac{\alpha\beta\Delta x}{\Delta t} \left(\frac{Q_{i+1}^j + Q_i^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1} \quad (5)$$

Al aproximar se produce dispersión y desfase de la onda. La ecuación (4) calcula explícitamente el hidrograma $Q(x,t)$ en cualquier punto y tiempo de la discretización y no se calcula directamente la celeridad cinemática (C_k), la que se va obteniendo automáticamente en el curso de su aplicación.

Como todo esquema explícito, el algoritmo representado por (4) está sujeto a la restricción de estabilidad de Courant-Friedrich-Lewy:

$$\frac{\partial t}{\partial x} < \frac{1}{C_{k_{\max}}} \quad (6)$$

Chow et al. (1988) también proponen un esquema explícito no lineal:

$$Q_{i+1}^{j+1} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} (Q_{i+1}^{j+1})^\beta - Q_{i+1}^j - \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} (Q_{i+1}^j)^\beta - \frac{\Delta x}{2} (q_{i+1}^{j+1} + q_i^{j+1}) = 0$$

Para cada punto de la discretización, debe resolverse iterativamente el problema no lineal (7), por ejemplo, mediante el método de Newton. De acuerdo con Chow et al. (1988), ha sido probado que el esquema no lineal es incondicionalmente estable.

2.3.- Soluciones empíricas o Modelos Concentrados

Estas soluciones reemplazan la ecuación de la dinámica (1.b) por la relación entre caudal de entrada y salida de un tramo de canal, por expresiones del tipo:

$$S = f(I, O) \quad (8)$$

donde:

- S : Volumen almacenado en el tramo del canal en estudio.
- I : Hidrograma de entrada al tramo.
- O : Hidrograma de salida del tramo.

Las funciones del tipo (8) se obtienen de crecidas anteriores y se resuelven junto a la ecuación de continuidad simplificada:

$$\frac{dS}{dt} = I - O \quad (9)$$

obteniéndose una variedad de modelos hidrológicos del tipo:

$$\frac{d}{dt} f(I, O) = I - O \quad (10)$$

Es importante destacar que estos modelos relacionan una sección de entrada con otra de salida, es decir, predicen lo que ocurre en una sección específica del canal, no entregando información de secciones intermedias. De aquí deriva su calificativo de «concentrados» para diferenciarlo de los modelos numéricos anteriores, denominados «distribuidos».

Los modelos descritos por la ecuación diferencial ordinaria (9) pueden considerarse como modelos cinemáticos, ya que no consideran las fuerzas que intervienen en el escurrimiento (modelo de onda dinámica). Su solución general debe realizarse por la vía numérica, dada la función "I" hidrograma de entrada "I".

Entre las soluciones empíricas más conocidas están los métodos de Muskingum, Cunge y Kalinin-Milyukov, los que se describen a continuación.

2.3.1.- Método de Muskingum

Producto de los estudios del Cuerpo de Ingenieros del Ejército (USA) en el Río Muskingum, Ohio, a fines de la década de los 30, atribuido a McCarthy, este método considera el almacenamiento producido por un escurrimiento a napa libre no paralela con el fondo del canal, donde:

$$S = K O + K x (I - O) = K [x I + O(1 - x)] \quad (11)$$

constante de proporcionalidad.
factor de ponderación. (adimensional)

Los parámetros K y x se obtienen por aproximaciones sucesivas, ajustándolos a una crecida [Shaw (1993), Bras (1990)]. Aproximando y reordenando resulta el esquema:

$$O_{j+1} = C_1 I_{j+1} + C_2 I_j + C_3 O_j \quad (12)$$

$$C_1 = \frac{(\Delta t - 2Kx)}{C_0} = x \quad (13)$$

$$C_2 = \frac{(\Delta t + 2Kx)}{C_0} \quad (14)$$

$$C_3 = \frac{[2K(1-x) - \Delta t]}{C_0} \quad (15)$$

$$C_0 = 2K(1-x) + \Delta t \quad (16)$$

Método de Kalinin-Milyukov

De acuerdo a Miller y Cunge (1975), un modelo similar al Muskingum es el propuesto en la Unión Soviética en la década del 50 por Kalinin y Milyukov. Este método concentrado se expresa:

$$O_{j+1} = O_j + K_1 (I_j - O_j) + K_2 (I_{j+1} - I_j) \quad (17)$$

$$K_1 = 1 - e^{-C_k \frac{\Delta t}{\Delta x}} \quad (18)$$

$$K_2 = 1 - \frac{K_1 \Delta x}{C_k \Delta t} \quad (19)$$

$$\Delta x = \frac{Q_0 \Delta y}{S_0 \Delta Q} \quad (20)$$

pendiente de la curva de descarga, en el punto correspondiente al caudal de referencia Q_0 .

2.3.3.- Método de Muskingum-Cunge

En 1961, J. Cunge [CSU (1980), Cunge et al. (1980)] propone una interpretación física de los parámetros K y x del método de Muskingum, basado en una comparación con los modelos difusivos. De acuerdo a lo obtenido por Cunge, los parámetros pueden ser calculados a partir de las siguientes expresiones :

$$K = \frac{\Delta x}{C_k} \quad (21)$$

$$x = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{q_0}{C_k S_0 \Delta x} \right) \quad (22)$$

donde

q_0 : Caudal por unidad de ancho de equilibrio, que puede ser calculado como un promedio ponderado del estado de los puntos vecinos (con estado ya conocido) de la discretización.

La ventaja del método de Muskingum-Cunge radica en que, con las expresiones (21) y (22) el método se independiza de la necesidad de disponer observaciones de crecidas, y los parámetros pueden ser obtenidos directamente de las características físicas y del estado del canal. Incluyendo que los parámetros dependen del estado y este varía en el tiempo, son también variables como lo hace Ponce (1980), en un programa cuya implementación se utiliza en el presente trabajo para resolver el problema ejemplo.

3.- COMPARACIÓN

Se comparan los hidrogramas de salida de cada metodología con la solución analítica considerada como solución exacta, y se calculan los respectivos errores. Se considera un canal rectangular de 2500 m de longitud, 3 m de ancho basal, y una rugosidad de Manning de 0.025. El tiempo de simulación es de 1 hora en intervalos de 0.05 horas. Se analizaron tres secciones transversales espaciadas cada una de ellas a 1250 m. La Figura 1 muestra el hidrograma de entrada.

Con el objeto de conocer además el comportamiento de estas metodologías en los diferentes tipos de escurrimientos, se ha resuelto un serie de 24 casos donde se ha variado la pendiente de fondo (S_0) entre 0,0035 y 0,04, (Número de Froude entre 0,55 y 1,82). Las Figuras 2 y 3 muestran los errores porcentuales producidos por las metodologías en la estimación de los caudales y tiempos máximos.

Una comparación entre métodos cinemáticos puede realizarse desde diferentes puntos de vista.

- **Tipo de escurrimiento** : El modelo de Muskingum-Cunge es el óptimo, tanto en régimen subcrítico como en régimen supercrítico. El máximo error cometido en la estimación de los caudales máximos es del orden del 10% , y en los tiempos asociados, el error cometido es prácticamente nulo, esto en concordancia con lo predicho por la solución analítica.

El modelo de Kálinin-Miljukov es más exacto que el Muskingum-Cunge, sólo en la predicción de los caudales máximos, con un error de 2.5 % como máximo. El desfase producido entre el hidrograma de entrada y el de salida es bastante conservador, con errores que oscilan entre un 34% a un 20%, para el tiempo al caudal máximo.

Se esperaba que el modelo no lineal fuese más exacto que su semejante modelo lineal; sin embargo, los resultados indican que con este último se comete un 2% menos de error al estimar los caudales máximos. En general, hay una tendencia de estos modelos a aproximarse a la solución exacta, reflejada principalmente en los casosos torrentosos. Los errores varían entre 27% y 11% en los caudales máximos, y hasta un 10% en los tiempos al máximo.

- **Tiempo de duración de la crecida** : Para un régimen de río y para pendientes del orden de 6,9 por mil, los modelos lineales y no lineales se aproximan notoriamente a la solución exacta (12 % a 4% menos de error, en los caudales máximos). No ocurre lo mismo con los modelos de Muskingum-Cunge y Kálinin-Miljukov , los que tienen un comportamiento más estable y más exacto que los modelos anteriores.

- **Concavidad del hidrograma de entrada** : Mientras menos concava sea la curva del hidrograma de entrada, mejor se ajustarán los métodos anteriores en la propagación de crecidas aguas abajo. En este sentido, los modelos de Muskingum-Cunge y Kalinin-Miljukov son más estables que los métodos cinemáticos lineal y no lineal.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Independientemente de cual método cinemático sea más eficaz para el rastreo de crecidas, su uso se recomienda para escurrimientos de poca profundidad, donde las pendientes son altas (mayores al 1 %) y los efectos de contracorrientes sean despreciables.

Finalmente, el método de Muskingum-Cunge parece ser el más recomendable para rastrear crecidas en ríos de mucha pendiente y de larga duración, así como para escurrimientos de poca profundidad.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo del Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT) a través del Proyecto No. 1931190.

REFERENCIAS

- BRAS R. (1990), «Hydrology. An introduction to hydrologic science», Addison Wesley.
- CHAUDHRY M. H.: (1987), «Applied Hydraulic Transients», Van Nostrand Reinhold Co., Nueva York.
- CHOW V.T., MAIDMENT D.R. y MAYS L.W. (1988), «Applied hydrology». McGraw Hill.
- CSU-COLORADO STATE UNIVERSITY (1980), «Unsteady flow in open channels». Notas del curso realizado del 16 al 20 de Junio de 1980.
- CUNGE J. A., HOLLY F. M. Jr y VERWEY A. (1980), «Practical aspects of computational river Hydraulics». Pitman, Londres.
- DOOGE J. C. I. (1986). «Theory of flood routing», Cap 3 en Kraijenhoff D.A. y Moll J.R. (1986).
- KRAIJENHOFF y MOLL (1986) (Editores), «River flow modelling and forecasting», D. Reidel Pub. Co. Dordrecht, Holanda.
- MAHMOOD K. y YEVJEVICH V. (Editores) (1975), «Unsteady flow in open channel», Vol. Water Resources Publications, Colorado.

- MILLER W.A. y CUNGE J.A. (1975), «Simplified equations of unsteady flow». Cap. 3. Mahmood y Yevjevich (1975).
- NAPIORKOWSKI J.J. y DOOGE J.C.I. (1988), «Analytical solution of channel flow with downstream control». *Hydrological Sciences Journal*, 33, 3, 6/1988, pp. 269-287. Incluye Erratum en 33, 4, 8/1988.
- PONCE V.M. (1980), «Computer programs for unsteady flow in open channels». Pub. CER79-80-VMP60, Colorado State University Engineering Research Center.
- SHAW E.M. (1983), «Hydrology in practice», Van Nostrand Reinhold.
- STAROSOLSZKY S. (Editor) (1987), «Applied surface hydrology», Water Resources Publications, Colorado.
- SZÖLLÖSI-NAGY A. (1987), «Hydrologic forecasts and warnings», Capítulo 11, Parte de Starosolszky (1987).
- VARGAS X. y FERNÁNDEZ B. (1994), «Propagación de crecidas en cauces naturales». Terceras Jornadas de Hidráulica Profesor Francisco Javier Domínguez, Concepción, Septiembre de 1994.

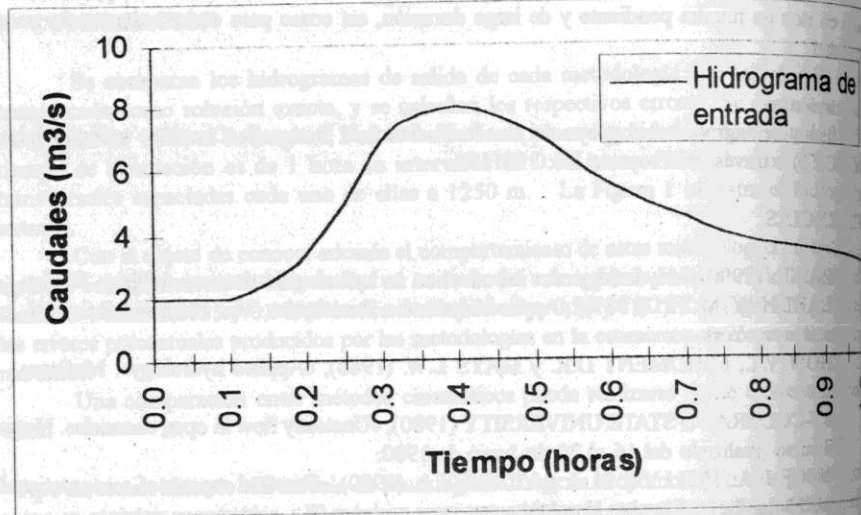


Fig. 1. Hidrograma de entrada.

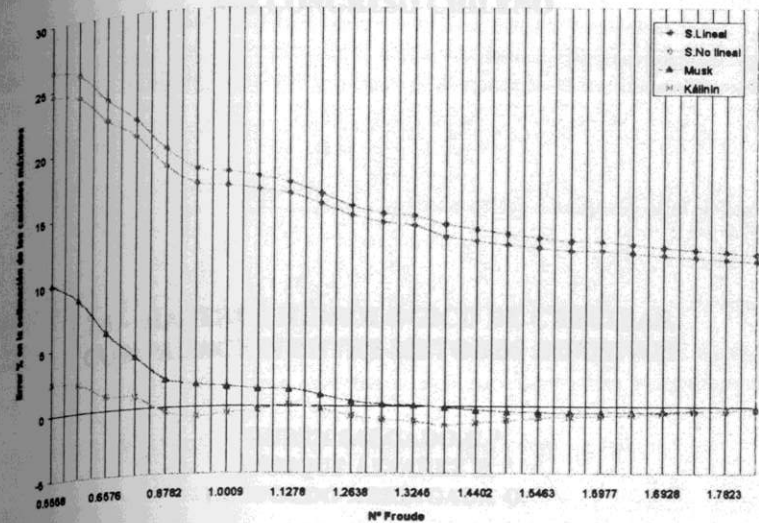


Fig. 2. Error porcentual en la estimación de los caudales máximos de las diferentes metodologías, respecto de la solución analítica.

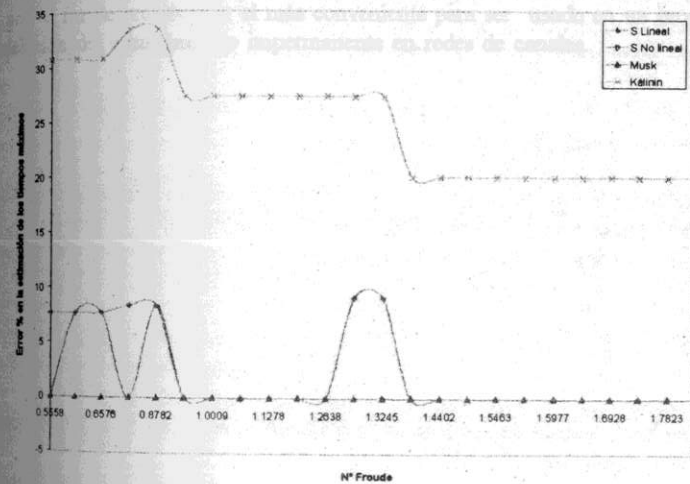


Fig. 3. Error porcentual en la estimación de los tiempos máximos de las diferentes metodologías, respecto de la solución analítica.