SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA
XII CONGRESO CHILENO

Sociedad Chilena
de Ingeniería Hidráulica

Instituto Nacional
de Hidráulica - Chile

8

MODELO NUMERICO FLUVIAL MORFOLOGICO IMPLICITO BASES TEORICO-PRACTICAS

LUIS E. ESTELLE A. (1) BERNARDO DOMINGUEZ C. (2)
RICARDO CORTEZ C. (3) DANISA CASTRO G. (4)

RESUMEN

Este trabajo tiene por objeto presentar las bases teóricas seguidas para el desarrollo e implementación de un modelo numérico totalmente implícito, para simular las condiciones de escurrimiento y evolución del lecho en cauces naturales en régimen subcrítico.

El modelo numérico que se presenta en este trabajo, se basa en los criterios y metodología propuestos por Maza Alvarez en 1988, el cual se basa, a su vez, en el criterio seguido por Berezowsky y Lara según el modelo de Cruickshandk y con aportes de Gracia y Aparicio y fue desarrollado con el objeto de comparar y de alguna manera cuantificar el efecto de las simplificaciones del modelo morfológico desarrollado por Domínguez, Estellé y Cortez en 1991.

(1) Ingeniero Jefe del Laboratorio de Peñaflor Instituto Nacional de Hidráulica
(2) Profesor Depto. Ingeniería Hidráulica y Ambiental PUC
(3) Ingeniero Depto. Estudios Instituto Nacional de Hidráulica
(4) Ingeniero de Proyectos ICC Ingenieros Civiles Consultores Ltda.

1.- GENERALIDADES

Se sabe que los cauces naturales no poseen una geometría rígida, ya que ésta varía debido al desequilibrio ocasionado por la cantidad y tipo del sedimento que reciben, los efectos de las crecidas, intervención antrópica, etc.

Para abordar planes y proyectos que permitan determinar la magnitud de los efectos en un cauce producto de las intervenciones mencionadas, en la actualidad existen varios caminos a seguir, tales como: los modelos empírico-analíticos determinísticos, los modelos físicos a escala y actualmente, la modelación matemática.

La modelación matemática utilizada en este tipo de modelo se basa en las ecuaciones completas del flujo impermanente (ecuaciones de Saint-Venant) y se suele emplear, para su solución numérica, la técnica de las diferencias finitas.

De los modelos matemáticos existentes, gran parte de ellos se resuelven separando la fase hidrodinámica de la sedimentológica. Es decir, primero se resuelven las condiciones hidráulicas del flujo y luego éstas se aplican para calcular las tasas de transporte de sedimento, para así derivar la respuesta morfológica del lecho.

Domínguez, Estellé y Cortez, desarrollaron e implementaron en 1991 un modelo numérico capaz de reproducir el comportamiento hidrodinámico y su interacción con el fondo móvil. En este modelo, para simplificar su resolución numérica, se utilizó el método combinado, implícito para la parte hidrodinámica y explícito para la parte morfológica.

Esta metodología, si bien presenta ventajas prácticas para la solución numérica, conceptualmente no considera la interacción simultánea que existe entre las condiciones del flujo y el transporte de los sedimentos. Pese a esto, si los cambios morfológicos del lecho son graduales y de pequeña magnitud relativa, este tipo de modelos sólo produce un pequeño desfase entre estos cambios y la situación hidrodinámica.

En consideración a lo expuesto, el presente trabajo tiene como base y objetivo establecer las bases teórico-prácticas de un modelo matemático determinístico, unidimensional e impermanente, que resuelve simultáneamente la fase hidráulica y la sedimentológica del escurrimiento.

2.- HIPOTESIS ACEPTADAS PARA LA MODELACION

Para el modelo hidráulico-sedimentológico que se presenta, se acepta que el escurrimiento es subcrítico y que su comportamiento puede ser representado unidimensionalmente, esto quiere decir que las componentes de velocidad, tanto verticales como transversales, no son importantes.

Se considera que la morfología longitudinal del río se encuentra en un estado de equilibrio. Esto

quiere decir que en el mediano y corto plazo el perfil longitudinal de un río no varía. Sin embargo, esta condición no implica necesariamente que en el fondo los sedimentos se encuentren estáticos, sino más bien que existe un tránsito sedimentológico medio, que al presentar un equilibrio entre los volúmenes sólidos que ingresan al cauce y los que el escurrimiento es capaz de transportar, no altera ni la pendiente, ni las cotas de fondo del cauce.

Para cuantificar la evolución del lecho, el modelo resuelve la continuidad del sedimento pero sin considerar fenómenos de acorazamiento. Para el cálculo de las tasas de transporte de sedimentos, el modelo trabaja con las siguientes fórmulas:

- Meyer-Peter y Müller (M-PyM) (1948)
- Engelund-Hansen (E-H) (1967)

La primera de ellas, considera que sólo existe arrastre de fondo y la segunda, que en el tramo de estudio hay transporte total, esto es, arrastre de fondo y suspensión.

De acuerdo al criterio de Maza Alvarez (1988), en cuyo modelo se basa fundamentalmente el presente trabajo, el transporte asociado a un determinado cauce estará determinado por el parámetro de estabilidad de Shields (θ'); de esta forma si θ' es mayor a 0,3 existe transporte total y por lo tanto deberá ocuparse la fórmula de Engelund-Hansen, en caso contrario (θ' < 0,3), sólo se verifica transporte de fondo y el gasto sólido es calculado según Meyer-Peter y Müller.

3.- FORMULAS DE TRANSPORTE DE SEDIMENTOS UTILIZADAS

En el modelo desarrollado en este trabajo se ha considerado la posibilidad de utilizar las fórmulas de Meyer-Peter y Müller y Engelund-Hansen. A continuación se presentan sus expresiones:

3.1.- FORMULA DE MEYER-PETER Y MÜLLER

Esta fórmula fue publicada en 1948 y sirve para cuantificar el arrastre en la capa de fondo. En su forma extendida tiene la siguiente expresión (Maza, 1987):

$$Q_S = 8\ B\ (\ g\ \Delta\ d_m^3\ )^{0.5}\ [\ (\ \frac{n'}{n}\ )^{1.5}\ \frac{h\ J}{\Delta\ d_m}\ -\ 0.047\ ]^{1.5} \qquad (1)$$

donde:

Q_s	:	arrastre en la capa de fondo.	(m^3/s)
b	:	ancho de la superficie libre.	(m)
B	:	ancho del fondo, donde ocurre transporte.	(m)
d_m	:	diámetro del material de fondo.	(m)

n'	:	rugosidad asociada a las partículas.
n	:	rugosidad del lecho según Manning.
J	:	pendiente hidráulica.
U	:	velocidad media del flujo (m/s).
Δ	:	s-1.

3.2.- FORMULA DE ENGELUND-HANSEN

Esta fórmula fue publicada en 1967, y con ella se puede calcular el arrastre de fondo y suspensión del transporte de sedimentos.

$$q_t = \phi \; 0,8 \; b \; (\Delta \; g \; d_{50}^3 \;)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

donde:

$$\theta' = \frac{h \; J}{\Delta \; d_{50}} \qquad (3)$$

$$f \phi = 0,1 \; \theta'^{\frac{5}{2}} \qquad (4)$$

$$f = \frac{2 \; g \; h \; J}{U^2} \qquad (5)$$

q_t, corresponde al gasto sólido de fondo y suspensión en m^3/s por metro de ancho. Es decir, para obtener el transporte total en volumen aparente, debe considerarse el ancho de acarreo y la porosidad:

$$Q_s = \frac{q_t \; 0,8 \; b}{(\; 1 - p \;)} \qquad (6)$$

donde p : porosidad del lecho (p = e/(1+e), e = índice de huecos)

La fórmula se desarrolló sobre la base de ensayos en laboratorios con arenas uniformes de diámetro $d_{50} > 0,19$ mm y desviación standard σ g< 1,6, y se ha observado que entrega resultados bastante buenos cuando la carga en suspensión es alta (Breusers y Raudkivi, 1991).

4.- FORMULACION DEL MODELO

A continuación se presenta el desarrollo del modelo basado en el propuesto por Maza Alvarez (1988), el cual se basa a su vez en el criterio seguido por Berezowsky y Lara según el modelo de Quickshandk y con aportes de Gracia y Aparicio (investigadores del Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México).

4.1.- ECUACIONES BASE DEL MODELO MATEMATICO

Por las características del fenómeno a modelar, el sistema de ecuaciones diferenciales parciales deberá considerar, con las respectivas esquematizaciones y simplificaciones, las siguientes condiciones básicas:

* continuidad de la masa líquida.
* continuidad de la masa de sedimento.
* conservación del momentum.

En forma adicional, la física de la interacción del escurrimiento con el cauce obliga a establecer ecuaciones para representar dos aspectos fundamentales:

* fricción entre el flujo y el lecho.
* tasa de transporte de sedimento.

Finalmente, debido a que la solución del sistema de ecuaciones exige una técnica numérica, se debe contar con ecuaciones que permitan acotar, por problemas de estabilidad y convergencia, la malla de discretización espacial y temporal, es decir:

* condición de Courant hidráulica.
* condición de Courant sedimentológica.

A continuación se detalla cada una de las ecuaciones utilizadas, así como los criterios a que se recurrió para su especificación:

4.1.1.- ECUACION DE CONTINUIDAD DEL LIQUIDO:

$$b \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

Por tratarse de un escurrimiento con lecho móvil, y como el objetivo es obtener un modelo tanto del escurrimiento como de la evolución del fondo, es conveniente definir la altura de agua como:

$$h = z - z_f \tag{8}$$

con lo que finalmente la ecuación de continuidad puede escribirse como:

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z_f}{\partial t} + \frac{1}{b} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{9}$$

donde:

Q	:	gasto líquido	(m^3/s)
b	:	ancho de la superficie libre	(m)
z_f	:	elevación del fondo	(m)
z	:	elevación de la superficie libre	(m)

4.1.2.- ECUACION DE LA CONTINUIDAD DE SEDIMENTO

En forma análoga a la continuidad de la masa líquida, es posible determinar la ecuación para la continuidad de la masa de sedimentos.

$$B \frac{\partial z_f}{\partial t} + (1 + e) \frac{\partial Q_s}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

4.1.3.- ECUACION DE LA CONSERVACION DEL MOMENTUM

La ley de conservación del momentum para flujo no permanente establece:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g A \frac{\partial h}{\partial x} + g A S = 0 \tag{11}$$

4.1.4.- ECUACIONES COMPLEMENTARIAS

Las ecuaciones complementarias utilizadas en el modelo son:

a) Fricción entre el Flujo y el Lecho

En el cálculo de la pendiente hidráulica J, se ha utilizado la fórmula de Manning:

$$n = \frac{h^{2/3} J^{1/2}}{U} \tag{12}$$

Para efecto del modelo desarrollado, se utiliza el parámetro de rugosidad de Manning como una rugosidad total o global.

b) Tasa de Transporte de Sedimentos

Idealmente el modelo se podría desarrollar para que funcione con varias fórmulas distintas, pero al incluir la fase hidráulica y sólida en un sistema cerrado o acoplado de ecuaciones, cada formulación para la tasa de transporte modifica el sistema de ecuaciones y, por ende, los términos matriciales para la solución numérica y computacional del mismo. Bajo esta consideración, y para no hacer demasiado extenso el trabajo, se optó por desarrollar dos modelos: uno con la fórmula de M-PyM y otro con la fórmula de Engelund-Hansen (E-H).

c) Condición de Courant

La condición de Courant es un criterio que permite asegurar la convergencia y estabilidad de la solución numérica de un modelo matemático. En estricto rigor, esta condición se debe cumplir tanto para la fase hidráulica como para la sedimentológica. Por lo tanto, en los pasos explícitos de la solución, el criterio permite tener una relación entre los incrementos de tiempo y espacio. En el caso del presente modelo, Δt deberá estar restringido en función del Δx escogido.

Al aplicar la condición hidráulica de Courant, se obtuvo como resultado pasos de tiempo extremadamente pequeños. Tanto es así que, al aplicarlos a casos prácticos, es decir donde se requiere conocer la respuesta morfológica en períodos de meses o años, se incurre en tiempos excesivos de computación.

No obstante la dificultad planteada, se encontró pertinente analizar el criterio de Courant pero enfocado hacia la evolución morfológica del fondo. Para esto, se adoptó el criterio sedimentológico de Courant de acuerdo con lo propuesto por el Danish Hydraulic Institute (DHI, 1991).

Aplicando este criterio se pudo constatar que los resultados obtenidos eran coherentes, inclusive con los fines de aplicación en ingeniería, razón por la cual se optó por incorporar esta condición al modelo.

De esta manera, pese a no tener implementado un Courant del flujo, el modelo sí tiene un Courant sedimentológico, lo que, en definitiva, concuerda con el principal objetivo de este trabajo y se estimó que este criterio, para el modelo en desarrollo, es suficiente para limitar los pasos explícitos de tiempo. A continuación se presentan las formulaciones adoptadas para cada uno de los criterios mencionados anteriormente:

- Condición Hidráulica de Courant

Según Koutitas (1983), el número de Courant hidráulico se define como:

$$\lambda = \frac{c\,\Delta t}{\Delta x} \tag{13}$$

donde:

$$c = \sqrt{g\,\bar{h}} \tag{14}$$

con c = celeridad de la onda.

Además para satisfacer el criterio de estabilidad se debe cumplir que λ sea menor a la unidad, esto es:

$$\frac{c\,\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{15}$$

- Condición de Courant del Sedimento

Definiendo el número de Courant del sedimento (DHI, 1991) como:

$$\sigma = c\,\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{16}$$

donde la celeridad de la onda sedimentológica es:

$$c = \frac{1}{(1-p)}\,\frac{\partial Q_s}{\partial zf}\,\frac{1}{0,8\,b} \tag{17}$$

El incremento Δ t debe cumplir, para todo instante, la siguiente condición:

$$\Delta t < \frac{0,8\,b\,\Delta x\,(1-p)}{\dfrac{\partial Q_s}{\partial z_f}} \tag{18}$$

4.2.- DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES MEDIANTE DIFERENCIAS FINITAS

Aplicando el método de las diferencias finitas a las ecuaciones (9), (10) y (11), se obtiene una solución implícita en el espacio y explícita en el tiempo. Es decir, para cada instante de tiempo, pueden calcularse para cada perfil los niveles de agua, de fondo, velocidades, y otros del tramo en estudio. Al pasar al siguiente instante de tiempo, las ecuaciones antes enumeradas, más las condiciones de borde e iniciales, deben ser resueltas nuevamente en forma simultánea, y así sucesivamente.

El sistema de ecuaciones resultante debe ser lineal -caso contrario, debe linealizarse- para resolverlo por cualquier método tradicional. Por lo tanto, dadas las condiciones iniciales, de borde y la geometría del cauce, es posible determinar los niveles y velocidades de la propagación del flujo en sucesivos intervalos de tiempo, a través de un sistema de ecuaciones, que resuelve las fases hidráulica y sedimentológica en forma simultánea.

4.2.1.- DISCRETIZACION

Según el valor de θ, factor de peso, el método puede clasificarse como totalmente explícito (θ =0) o totalmente implícito (θ= 1), de la práctica si θ se encuentra entre 0,5 y 1 el método es implícito. Con el objeto de no extenderse en resoluciones matemáticas intermedias, se presenta a continuación el sistema final que es preciso resolver.

$$k1_i = \frac{2\,\Delta t\,\theta}{\bar{b}_i\,\Delta x} \tag{19}$$

a) Ecuación de Continuidad de Líquido

Las ecuaciones de continuidad pueden expresarse mediante el siguiente sistema de coeficientes:

$$k1_i\,\Delta Q_{i+1} + K2_i\,\Delta zf_{i+1} + k3_i\,\Delta z_{i+1} + k4_i\,\Delta Q_i + k5_i\,\Delta zf_i + k6_i\,\Delta z_i = k7_i \tag{20}$$

donde:

$$k2_i = -1 \tag{21}$$

$$k3_i = 1 \tag{22}$$

$$k4_i = -k1_i \tag{23}$$

$$k5_i = -1 \tag{24}$$

$$k6_i = 1 \tag{25}$$

$$k7_i = \frac{2\,\Delta t}{\bar{b}_i\,\Delta x}\,(\,Q_i - Q_{i+1}\,) \tag{26}$$

b) Ecuación de la Continuidad de Sedimento

Del mismo modo los términos de esta ecuación se pueden expresar como :

$$N1_i\,\Delta Q_{i+1} + N2_i\,\Delta zf_{i+1} + N3_i\,\Delta z_{i+1} + N4_i\,\Delta Q_i + N5_i\,\Delta zf_i + N6_i\,\Delta z_i = N7_i \tag{27}$$

donde, los coeficientes se definen según:

$$N1_i = W_i\,\left[\,\left(\frac{\partial Q_s}{\partial S}\right)_{i+1}\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)_{i+1} + \left(\frac{\partial Q_s}{\partial Q}\right)_{i+1}\,\right] \tag{28}$$

$$N2_i = \psi - W_i\,\left[\,\left(\frac{\partial Q_s}{\partial h}\right)_{i+1} + \left(\frac{\partial Q_s}{\partial S}\right)_{i+1}\left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_{i+1}\,\right] \tag{29}$$

$$N3_i = W_i\,\left[\,\left(\frac{\partial Q_s}{\partial h}\right)_{i+1} + \left(\frac{\partial Q_s}{\partial S}\right)_{i+1}\left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_{i+1}\,\right] \tag{30}$$

$$N4_i = -W_i\,\left[\,\left(\frac{\partial Q_s}{\partial S}\right)_i\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)_i + \left(\frac{\partial Q_s}{\partial Q}\right)_i\,\right] \tag{31}$$

$$N5_i = (1-\psi) + W_i\,\left[\,\left(\frac{\partial Q_s}{\partial h}\right)_i + \left(\frac{\partial Q_s}{\partial S}\right)_i\left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_i\,\right] \tag{32}$$

$$N6_i = -W_i\,\left[\,\left(\frac{\partial Q_s}{\partial h}\right)_i + \left(\frac{\partial Q_s}{\partial S}\right)_i\left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_i\,\right] \tag{33}$$

$$N7_i = \frac{W_i}{\theta}\,(Q_{s_i} - Q_{s_{i+1}}) \tag{34}$$

con:

$$W_i = \frac{\theta\,\Delta t\,(1+e)}{\Delta x\,\bar{B}_i} \tag{35}$$

c) Ecuación de Cantidad de Movimiento

Para la cantidad de movimiento se llega a: (36)

$$M1_i\,\Delta Q_{i+1} + M2_i\,\Delta zf_{i+1} + M3_i\,\Delta z_{i+1} + M4_i\,\Delta Q_i + M5_i\,\Delta zf_i + M6_i\,\Delta z_i = M7_i$$

donde estos nuevos coeficientes se definen por:

$$M1_i = 1 + g\,\overline{A_i}\,\Delta t\,\theta\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)_{i+1} + \frac{4\theta\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{Q}{A}\right)_{i+1} \tag{37}$$

$$M2_i = -g\,\theta\,\overline{A_i}\,\Delta t\,\left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_{i+1} \tag{38}$$

$$M3_i = g\,\theta\,\overline{A_i}\,\Delta t\,\left[\frac{2}{\Delta x} + \left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_{i+1}\right] \tag{39}$$

$$M4_i = 1 - 4\,\theta\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\left(\frac{Q}{A}\right)_i + g\,\overline{A_i}\,\theta\,\Delta t\,\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)_i \tag{40}$$

$$M5_i = -\,g\,\theta\,\overline{A_i}\,\Delta t\,\left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_i \tag{41}$$

$$M6_i = g\,\theta\,\overline{A_i}\,\Delta t\,\left[-\frac{2}{\Delta x}+\left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_i\right] \tag{42}$$

$$-\frac{2\Delta t}{\Delta x}\left[\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{i+1}-\left(\frac{Q^2}{A}\right)_i\right] - g\,\overline{A_i}\,\Delta t\,(S_{i+1}+S_i) \tag{43}$$

4.3.- METODOLOGIA DE SOLUCION DEL MODELO

Inicialmente se subdivide el tramo en estudio en secciones transversales, numeradas desde aguas arriba hacia aguas abajo. Cada perfil esta representado por tres ecuaciones que corresponden al sistema de diferencias finitas por lo tanto, en total se tienen 3i ecuaciones -donde i representa el número total de secciones-.

Como también deben considerarse los extremos del tramo, el sistema se resuelve aplicando tres ecuaciones de borde: dos en el primer perfil aguas arriba y una en el extremo final aguas abajo; por lo tanto se tienen en total 3i - 3 incógnitas. Lo anterior se justifica teniendo presente que el escurrimiento subcrítico se controla aguas abajo.

Las condiciones de borde utilizadas con mayor frecuencia son:

a) Borde aguas arriba (i=1)

a.1 Se conocen los gastos de entrada en función del tiempo, esto es el hidrograma Q = Q(t)

a.2 Se conoce la granulometría, con lo cual se tiene el sedimentograma y por ende el gasto sólido de entrada, en función del tiempo, esto es $Q_s = Q_s(t)$

b) Borde aguas abajo (i=ns)

b.1 Se conoce la elevación de la superficie libre del escurrimiento z, esto es z = z(t)

De a.1 y b.1 se obtienen directamente ΔQ y Δz en el primer instante, es decir para t=0.

De a.2 se tiene $\Delta Qs_1^{\,1}$ conocido, por lo tanto se conoce el gasto sólido para el perfil 1 en cualquier instante.

Por otro lado:

$$\Delta Q_{s_1}(j) = Q_{s_1}(j+1) - Q_{s_1}(j) \tag{44}$$

Ecuación que al expresarla en función de las fórmulas de transporte de sedimento seleccionadas, y teniendo presente la condición de borde a.2, se obtiene finalmente una relación entre la elevación de la superficie libre z y el nivel de fondo zf, para la primera sección en cualquier tiempo.

En la resolución del sistema de ecuaciones formado por 19 27 y 34 y las condiciones de borde, surge la dificultad que éste no es lineal, pues aparecen términos en función de las incógnitas del instante siguiente (t+1). Para obviar este problema se recurre a un algoritmo de iteración, según se explica a continuación.

Para resolver el sistema se debe seguir el siguiente procedimiento:

-Se conocen las condiciones iniciales en todo el tramo, es decir, se conocen el gasto líquido Q, la elevación de la superficie libre de agua z, y la elevación del fondo del cauce zf en el instante t=0, para cada sección transversal.

-Con lo anterior se evalúan los coeficientes (K, M y N) de las ecuaciones 19, 27 y 34 como función de las variables evaluadas en el instante t=0, con lo cual el sistema de ecuaciones es lineal y puede resolverse.

-Esta primera aproximación permite obtener una solución tentativa, con la cual se actualizan nuevamente los coeficientes y se vuelve a iterar. Este procedimiento se repite hasta obtener un error menor a una cierta tolerancia, con lo cual se puede asegurar que el sistema ha convergido y por ende pasar al tiempo siguiente.

Para solucionar el sistema de ecuaciones se utilizó el método de Gauss Jordan, con lo cual, para la mayoría de los casos solo se necesitan tres o cuatro iteraciones.

-Una vez obtenido los incrementos ΔQ, Δz, Δzf, en las variables Q, z y Zf, respectivamente, se calculan las nuevas variables en el instante siguiente con:

$$Q_i^{j+1} = Q_i^j + \Delta Q_i \tag{45}$$

$$z_i^{j+1} = z_i^j + \Delta z_i \tag{46}$$

$$zf_i^{j+1} = zf_i^j + \Delta zf_i \tag{47}$$

valores con los cuales se avanza al siguiente instante y así sucesivamente.

Respecto a los valores de los factores de peso, se adoptó la recomendación de Maza (1988). Esto es:

$$\theta = 0,6 \tag{48}$$

en las ecuaciones de continuidad del líquido y cantidad de movimiento, y

$$\psi = 0,8 \tag{49}$$

en las ecuaciones de continuidad de sedimento.

Debe hacerse notar que si en la ecuación de continuidad de sedimento, el segundo término es nulo y se usa $\psi = 0.5$, resulta $\Delta zf_{i+1} = \Delta z_i$, que no corresponde al problema físico, por ello se ha utilizado $\psi = 0.8$.

5.- CONCLUSIONES

El flujo de un curso fluvial y su interacción morfológica puede ser descrito, de acuerdo con el método desarrollado, por un sistema lineal de ecuaciones que tiene solución. El modelo puede funcionar con cualquier fórmula de transporte de sedimento, pero es necesario tener presente, que al incluir la fase hidráulica y sólida en un sistema cerrado de ecuaciones, los términos del sistema de ecuaciones son dependientes de la fórmula usada. Fue suficiente para asegurar la estabilidad numérica, la utilización del criterio sedimentológico propuesto por el DHI, que limitan los pasos explícitos del tiempo.

6.- AGRADECIMIENTOS

Este artículo forma parte del proyecto de investigación del Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, FONDECYT 1950894 y contó con el apoyo del Instituto Nacional de Hidráulica y la Universidad de Santiago de Chile, entidades a las que los autores le expresan sus agradecimientos.

BIBLIOGRAFIA

1) Breusers H.N.C., Raudkivi A. J. (1991); «Scouring». Hydraulic Structures Design Manual. IAHR 2.

2) Dominguez B., Estellé L., Cortez R. (1992); « Modelo numérico simplificado para el flujo de pequeños estuarios». XV Congreso Latinoamericano de Hidráulica. 8-12 Septiembre, Cartagena, Colombia.

3) Koutitas C. G. (1983); «Element of Computational Hydraulics». Pentech Press.

4) Maza J.A. (1987); «Cambios que sufre un río aguas abajo de grandes presas». Revista Latinoamericana de hidráulica, N° 1 y 2.

5) Maza J.A. (1988); «Cambios que sufre un río aguas abajo de grandes presas». Revista Latinoamericana de hidráulica, N° 3, 39-63.

6) Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S. A., Vetterling W.T. (1986); «Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing». Cambridge University Press, Cambridge, Massachusetts.

7) Stauble Donald K. (1992); «Long-Term Profile and Sediment Morphodynamics: Fields Research Facility case History». Technical Report Cerc-92-7. US Army Corps of Engineers.