SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

XI CONGRESO CHILENO

FUNDAMENTOS MECANICOS DE LA INICIACION DEL MOVIMIENTO DE PARTICULAS ESFERICAS SIMULANDO GRANULOMETRIA FINA EN LECHOS NATURALES O ARTIFICIALES

SOLANO VEGA VISCHI*

RESUMEN

Se define como granulometria fina, los tamaños menores de 1mm de diámetro, que al constituir lechos móviles, pueden producir superficies no planas.

Se presentan las bases mecánicas puras de la iniciación del movimiento, como alternativa a criterios puramente experimentales, que son los corrientes en las publicaciones sobre el tema.El mètodo de análisis será en consecuencia el plantear ecuaciones de equilibrio límite.

El estudio de la rotación potencial sobre las esferas vecinas, para el caso de una esfera formando parte de una capa uniforme, determina un tamaño critico d_c, en función de las caracteristicas R y J del escurrimiento, tal que d_c= 9,36 RJ, valor algo diferente del 8,65RJ obtenido para granulometria gruesa, debido a la diferencia del coeficiente de arrastre entre ambos tipos de granos.(VEGA,1991)

Para una particula esférica colocada sobre una capa base de esferas del mismo diámetro, se obtiene un tamaño critico d_c=38,22RJ que es mucho mayor que el propuesto para granulometria gruesa, d_c= 15,98RJ(VEGA, 1991).

Las diferencias entre los valores de tamaños criticos entre particulas gruesas y finas son imputables a las diferencias entre el coeficiente de arrastre entre ambos tipos, 0,20 y 0,50 respectivamente.(ROUSE,1950)

El tamaño minimo del material que puede iniciar movimiento arrastrándose, es d_c= 1,127RJ. Para tamaños menores, la particula se mueve en suspensión. En el trabajo, se analiza iniciación del movimiento en lechos planos y no planos.

* Ing. Civil U.de Ch. SOLANO VEGA Y ASOCS. INGENIEROS CONSULTORES

I.- INICIACION DEL MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA ESFERICA COLOCADA DENTRO DE UNA CAPA SIMPLE UNIFORME EN LECHO PLANO.

En Fig. 1 se muestra la posición de una capa simple, con la curva de distribución de velocidades en función de la altura desde el nivel de estagnamiento. Se calcularán las fuerzas que actuan sobre un partícula, designada como 1, considerando que el Bernouilli es constante en la sección de interés.

Al existir una velocidad U_y en el coronamiento, por la constancia del B del hemisferio superior, se tendrá para y = d/2 una velocidad que se espresará de acuerdo a la distribución logaritmica de von Karman, con las constantes de Keulegan para lecho áspero.(EINSTEIN,1950)

$U_y = 5{,}75\log(30{,}2\ y/k_s)U^*$ (1)

$k_s = d/2$

para y= d/2, y k_s= d/2, se tiene:

$U^* = \sqrt{gRJ}$

R= radio hid.

J= pdte.plano de carga

$U_y = 5{,}75\log(30{,}2)U^* = 8{,}51U^*$ (2)

La velocidad media en el hemisferio superior, dada para y = d/4 en partícula 1, será $U'_y = U_y/2 = 4{,}255U^*$. Este aumento de velocidad entre la base de la semiesfera y su coronamiento, por constancia del B, implica una disminución de presión en la base $-\Delta p$ tal que:

$$-\Delta p = \gamma_a U^2/2g = \gamma_a(4{,}255U^*)^2/2g = \gamma_a 0{,}923U^{*2} \quad (3)$$

En (3), γ_a =peso especif. del agua= 1 ton/m^3.

Como consecuencia de esta disminución de presión, se tendrá una fuerza vertical F_L que trata de levantar la partícula del lecho:

$$F_L = \pi d^2 \Delta p/4 = 0{,}725\gamma_a d^2 U^{*2} \quad (4)$$

Por otro lado, la esfera 1 está sometida a una fuerza de arrastre F_D, y al peso propio sumergido F_S, en que:

$$F_D = [0{,}5C_D \pi d^2/4][\gamma_a/g][U'^2_y/2] = 0{,}181d^2U^{*2} \quad (5)$$

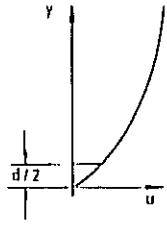
En (5), C_D=0,50 para R_e< 300.000 (ROUSE,1950), ya que para el mismo grado de turbulencia, el material fino tiene un R_e menor, y por lo tanto un C_D mayor.

$$F_S = (\gamma_s - \gamma_a)\pi d^3/6 \quad (6)$$

Si en (6), se hace γ_s=2,66 ton/m^3: $F_S = 0{,}869d^3$ (6')

La distribución en planta de las esferas en la disposición más compacta posible, se muestra en Fig.2a. La partícula 1

FIG. 1



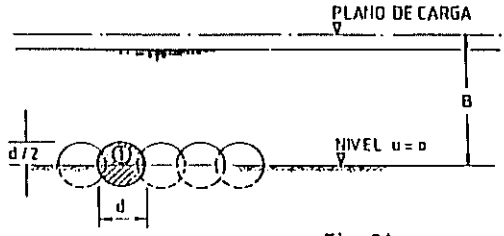
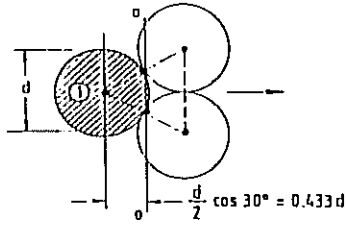


Fig 2a

Fig 2b

PLANTA



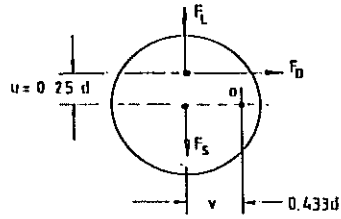
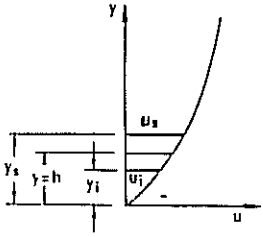


Fig. 3



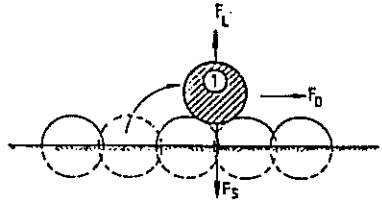


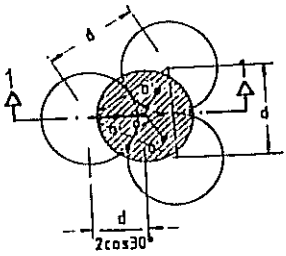
Fig. 4a

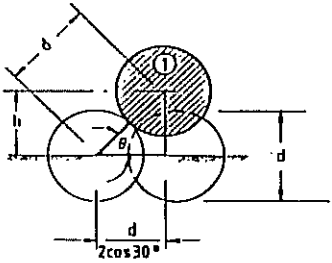
PLANTA

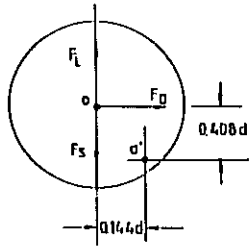
Fig. 4 b

SECCION 1-1

Fig. 4 c







de esa figura, muestra las fuerzas a que está sometida, y las distancias a su eje de rotación, en Fig.2b.
La situación de equilibrio limite a la rotación de la partícula es:

$$F_D x0,25d + F_L x0,433d - F_S x0,433d = 0 \qquad (7)$$

Reemplazando en (7) las expresiones (4), (5) y (6') , y despejando d, se tiene:

$$d=0,9548U^{*2} = 9,36RJ \qquad (8)$$

El valor dado por (8), es del mismo órden que el que resulta de aplicar la función de Shields en régimen turbulento, en que d = 10RJ(VEGA,1973 -ASCE,1975), con lo que el modelo aquí propuesto, recibe confirmación experimental.

II.- INICIACION DEL MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA ESFERICA COLOCADA SOBRE UNA CAPA BASE DE IGUAL DIAMETRO, EN LECHO PLANO.

Se escribirán las condiciones de equilibrio limite para la iniciación del movimiento por rotación de la esfera 1 sobre las esferas de la base, y la de iniciación por arrastre.

En Fig. 3 se indica la posición de esfera 1, y la distribución de velocidades caracteristicas que actuan sobre ella. En Fig. 4a se muestra la posición en planta de la esfera, y en Fig. 4b, la sección 1-1 correspondiente a la planta.

De sección 1-1, se tiene: $d\cos\theta = d/2\cos 30^o$

$$\therefore \cos\theta = 1/2\cos 30^o = 0,577; \ \theta = 54,73^o$$

$h= d\,\mathrm{sen}\theta = 0,816d$, $y_s= h + d/4 = 1,066d$; $y_i= h-d/4= 0,566d$

La distancia horizontal u entre centro de esfera 1 y eje potencial de rotación 0' - 0' en esferas inferiores es:

$$u= (0'-0')\cos 60^o=0,5d\cos\theta\cos 60^o= 0,144d$$

La distancia vertical v entre centro esfera 1 y eje potencial de rotación es: $v=0,5d\,\mathrm{sen}\theta=0,408d$. En Fig.4c se muestra la esfera 1 con las fuerzas actuantes y posición de puntos 0' de rotación potencial, con la ecuación de equilibrio limite:

$$F_D x0,408d + (F_L-F_S)0,144d=0 \qquad (7)$$

$$F_D=[0,5\pi d^2/4][\gamma_a/g]U_y^2/2 \qquad (8)$$

$$U_y= 5,75\log(30,2x0,816d/0,5d)U^*= 9,733U^* \qquad (9)$$

$$\therefore F_D = 1,898d^2U^{*2} \qquad (8')$$

$$F_L=(\gamma_a \pi d^2/4)(U_s-U_i)^2/2g \qquad (10)$$

$$U_s = 5{,}75\log(30{,}2x1{,}066d/0{,}5d)U^* = 10{,}40U^* \quad (11)$$

$$U_i = 5{,}75\log(30{,}2x0{,}566d/0{,}5d)U^* = 8{,}82U^* \quad (12)$$

$$\therefore F_L = 0{,}100(dU^*)^2 \quad (10')$$

$$F_S = 0{,}869d^3 \quad (13)$$

Reemplazando los valores precedentes en (7), se tiene un valor de d:

$$d = 6{,}303U^{*2} = 61{,}77RJ \quad (14)$$

Se calculará el d para la situación de equilibrio limite dada para la situación de fricción, ya que las particulas reales no son esféricas, y tratarán de deslizar y no de rotar. Esta situación corresponde a equilibrio de fuerzas en el sentido del escurrimiento:

$$F_D = (F_S - F_L)\tan\phi \quad (15)$$

Se adopta $\phi = 30^o$, y $\tan\phi = 0{,}577$

$$1{,}898(dU^*)^2 = 0{,}577[0{,}869d^3 - 0{,}100(dU^*)^2]$$

$$\therefore d = 3{,}9U^{*2} = 38{,}22RJ \quad (15')$$

La ec. (15') representa el tamaño limite superior en que se puede iniciar el arrastre para las condiciones de escurrimiento fijadas por R y J. El tamaño minimo que se arrastra será aquel para el cual $F_L \leqslant F_S$, en que la particula está a punto de despegarse del lecho. De ecs. (10') y (13) se tiene;

$$0{,}869d^3 \geqslant 0{,}100(dU^*)^2$$

$$\therefore d \geqslant 0{,}115U^{*2} \geq 1{,}127RJ \quad (16)$$

Para $d < 1{,}127RJ$, la particula se despega y se traslada en suspensión.

III.- INICIACION DEL MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA ESFERICA COLOCADA SOBRE UNA CAPA BASE DE IGUAL DIAMETRO, EN DUNA O RIPPLE.

En Fig. 5 se presentan las fuerzas que actuan en particula en la cara alargada de una duna o ripple, y en Fig 6 se muestran las componentes en el sentido del deslizamiento, paralelas y perpendiculares al lecho.

La condición de equilibrio limite es:

$$F'_D + F''_L - F''_S = (F'_S + F''_D - F'_L)\tan\phi \quad (17)$$

FIG 5

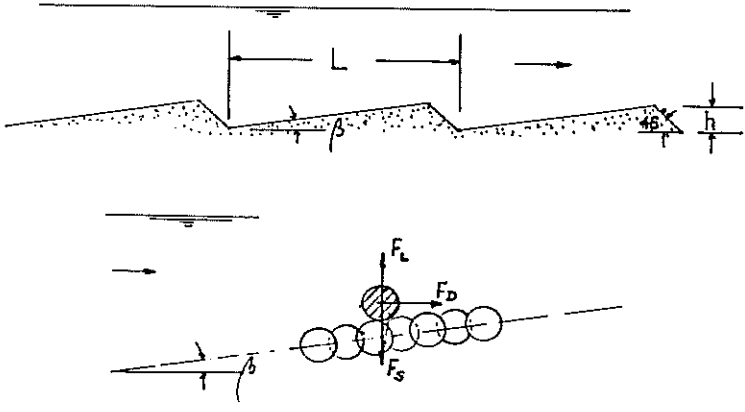
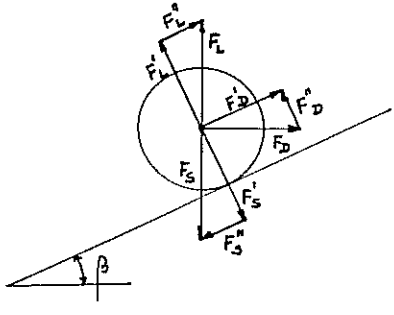


FIG 6



$F'_D = F_D\cos\beta$; $F''_D = F_D\text{sen}\beta$; $F'_S = F_S\cos\beta$

$F''_S = F_S\text{sen}\beta$; $F'_L = F_L\cos\beta$; $F''_L = F_L\text{sen}\beta$

Reemplazando valores en (17) se tiene:

$$F_D(\cos\beta - 0{,}577\text{sen}\beta)/(\text{sen}\beta + 0{,}577\cos\beta) = F_S - F_L \quad (18)$$

Reemplazando en (18) los valores dados por (8'), (13) y (10')despejando d, se tiene;

$$d = 21{,}40RJ(1{,}03\cos\beta - 0{,}574\text{sen}\beta)/(\text{sen}\beta + 0{,}577\cos\beta) \quad (19)$$

Si en (19) se hace $\beta = 0$, se obtiene el mismo valor de d dado por (15): d = 38,22RJ.

De (19) se obtiene el valor de β, conocido d y las características del escurrimiento R y J:

$$d(\text{sen}\beta + 0{,}577\cos\beta) = 21{,}40RJ(1{,}03\cos\beta - 0{,}547\text{sen}\beta)$$
$$d(\text{tang}\beta + 0{,}577) = 21{,}40RJ(1{,}03 - 0{,}547\text{tang}\beta)$$

$$\therefore \quad \text{tang}\beta = (22{,}04RJ - 0{,}577d)/(11{,}70RJ + d) \quad (20)$$

La longitud L de las dunas o ripples, depende básicamente de la velocidad media del escurrimiento U, como se deduce de Sedimentation Engineering en su fig. 2.78 (ASCE,1975)

Efectuando algunas transformaciones de la forma de presentación de la figura 2.78 mencionada, se puede obtener la relación:

$$L = 0{,}75U^2 \quad (21)$$

La expresión (21) tiene una variación de más menos 15% con respecto a la curva de fig. 2.78 para $0{,}1 < F < 1{,}0$.

La altura h de la duna, se deduce de Fig.5 como se indica:

$$h = (L-h)\text{tang}\beta \quad \therefore \quad h = L\text{tang}\beta/(1+\text{tang}\beta)$$

$$h = 0{,}75U^2\text{tang}\beta/(1 + \text{tang}\beta) \quad (22)$$

En (22), se reemplaza el valor de tangβ dado por (20), con lo cual se obtiene el valor h, y en consecuencia se pueden determinar todas las características geométricas de las formas del lecho.

REFERENCIAS

Vega V. Solano(1991) " Fundamentos mecánicos de la iniciación del movimiento en lechos de granulometría gruesa y extendida " X Congreso Nacional de Hidráulica.

Rouse H. (1950) " Engineering Hydraulics"

Einstein H. A.(1950) " The bed load function in sediment transport"

A.S.C.E. (1975) " Sedimentation Engineering"