SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

XI CONGRESO CHILENO

CALCULO DE LA INFILTRACION MEDIANTE TECNICAS NUMERICAS, ALGORITMO

Humberto Zavala Zunino (1)

RESUMEN

Tras la evaluación de la infiltración en una columna de suelo de una ladera, mediante técnicas numéricas de aplicación general, se ha implementado computacionalmente a partir de la ecuación de Richards un algoritmo de diferencias finitas implícito. El sistema de ecuaciones que considera al potencial mátrico como variable, se lleva a un esquema tridiagonal, el que se resuelve mediante el algoritmo de Thomas. El programa se ha desarrollado con algunas opciones para evaluar la curva característica del suelo y la conductividad hidráulica no saturada.

---

(1) Ingeniero Civil. Académico Departamento de Ingeniería en Obras Civiles, Universidad de La Serena.

1.- INTRODUCCION

La infiltración es un proceso bifásico, donde el flujo descendente de partículas de agua líquida que atraviesa la superficie del suelo, avanza a través de los poros del suelo, desplazando a las partículas de aire que ocupan parte de los huecos existentes en la matriz del suelo, o fracturas y macroporos del suelo. Por lo que su ocurrencia requiere que el suelo y la superficie sean no-hidrofóbicos, que exista agua sobre la superficie y, que las partículas de aire puedan escapar. Su magnitud queda definida también por el estado de humedad inicial del suelo y por la capacidad que exista de mover y evacuar vertical u horizontalmente el agua que infiltra.

Las técnicas existentes para evaluar y modelar la infiltración en una columna de suelo no-hidrofóbico, se refieren al flujo a través de la matriz del suelo, por lo que en caso que la densidad y magnitud de los macroporos y fracturas sea elevada, también lo será la capacidad de infiltración del suelo y su determinación aún más difícil e incierta (Beven y Germann, 1982).

Puesto que la capacidad de infiltración del suelo depende de su estado de humedad, el que queda caracterizado por el contenido de humedad volumétrica θ (m^3/m^3) y, por el potencial total Agua-Suelo H (m). La humedad varía entre: θ_r, la humedad residual y, θ_{sat}, la humedad de saturación. En suelos no saturados $H = z + \psi$, donde z es el potencial gravitacional con respecto al nivel de referencia y ψ es el potencial mátrico (o succión o tensión capilar), siendo $\psi < 0$. En caso de suelos saturados $\psi = 0$ y, $H = z + P$, donde P es el potencial de presión o altura de la carga de agua. Existen otros potenciales (potencial neumático y osmótico) que no intervienen en la infiltración.

El escurrimiento en los primeros estratos de suelo se puede representar mediante la ecuación de continuidad y la ecuación de Darcy, llegándose a la ecuación (1) que se denomina ecuación de Richards, también conocida como ecuación de Fokker-Planck, (Haverkamp et al., 1977)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[K(\theta)\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \pm 1\right)\right] - S(z) \qquad (1)$$

Dependiendo de la dirección elegida para el eje z, resulta el signo + o - en la ecuación anterior: (+) : Eje z positivo hacia arriba, (-) : Eje z positivo hacia abajo. S (z) es el agua absorbida por las raíces de las plantas ubicadas a la cota (z) correspondiente. $K(\theta)$ o $K(\psi)$ corresponde a la conductividad hidráulica del suelo, en caso que éste se encuentre saturado se utiliza simplemente K_{sat}

En la deducción de la ecuación de Richards (ec. 1) se ha asumido que el suelo se encuentra no saturado, pero dicha ecuación también es válida en condiciones de saturación, siendo necesario reemplazar ψ por P. Este aspecto es muy importante, ya que un suelo inicialmente no saturado puede, al menos en algún estrato llegar a la saturación (el tiempo de inundación indica el instante en que la superficie del terreno se satura), no siendo necesario por lo anterior recurrir a otra ecuación para continuar modelando el proceso.

Para resolver numéricamente la ecuación de Richards, resulta altamente conveniente trabajar con una sola variable, ya sea θ o ψ, por lo que se recurre a algunas variables adicionales: $C = \partial\theta/\partial\psi$, la Capacidad del suelo-agua, $D = K\ \partial\psi/\partial\theta = K/C$, la Difusividad específica del suelo. En caso que el suelo esté saturado C= 0 y D = ∞ . Resultando el siguiente par de versiones de la ecuación de Richards:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\ \frac{\partial \theta}{\partial z}\right] \pm \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} - S(z) \qquad (2a)$$

$$C(\psi)\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[K(\psi)\ \frac{\partial \psi}{\partial z}\right] \pm \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} - S(z) \qquad (2b)$$

Puesto que a menor contenido de humedad el potencial mátrico aumenta (se hace más negativo), es posible establecer una relación entre θ y ψ, en caso que el suelo no presente histéresis, la relación $\theta - \psi$ que es altamente no-lineal, (Hills et al., 1989) es única y se conoce como Curva Característica o Curva de Retención del suelo.

2.- METODOLOGIAS PARA ESTIMAR LA INFILTRACION A PARTIR DE LA ECUACION DE RICHARDS

La ecuación de Richards (ec. 1, 2a o 2b) no admite una solución analítica, salvo que se asuman algunas relaciones explícitas para $C(\theta)$ o $C(\psi)$, $D(\theta)$ o $D(\psi)$ y para la curva característica, (Broadbridge y White, 1988 a,b; White y Broadbridge, 1988; Sander et al., 1988; Warrick et al., 1990). Tales soluciones poseen aplicabilidad limitada, por lo que su resolución en forma general exige recurrir a técnicas numérico-computacionales, tales como diferencias o elementos finitos, resultando ser ésta la manera más directa, versátil y precisa de estimar la infiltración y el contenido de humedad en el suelo, para eventos lluvia y no lluvia, con o sin vegetación. Rubin (1968), señalaba que "A la fecha, los métodos numéricos ofrecen la principal esperanza de resolver la ecuación de Richards para las situaciones encontradas habitualmente en la naturaleza".

En caso de considerar diferencias finitas se debe subdividir la columna de suelo en tramos separados una distancia Δz entre sí, cada tramo es representado a través de su punto medio denominado

Nodo, teniéndose N o N+1 Nodos. La literatura es abundante en técnicas utilizadas para enfrentar este problema, la mayoría de tales trabajos utilizan la presión (o potencial mátrico) como variable (ec. 2b) (Rubin, 1968; Busscher, 1979; Hogarth et al, 1991), aunque algunos autores han trabajado con la humedad (ec. 2.a) De Jong y Cameron (1978); Hills et al.(1989), estos últimos autores argumentan que al trabajar con la humedad se pueden obtener importantes ahorros computacionales, pero su utilidad es limitada a zonas no saturadas, puesto que en dicha situación la difusividad tiende a infinito (Kirkland et al, 1992). Haverkamp et al. (1977), presentó 6 modelos deferentes explícitos e implícitos, utilizando ya sea la humedad o la presión como variable, aunque preferentemente esta última, llegando a obtener resultados similares entre dichos modelos.

3.- RESOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION DE RICHARDS

En este estudio se ha recurrido al algoritmo propuesto por Hogarth et al. (1991), quienes resuelven mediante diferencias finitas implícitas la ecuación de Richards (ec. 2b) considerando al potencial mátrico (o presión) como variable. La columna se ha dividido en N+1 Nodos, siendo el Nodo 1 el nodo superior, z positivo hacia arriba, z = 0 en la superficie de la ladera, pudiéndose describir del siguiente modo:

NODO i:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right] \cong \frac{1}{2\ (\Delta z)^2}\left[K_{i+1/2}^{t+1/2}\ (\psi_{i+1}^{t+1}+\psi_{i+1}^{t}+\psi_{i}^{t+1}+\psi_{i}^{t}) - \right.$$

$$\left. - K_{i-1/2}^{t+1/2}\ (\psi_{i}^{t+1}+\psi_{i}^{t}+\psi_{i-1}^{t+1}+\psi_{i-1}^{t})\right] \qquad (3)$$

$$\frac{\partial\ \psi}{\partial\ t} \cong \frac{1}{\Delta t}\ (\psi_{i}^{t+1}-\psi_{i}^{t}) \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\ K(\psi)}{\partial\ z} \cong \frac{1}{\Delta z}\ (K_{i+1/2}^{t+1/2}-K_{i-1/2}^{t+1/2}) \qquad (5)$$

$$C \cong C_{i}^{t+1/2} \qquad (6)$$

donde:

$$K_{i+1/2}^{t+1/2} = \frac{1}{4} (K_i^t + K_{i+1}^t + K_i^{t+1} + K_{i+1}^{t+1}) \quad (7a)$$

$$K_i^{t+1/2} = \frac{1}{2} (K_i^t + K_i^{t+1}) \quad (7b)$$

$$C_{i+1/2}^{t+1/2} = \frac{1}{4} (C_i^t + C_{i+1}^t + C_i^{t+1} + C_{i+1}^{t+1}) \quad (8a)$$

$$C_i^{t+1/2} = \frac{1}{2} (C_i^t + C_i^{t+1}) \quad (8b)$$

Más las condiciones de borde siguientes:

NODO 1:

$$K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} + K(\psi) = Q \quad (9)$$

donde Q = Infiltración, existiendo dos casos posibles:
Cuando el nodo superior 1 no está saturado: $Q^{t+1} = r^{t+1}$ donde r^{t+1} = Intensidad de lluvia tiempo t+1 (conocida) quedando como incógnita, ψ_1^{t+1}

Cuando el nodo superior(1) está saturado:
$\psi_1^{t+1} = z_1 + h$ = Altura lámina de agua superficial con respecto al Nodo 1.
donde: h = altura de la lámina de agua superficial (conocida), quedando como incógnita la infiltración Q^{t+1} la que debe ser $\leq r^{t+1}$

NODO N + 1:
Considerando una columna de suelo semi-infinita, se asumirá que el potencial mátrico ψ_{N+1} es conocido en todo instante t, considerándose constante.

Este algoritmo permite llevar el sistema de ecuaciones a un sistema tridiagonal. El Anexo I presenta las ecuaciones finales a emplear en la resolución numérica del sistema de ecuaciones. Puesto que el sistema de ecuaciones resulta tridiagonal, se recurre al algoritmo de Thomas para su resolución. Dado que las constantes $K_{i+1/2}^{t+1/2}$, $K_{i-1/2}^{t+1/2}$, etc (ecuaciones 7 y 8) están en

función de K_i^{t+1}, K_{i+1}^{t+1}, etc., las que a su vez son función del valor de las variables ψ, θ en el tiempo t+1, que son las variables a determinar, se requiere volver a iterar, asumiendo ahora como variables ψ_i^{t+1}, aquellas obtenidas de la iteración previa: $\overset{*}{\psi}_i^{t+1}$. Lo anterior hasta que se logre la convergencia de ψ_i^{t+1} ($\overset{*}{\psi}_i^{t+1} \simeq \psi_i^{t+1}$, $\forall$ i). La figura 1, presenta un diagrama de flujo del procedimiento a seguir.

El algoritmo descrito posee como principal desventaja su alto costo computacional, ya que en cada intervalo temporal exige iterar antes de lograr la convergencia, lo que en general significa resolver el sistema de ecuaciones más de una vez.

Abeliuk (1987), señala que el problema no es la solución de la ecuación de Richards sino más bien el encontrar las relaciones $C(\psi)$ y $K(\psi)$ que caracterizan el material poroso. Al respecto existen diversas relaciones matemáticas para la curva característica del suelo y para la conductividad hidráulica no saturada. En los Anexos II y III se presentan las respectivas relaciones empleadas en el modelo.

4.- CONCLUSIONES:

Puesto que para poder aplicar el algoritmo presentado y cualquier otro que recurra a la ecuación de Richards se debe conocer la curva característica y $K(\psi)$ o $K(\theta)$ para cada estrato y área de suelo diferente, su aplicabilidad está dirigida hacia laderas donde se desee estimar en forma precisa la infiltración y se disponga de los recursos necesarios para efectuar la campaña de mediciones y de trabajo de laboratorio necesaria. También es factible implementar este tipo de algoritmos al caso de cuencas, como es el caso del Sistema Hidrológico Europeo (SHE), Abbott at al.(1986), siendo los costos en general proporcionales a su dimensión.

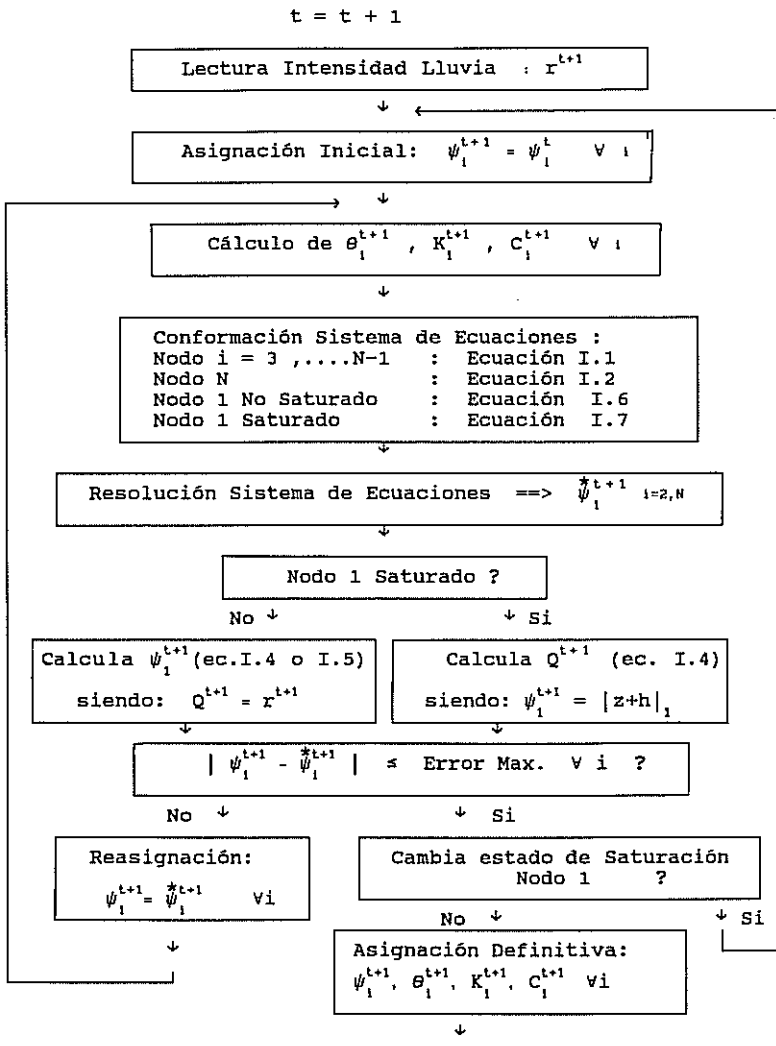

Figura 1.- Diagrama de Flujo Algoritmo a utilizar

ANEXO I.- ECUACIONES DEFINITIVAS ALGORITMO A UTILIZAR

Nodo i = 3, ..., N-1

Reemplazando las ecuaciones 3, 4, 5 y 6 en la ecuación 2b, se llega a:

$$\psi_i^{t+1}\left[-2C_i^{t+1/2}\frac{\Delta z^2}{\Delta t} - K_{i-1/2}^{t+1/2} - K_{i+1/2}^{t+1/2}\right] + \psi_{i-1}^{t+1}\left[K_{i-1/2}^{t+1/2}\right] + \psi_{i+1}^{t+1}\left[K_{i+1/2}^{t+1/2}\right] =$$
$$= \psi_i^t\left[-2\ C_i^{t+1/2}\frac{\Delta z^2}{\Delta t} + K_{i-1/2}^{t+1/2} + K_{i+1/2}^{t+1/2}\right] - \psi_{i-1}^t\left[K_{i-1/2}^{t+1/2}\right] - \psi_{i+1}^t\left[K_{i+1/2}^{t+1/2}\right]$$
$$-2\ \Delta z\left[K_{i-1/2}^{t+1/2} - K_{i+1/2}^{t+1/2}\right] \qquad \text{(I.1)}$$

Nodo i = N

Corresponde a la ecuación anterior para i=N, considerando que se conoce ψ_{N+1}^t para todo t, es decir, se conoce ψ_{N+1}^t y ψ_{N+1}^{t+1}. En este trabajo se ha considerado ψ_{N+1} constante e igual a ψ_{N+1}^0, quedando:

$$\psi_N^{t+1}\left[-2\ C_N^{t+1/2}\frac{\Delta z^2}{\Delta t} - K_{N-1/2}^{t+1/2} - K_{N+1/2}^{t+1/2}\right] + \psi_{N-1}^{t+1}\left[K_{N-1/2}^{t+1/2}\right] =$$
$$= \psi_N^t\left[-2\ C_N^{t+1/2}\frac{\Delta z^2}{\Delta t} + K_{N-1/2}^{t+1/2} + K_{N+1/2}^{t+1/2}\right] - \psi_{N-1}^t\left[K_{N-1/2}^{t+1/2}\right]$$
$$- K_{N+1/2}^{t+1/2}\left[\psi_{N+1}^t + \psi_{N+1}^{t+1}\right] - 2\ \Delta z\left[K_{N-1/2}^{t+1/2} - K_{N+1/2}^{t+1/2}\right] \qquad \text{(I.2)}$$

Nodo i = 2

Considerando los siguientes términos en la ecuación (2b):

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \left(\psi_{5/2}^{t+1/2} - \psi_{3/2}^{t+1/2}\right) \qquad \text{(I.3a)}$$

$$\frac{\partial\ \psi}{\partial\ t} = \frac{1}{2\ \Delta t}\left(\psi_2^{t+1} + \psi_1^{t+1} - \psi_2^t - \psi_1^t\right) \qquad \text{(I.3b)}$$

$$\psi_{i+1/2}^{t+1/2} = \frac{1}{4}\left(\psi_{i+1}^{t+1} + \psi_i^{t+1} + \psi_{i+1}^t + \psi_i^t\right) \qquad \text{(I.3c)}$$

Que junto a la ecuación 8, permite llegar a:

$$\psi_1^{t+1}\left[C_{2+1/2}^{t+1/2}\frac{1}{\Delta t}+\frac{1}{2\ \Delta z^2}K_2^{t+1/2}\right]+\psi_2^{t+1}\left[C_{2+1/2}^{t+1/2}\frac{1}{\Delta t}\right]+$$

$$+\psi_3^{t+1}\left[-\frac{1}{2\ \Delta z^2}K_2^{t+1/2}\right]+Q^{t+1}\left[\frac{1}{\Delta z}\right]=\frac{1}{\Delta t}\ C_{2+1/2}^{t+1/2}\left[\psi_2^{t+1}+\psi_1^{t+1}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta z}\left[K_2^{t+1/2}\left(2+\frac{1}{2\ \Delta z}\left(\psi_3^t-\psi_1^t\right)\right)\right] \qquad \text{(I.4a)}$$

Ecuación que se puede escribir en forma simplificada como:

$$L\ \psi_1^{t+1}+U\ \psi_2^{t+1}+V\ \psi_3^{t+1}+M\ Q^{t+1}=W \qquad \text{(I.4b)}$$

La ecuación (I.1) para i=2, se puede escribir en como:

$$E\ \psi_1^{t+1}+F\ \psi_2^{t+1}+G\ \psi_3^{t+1}=H \qquad \text{(I.5)}$$

De acuerdo a lo señalado en el punto 3, existen dos situaciones posibles:

Cuando el nodo superior(1) no está saturado, se debe encontrar ψ_1^{t+1}, siendo la infiltración $Q^{t+1}=r^{t+1}$ conocida, en este caso introduciendo la ecuación (I.3b) en (I.4), se llega a:

$$\psi_2^{t+1}(F-U*E/L)+\psi_3^{t+1}(G+V*E/L)=H-E\ (W/L-Q^{t+1}M/L) \qquad \text{(I.6)}$$

Posteriormente, al resolver el sistema de ecuaciones completo, se tendrá ψ_2^{t+1} y ψ_3^{t+1} y, mediante las ecuaciones I.4 o I.5 se determina ψ_1^{t+1}.

Cuando el nodo superior(1) está saturado, ψ_1^{t+1}es conocida y, simplemente se reemplaza en la ecuación (I.4), llegándose a:

$$F\ \psi_2^{t+1}+G\ \psi_3^{t+1}=H-E\ \psi_1^{t+1} \qquad \text{(I.7)}$$

La infiltración Q^{t+1} que es desconocida, se determina posteriormente reemplazando los potenciales ψ_1^{t+1},ψ_2^{t+1} y ψ_3^{t+1} en la ecuación I.4 (a o b).

ANEXO II ALGUNAS EXPRESIONES PARA LA CURVA CARACTERISTICA DEL SUELO.

- Ecuación de Brooks- Corey (Brooks-Corey (1964), citado por Ragab y Cooper (1990))

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[\frac{\psi_e}{\psi} \right]^{\lambda} \qquad \text{(II.1)}$$

- Ecuación de Campbell (Campbell,1974)

$$\frac{\theta}{\psi_s} = \left[\frac{\psi_e}{\psi} \right]^{1/b} \qquad \text{(II.2)}$$

- Ecuación de Van Genuchten (Van Genuchten, 1980)

$$\left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right) = \left(\frac{1}{1 + | \alpha \psi |^n} \right)^m \qquad \text{(II.3)}$$

- Ecuación de Parlange (Parlange (1985), citado por Ragab y Cooper (1990))

$$\alpha \psi = - \left[\left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{-1/\gamma} - 1 \right]^{1/\beta} \qquad \text{(II.4)}$$

Donde: γ, β, b, n, m : son constantes a determinar de acuerdo a la curva característica del suelo, obtenida a partir de mediciones en terreno o en laboratorio.

ANEXO III.- ALGUNAS EXPRESIONES PARA LA CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA NO SATURADA.

- Ecuación de Averjanov (Irmay, 1954; Mualem, 1978)

$$K(\theta) = K_{sat} \, S_e^n \qquad \text{(III.1)}$$

- Ecuación de Campbell (Ragab y Cooper, 1990)

$$K(\theta) = K_{sat} \, (\theta / \theta_{sat})^n \qquad \text{(III.2)}$$

- Ecuación de Gardner (Mualem, 1978)

$$K(\psi) = K_{sat} \, \exp (\alpha \psi) \qquad \text{(III.3)}$$

- Ecuación de Van Genuchten (Van Genuchten, 1980):

$$K(\theta) = K_{sat}\, S_e^{l} \left[1 - (1 - S_e^{1/m})^m\right]^2 \qquad \text{(III.4a)}$$

o en función de ψ:

$$K(\psi) = \frac{\left\{ (1 + |\alpha\psi|^n)^m - |\alpha\psi|^{n-1} \right\}^2}{\left\{ 1 + |\alpha\psi|^n \right\}^{m(l+2)}} \qquad \text{(III.4b)}$$

l aproximadamente 0.5

Donde: $S_e = \left[\frac{\theta - \theta_r}{\theta_{sat} - \theta_r}\right]$ y α, n y m son constantes a determinar, función del tipo de suelo y a las mediciones en terreno o laboratorio.

REFERENCIAS:

1.- Abbott M.B., Bathurst J.C., Cunge J.A., O'Connell P.E. y Rasmussen J., 1986. "An introduction to the European Hydrological System, "SHE", 2: Structure of a physically-based, distributed modelling system", J. of Hydrology, 87, pp. 61-77.

2.- Abeliuk R., 1987. "Estimación de los parámetros de un modelo de infiltración para suelos no saturados", VIII Congreso Chileno de Ingeniería Hidráulica, pp. 243-261.

3.- Beven K., y Germann P., 1982, "Macropores and water flow in soils", Water Resources Research, 18(5), 1311-1325.

4- Broadbridge P. y White I., 1988a, "Constant rate infiltration: A versatile nonlinear model, 1, Analytical solution", Water Resources Research, Vol 24, N. 1, pp 145-154.

5.- Broadbridge P. y White I., 1988b, Reply, Water Resources Research, Vol 24, N. 12, pp 2109-2110.

6.- Busscher W.J., 1979. "Simulation of infiltration from a continuous and an intermittent subsurface source", Soil Science, Vol 128, N. 1, pp. 49-55.

7.- Campbell G.S., 1974. "A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data". Soil Science, Vol 117, N. 6, pp. 311-314.

8.- De Jong R. y Cameron D.R., 1978. "Computer simulation model for predicting soil water content profiles", Soil Science, Vol 128, N. 1, pp. 41-48.

9.- Haverkamp R., Vauclin M., Touma J., Wierenga P.J. y Vachaud G., 1977. "A comparison of numerical simulation models for one dimensional infiltration. Soil Sci. Soc. Am. J., Vol. 41, pp. 285-294.

10.- Hills R.G., Porro I., Hudson D.B. y Wierenga P.J., 1989. "Modeling one-dimensional infiltration into very dry soils 1. Model development and evaluation". Water Resources Research, Vol 25, N. 6, pp. 1259-1269.

11.- Hogarth W.L., Sardana V., Watson K.K., Sander G.C., Parlange J.-Y. y Haverkamp R., 1991. "Testing of approximate expressions for soil water status at the surface during indiltration"., Water Resources Research, Vol 27, N.8, pp. 1957-1961.

12.- Irmay S., 1954. "On the hydraulic conductivity of unsaturated soils", Transaction of the American Geophysical Union, Vol 35, N- 3, pp. 463-467.

13.- Kirkland M.R., Hills R.G. y Wierenga P.J., 1992. "Algorithms for solving Richards equation for variably saturated soils", Water resources Research, Vol 28, N. 8, pp. 2049-2058.

14.- Mualem Y.,1978. "Hydraulic conductivity of unsaturated porous media: Generalized macroscopic approach", Water Resources Research, Vol 14, N. 2, pp. 325-334.

15.- Ragab R. y Cooper J.D., 1990., "Obtaining soil hydraulic properties from field, laboratory and predictive methods", Institute of Hydrology, Wallingford, Document Number IH/TR/9003/2.2.

16.- Rubin J., 1968. "Theoretical analysis of two-dimensional, transient flow of water in unsaturated and partly unsaturated soils", Proceedings Soil Science of America, Vol 32, N. 5, pp. 607-615.

17.- Sander G.C., Parlange J.-Y., Kuhnell V., Hogarth W.L., Lockington D. y O'Kane J.P.J., 1988, "Exact nonlinear solutionfor constant flux infiltration", J. Hydrology, 97, pp. 341-346.

18.- Van Genuchten M. Th., 1980. "A closed equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils" Soil Sci. Soc. Am. J. Vol. 44, pp. 892-898.

19.- Vargas X. y Araya C., 1991. "Determinación experimental de curvas de infiltración". X Congreso Nacional de Ingeniería Hidráulica. pp. 449-463.

20.- White I. y Broadbridge P., 1988, "Constant rate infiltration: A versatile nonlinear model, 2, Applications of solutions", Water Resources Research, Vol 24, N. 1 pp. 155-162.

21.- Warrick A.W., Lomen D.O. e Islas A., 1990. "An analytical solution to Richards equation for a draining soil profile", Water resources Research, Vol 26, N. 2, pp. 253-258.