

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

XI CONGRESO CHILENO

**VERIFICACION EXPERIMENTAL DE METODOS
NUMERICOS PARA RESOLVER LAS ECUACIONES DE SAINT-VENANT**

TOMAS GONZALEZ DEL B. (1)

HORACIO MERY M. (2)

RESUMEN

Los fenómenos transitorios en los canales abiertos son de gran importancia en el proyecto de Centrales Hidroeléctricas, Plantas de Bombeo, Canales Matrices de Regadío y canalizaciones de aguas lluvias.

El objetivo del presente trabajo, que es una continuación del presentado a las II^a Jornadas de Hidráulica Prof. Fco. Javier Domínguez, es mostrar el comportamiento de dos modelos de cálculo numérico que resuelven las ecuaciones de Saint-Venant, en relación con medidas experimentales en un canal del Laboratorio de C.R.H. de la Universidad de Chile.

Los métodos MDF-A (de diferencias finitas) y MOC-A (de las características) se mostraron como los más eficientes de una comparación entre 7 procedimientos numéricos desarrollados. Para comparar estos métodos con valores reales, se efectuaron 10 experiencias en el canal, todas ellas actuando sobre el caudal de entrada al canal, ya sean aumentos o disminuciones de caudal. Los valores medidos en estas experiencias dieron un buen ajuste respecto a los obtenidos con los modelos numéricos, siendo el MOC-A, el que presenta el mejor ajuste y un cumplimiento excelente del balance de masas en el canal. En base a los resultados obtenidos se puede concluir que las ecuaciones de Saint-Venant representan muy bien los fenómenos transitorios en canales abiertos, frente a maniobras que involucran variaciones lentas del caudal del canal.

(1) Ingeniero Civil, Profesor Auxiliar, Universidad de Chile.

(2) Ingeniero Civil, Profesor Titular, Depto. de Ing. Civil, Universidad de Chile.
Asesor Dirección de Riego, MOP.

1. INTRODUCCION

En el diseño de obras hidráulicas, frecuentemente aparecen situaciones de flujo transitorio en canalizaciones abiertas. Los canales pueden experimentar severas condiciones de régimen no permanente, las que generan normalmente las variaciones más rápidas y extremas de los niveles y velocidades. Muchas de las fallas como rupturas de revestimientos de hormigón por subpresión, erosión por desbordamiento, etc se producen en estas circunstancias.

El análisis del régimen transitorio en canales abiertos, se remonta a más de 150 años atrás con los trabajos pioneros de Laplace y Lagrange. El tratamiento más avanzado del flujo no permanente en canales, se inicia con el desarrollo de las ecuaciones diferenciales de régimen transitorio gradual, presentadas por Barré de Saint-Venant a la Academia de Ciencias de Francia, en 1871.

A fin de avanzar en el tema de los fenómenos transitorios en canalizaciones abiertas, los suscritos en el Centro de Recursos Hidráulicos de la Universidad de Chile, presentaron al concurso Fondecyt-92 un proyecto titulado: "Modelación numérica del régimen transitorio rápido en Canales. I Parte", el que fue aprobado y actualmente está en el 2° año de su desarrollo.

Adicionalmente, en las II Jornadas de Hidráulica Profesor Francisco Javier Domínguez efectuadas en 1992, se presentó el trabajo titulado "Métodos Numéricos para la Resolución de Fenómenos Transitorios en Canales". En ese trabajo se daba cuenta de un estudio en el cual se comparan diferentes procedimientos de cálculo numérico para un canal de sección única, estudio realizado exclusivamente en forma teórica.

De los siete procedimientos analizados se concluye que el método simple, de diferencias finitas, MDF-A, en combinación con el método de las características en los bordes, resulta ventajoso tanto por la rapidez del proceso numérico como por un aceptable

cumplimiento del balance de masas durante el proceso de cálculo, el que representa cuán bien se están cumpliendo las ecuaciones básicas. Dentro de los procedimientos que usan el método de las características, el procedimiento denominado simple, MOC-A, de interpolación preestablecida para los puntos de apoyo de las secciones intermedias junto con el método de Hartree en los bordes, es el que ofrece el mejor ajuste del balance de masas y un tiempo de proceso adecuado.

Cabe hacer notar que los métodos de las características (MOC) también usan el método de las diferencias finitas aplicándolo a las derivadas totales, a diferencia de los métodos genéricamente llamados de diferencias finitas (MDF) que usan directamente las derivadas parciales.

El objetivo del presente trabajo es mostrar la comparación realizada entre ambos modelos numéricos, el MDF-A y el MOC-A, y los valores registrados en una instalación experimental, sobre una canoa rectangular del laboratorio de hidráulica del CRH de la Universidad de Chile. En ella se efectuaron 10 experiencias de variaciones del caudal en la sección de aguas arriba del canal.

2. LAS ECUACIONES DE SAINT-VENANT Y LOS METODOS DE CÁLCULO NUMERICO MDF-A Y MOC-A

Las ecuaciones de Saint-Venant para el flujo transitorio en canales abiertos se basan en las siguientes hipótesis:

- La superficie libre alterada por las ondas generadas en el canal, es gradualmente variada, lo que equivale a considerar válida la distribución hidrostática de presiones en una vertical.
- La resistencia friccional en el flujo no permanente, cumple las mismas relaciones que las del flujo permanente.
- La distribución de velocidades en una sección transversal del canal, no queda substancialmente afectada por la propagación de las ondas.

- El movimiento de las ondas puede ser considerado bidimensional despreciando eventuales desniveles entre los costados y el centro de la sección.
- La pendiente media del fondo del canal es pequeña, de modo que el "sen α " puede ser reemplazado por la "tg α " y el "cos α " puede ser considerado igual a 1.

El flujo transitorio en un canal queda determinado mediante las dos ecuaciones básicas del fenómeno hidráulico: la ecuación de conservación de masas y la ecuación dinámica (ec. del Momentum). La primera se establece considerando la conservación de la masa entre dos secciones próximas. En el régimen transitorio, el caudal cambia a una tasa " $\partial Q/\partial x$ " a lo largo del canal y la profundidad cambia con el tiempo a una tasa " $\partial h/\partial t$ ". Estableciendo un volumen de control elemental y haciendo el balance entre el caudal entrante, el saliente y la acumulación de masa en dicho volumen, se obtiene:

$$S \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial x} + l \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

siendo: S : área mojada
 v : velocidad media en la sección
 x : distancia según el eje del canal desde un origen.
 l : ancho superficial
 h : profundidad
 i : pendiente
 t : tiempo
 J : pérdida friccional unitaria

Mediante el 2° Principio de la Dinámica, se establece la acción de las fuerzas actuantes y la aceleración de las partículas de una masa elemental del fluido y se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = i - J \quad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales de derivadas parciales no lineales. Estas ecuaciones también pueden adoptar otras formas equivalentes.

2.1 Método de Diferencias Finitas (MDF)

Es un método usual en Ingeniería para resolver múltiples problemas descritos por ecuaciones diferenciales. Se utiliza para resolver el problema de flujo transitorio en una canal, mediante una malla fija de puntos "espacio-tiempo", considerando tramos de canal de longitud suficientemente pequeña " Δx " y tiempos múltiples de un valor suficientemente pequeño " Δt ", considerado elemental. Las derivadas de las ecuaciones (1) y (2) son reemplazadas por cocientes de las diferencias de las variables, según " Δx " y " Δt " (valores dados). Hay 2 variables independientes que son " x " y " t " y 2 variables dependientes que son " h " y " v " (o " Q "). Además de las ecuaciones de Saint-Venant, deben considerarse las condiciones de borde en ambos extremos del canal.

En la Fig.1, el punto P de la malla se determina conociendo las características del flujo en los puntos "A" y "B". Al plantear las ecuaciones (1) y (2) en diferencias finitas es posible explicitar el valor de " h_p " y " v_p ", los que dependerán de h_A , v_A , h_B y v_B , y de los parámetros " Δx " y " Δt " (más precisamente de la velocidad características del cálculo, $c = \Delta x / \Delta t$).

Para que la solución del análisis sea convergente y estable numéricamente, es preciso que el parámetro "c" cumpla la condición de Courant:

$$c \leq 1/2 \quad (3)$$

a = velocidad de propagación de una onda gravitacional elemental.

2.2 Métodos de las Características (MOC)

Este procedimiento ha sido muy utilizado en el análisis de los flujos transitorios. El fundamento del método consiste en transformar el sistema de dos ecuaciones de derivadas parciales en dos ecuaciones de derivadas totales, las que son válidas para observadores que se desplazan en ambos sentidos del flujo, con las velocidades $(v+a)$ y $(v-a)$ de las ondas elementales.

Para el observador que se desplaza en la velocidad $dx/dt=v+a$ se cumple:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dh}{dt} = g(i-J) \quad (4)$$

y para el observador que se mueve contra el flujo a la velocidad $dx/dt=v-a$, se cumple:

$$\frac{dv}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dh}{dt} = g(i-J) \quad (5)$$

En la Fig.2, un observador que parte de la sección "R" del canal, llega a P en el tiempo " Δt " y el otro observador que parte simultáneamente de la sección "S" llega a P también al cabo del tiempo " Δt ". Usando las relaciones (4) y (5), también en diferencias finitas, se obtienen en forma explícita los valores de " h_p " y " v_p " apoyándose en los parámetros del flujo de las secciones "R" y "S" en el tiempo "t". Los parámetros se determinan mediante una interpolación lineal entre los valores de las secciones "A", "B" y "C" y se acepta que las velocidades con que viajan estos observadores son $(v_s - a_s)$ y $(v_r + a_r)$ respectivamente.

3. EXPERIENCIAS EFECTUADAS UN CANAL RECTANGULAR DE LABORATORIO

3.1 Descripción de la instalación experimental

Se utilizó un canal de sección rectangular de 0,49 m de ancho, 0,50 m de alto, 15 m de longitud y pendiente variable de 0 a 7%, el cual permite recircular agua en forma constante. En la Fig.3 se muestra un esquema de la instalación experimental.

Aguas abajo del canal hay una clapeta que permite fijar el nivel de aguas abajo. Aguas arriba existe una válvula cuya operación permite efectuar la variación del flujo. El canal se alimenta a través de un sistema de tuberías desde un estanque elevado de nivel constante del laboratorio, el cual es alimentado mediante una bomba de 110 HP que eleva el agua desde el estanque subterráneo o sentina. Desde el estanque elevado se descarga a la cámara de carga del canal, la que tiene un aquietador que hace que

las líneas del flujo a la entrada de éste sean paralelas, permitiendo así un escurrimiento uniforme.

El caudal de alimentación es controlado en el sistema de tuberías mediante una válvula de compuerta. La determinación del caudal se hace mediante una placa de orificio, ubicada aguas abajo de la válvula y conectada a un tablero piezométrico. Al final del canal existe un sistema que permite verter el caudal y retornarlo nuevamente a la sentina.

Además existe un carro portalimnómetro, el cual puede ser desplazado en el sentido longitudinal y transversal del canal, lo que permite efectuar lecturas en diferentes verticales, tanto de los niveles de la superficie libre como del fondo del canal.

3.2 Determinación de coeficiente de rugosidad del canal

La determinación del coeficiente de rugosidad de Manning del canal, se efectuó peraltando el escurrimiento desde aguas abajo con la clapeta, de manera que la altura medida a lo largo del canal, con el limnómetro, fuese constante para diferentes caudales, pudiéndose aplicar directamente la fórmula de Manning para determinar el coeficiente de rugosidad.

Los valores de las alturas y rugosidades obtenidas con diferentes caudales y dos pendientes distintas (0,05 % y 0,10 %), permitieron determinar para el coeficiente de Manning con un valor de $n=0,0135$. La verificación del valor obtenido se realizó midiendo un eje hidráulico a lo largo del canal. El buen ajuste indicó el correcto valor del coeficiente de rugosidad.

3.3 Metodología experimental para los flujos transitorios

El objetivo de las experiencias fue el observar y medir en un canal real las variaciones de nivel del escurrimiento con maniobras efectuadas en el extremo de aguas arriba del canal y así validar los modelos numéricos desarrollados en un canal de sección única.

Para ello se eligieron dos secciones representativas del canal, ubicándose las aguas arriba a $x=3,2$ m y la de aguas abajo a $x=12,5$ m del inicio del canal. En esas secciones se fijaron reglillas graduadas en "cm". La posición exacta de éstas se hizo manteniendo un nivel constante de agua en el canal, en posición totalmente horizontal ($i=0\%$) y midiendo con el limnómetro la cota de la superficie libre que haría de referencia. Además, en ambas secciones se colocó un cronómetro al pie de cada reglilla y frente a ellas se instaló una cámara fotográfica para el registro instantáneo de niveles en cada sección.

Para efectuar cada experiencia se requirió de la participación de 4 personas; dos personas, una en cada cámara para tomar las series fotográficas, otra junto a la válvula y la cuarta para medir el tiempo de operación de ésta.

El procedimiento utilizado fue el siguiente: las dos personas ubicadas en las cámaras fotográficas tomaban una primera fotografía para régimen permanente inicial ($t=0$) y una vez terminada la operación se daba la partida para la medición del régimen transitorio. Las dos personas activaban los cronómetros y empezaban a tomar fotos en lapsos prefijados, mientras las otras 2 personas realizaban la maniobra de la válvula y determinaban el tiempo de operación de ésta.

Como el canal para efectuar estas experiencias no está diseñado especialmente para este tipo de estudios, las maniobras a realizar son limitadas y es así como se efectuaron aberturas y cierres de la válvula de aguas arriba, en un rango de caudales entre los 35 l/s y los 85 l/s en régimen subcrítico ($i=0,05\%$).

3.4 Pruebas efectuadas

Se realizaron diversas pruebas de variaciones de caudal en el extremo de aguas arriba. Estas fueron aumentos y disminuciones del caudal. A continuación se indica el caudal inicial " Q_i ", el caudal final " Q_f " y el tiempo que demoró la maniobra de la válvula " T_m ".

P1 Prueba N°1 $Q_1=67$ l/s $Q_2=0$ l/s $T_m= 8.03$ s (Fig. 4)
P2 Prueba N°2 $Q_1=61$ l/s $Q_2=0$ l/s $T_m= 5.72$ s (Fig. 5)
P3 Prueba N°3 $Q_1=82$ l/s $Q_2=0$ l/s $T_m= 8.95$ s (Fig. 6)
P4 Prueba N°4 $Q_1=34$ l/s $Q_2=67$ l/s $T_m=24.75$ s (Fig. 7)
P5 Prueba N°5 $Q_1=79$ l/s $Q_2=47$ l/s $T_m=11.36$ s (Fig. 8)
P6 Prueba N°6 $Q_1=79$ l/s $Q_2=45$ l/s $T_m= 6.63$ s (Fig. 9)
P7 Prueba N°7 $Q_1=67$ l/s $Q_2=30$ l/s $T_m=10.57$ s (Fig.10)
P8 Prueba N°8 $Q_1=80$ l/s $Q_2=40$ l/s $T_m= 7.99$ s (Fig.11)
P9 Prueba N°9 $Q_1=30$ l/s $Q_2=52$ l/s $T_m= 8.39$ s (Fig.12)
P10 Prueba N°10 $Q_1=52$ l/s $Q_2=80$ l/s $T_m= 8.40$ s (Fig.13)

4. RESULTADOS OBTENIDOS

Con las condiciones de borde definidas en ambos extremos del canal, las experiencias realizadas se procesaron con los dos procedimientos numéricos antes mencionados. Estos son el método simple de Diferencias Finitas, MDF-A, y el método simple de las Características, MOC-A. Ambos métodos se procesaron, tomando nota del balance volumétrico entregado por el proceso computacional. Los valores de aquellos balances se presentan en la siguiente tabla.

	BALANCE (%)			BALANCE (%)	
	MDF-A	MOC-A		MDF-A	MOC-A
P1	12.86	3.55	P6	13.42	3.12
P2	13.01	3.59	P7	12.94	3.44
P3	12.48	3.53	P8	12.97	3.35
P4	11.80	4.46	P9	13.13	4.26
P5	15.09	2.68	P10	9.15	4.65

Con referencia a la tabla anterior, se aprecia que los balances volumétricos obtenidos mediante el procedimiento numérico simple de la Características MOC-A, son evidentemente mejores que los obtenidos mediante el de Diferencias Finitas MDF-A.

En los gráficos obtenidos de estas experiencias se puede realizar una comparación entre los dos procedimientos numéricos procesados y los datos experimentales. Estos representan aumentos y disminuciones de caudal en el extremo de aguas arriba, mediante maniobras en la válvula.

En todos los gráficos confeccionados se puede apreciar el buen ajuste entre los valores medidos en el canal experimental del laboratorio y los obtenidos teóricamente por ambos modelos.

Comparando ambos métodos, se puede concluir que el método Simple de las Características, MOC-A, es el que da el mejor ajuste en los gráficos, notando que el método Simple de Diferencias Finitas, MDF-A, en algunos casos se aleja de las curvas observadas como se aprecia de las figuras 4 a 13.

5. CONCLUSIONES

La comparación de los valores calculados, usando ambos procedimientos de cálculo numérico (MDF-A y MOC-A), con los medidos en el canal del Laboratorio de CRH, muestran un buen ajuste. Las ecuaciones de Saint Venant describen muy bien los fenómenos transitorios relativamente lentos en canales abiertos.

De los dos métodos de cálculo utilizados para procesar estas 10 pruebas, efectuadas en la canoa del Laboratorio, puede concluirse que el ajuste mejor se obtiene con el método simple de las características (MOC-A) como puede apreciarse de las Fig.4 a 13. Además, el método MOC-A se caracteriza por la rapidez del proceso de cálculo numérico y un aceptable cumplimiento del balance de masas.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Chaudhry, M.H., "Applied Hydraulic Transients". Second Edition.
- Mahmood, K., and Yevjevich, V., "Unsteady Flow in Open Channel". VOL I.
- Martin, C.S., and DeFazio, F.G., "Open-Channel Surge Simulation by Digital computer". Journ. of the Hydr. Div., Vol 95, N°6, NOV 1969.
- Mery, H., Matthey, G., y González, T., "Métodos Numéricos para la Resolución de Fenómenos Transitorios en Canales". Segundas Jornadas de Hidráulica Francisco Javier Domínguez. NOV 1992.
- Wylie, E.B., and Streeter, V.L., "Fluid Transient". Corrected Edition 1983.

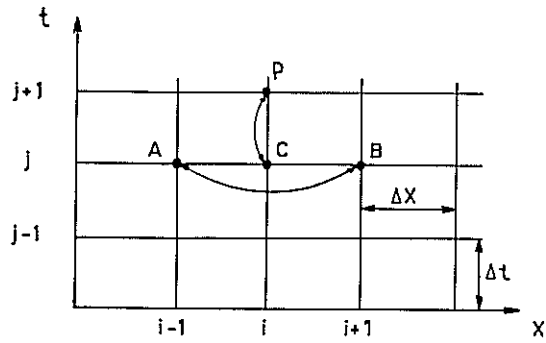


FIG.1 ESQUEMA MDF.

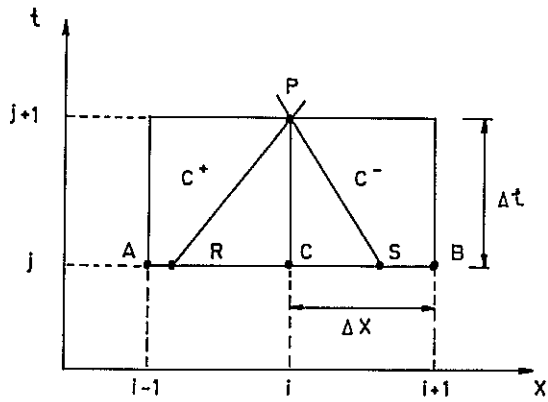
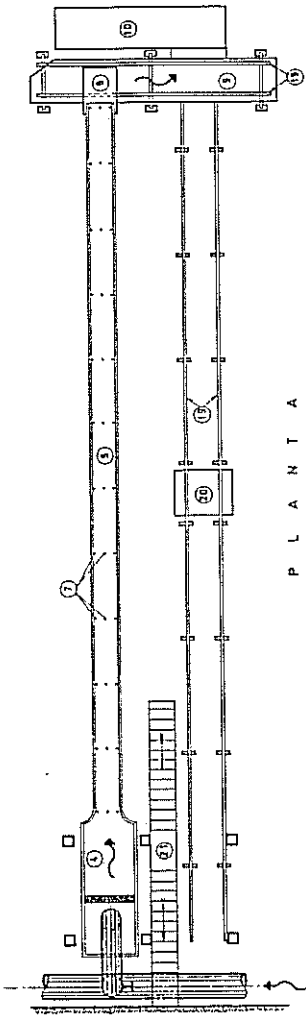


FIG.2 ESQUEMA MOC.

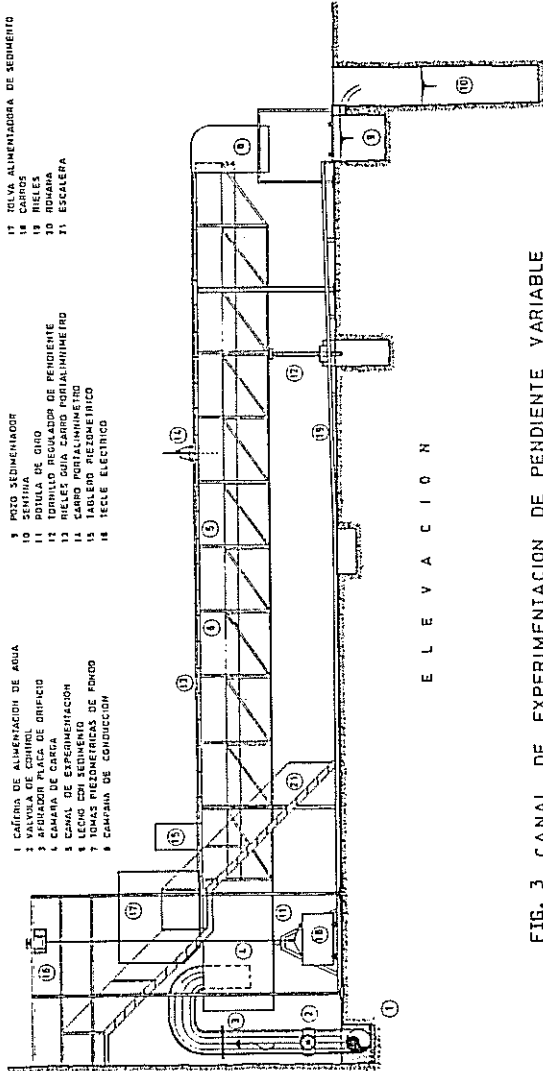


P L A N T A

- 17 TOLVA ALIMENTADORA DE SEDIMENTO
- 18 CARGOS
- 19 ESCALERA
- 20 BARRERA
- 21 ESCALERA

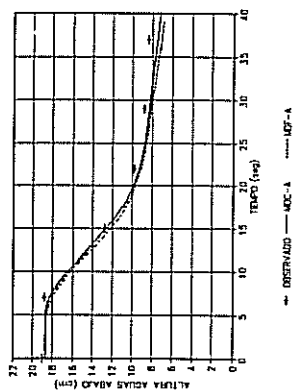
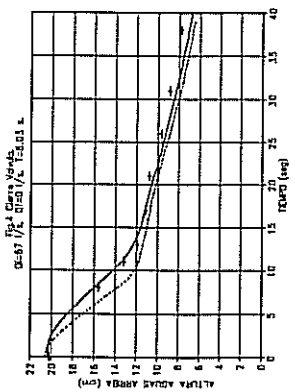
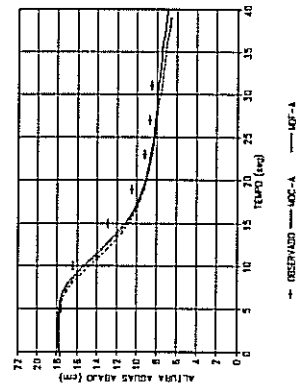
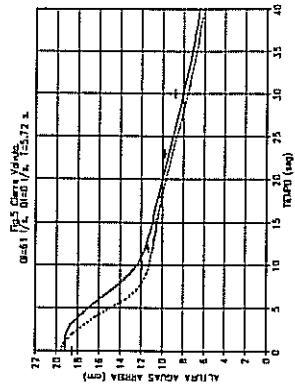
- 9 POZO SEDIMENTADOR
- 10 SEDIMENTA
- 11 BARRERA DE ORO
- 12 BARRERA DE PENDIENTE
- 13 REJES AGUA CARGO PORALUMINUMERO
- 14 CARGO PORALUMINUMERO
- 15 TABLERO PIEZOMETRICO
- 16 TEGLE ELECTRICO

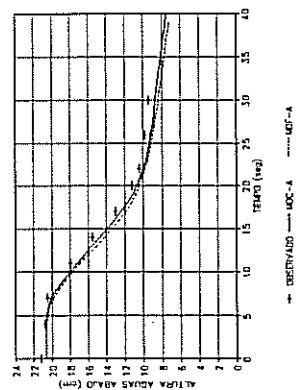
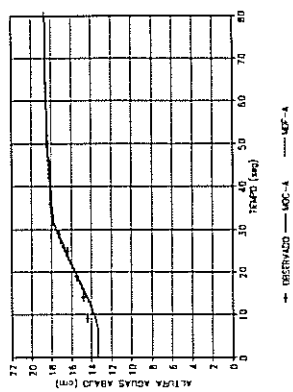
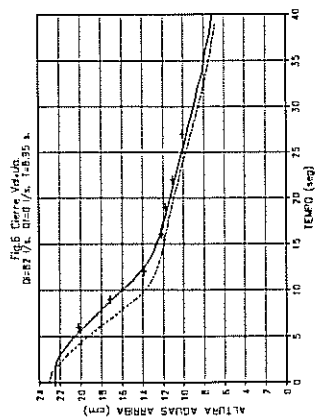
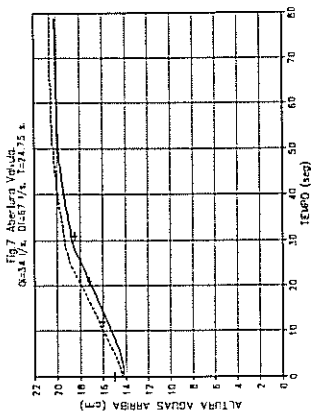
- 1 CÁMERA DE ALIMENTACION DE AGUA
- 2 VALVULA DE CONTROL
- 3 AFUADOR PLACA DE ORIFICIO
- 4 CÁMARA DE CARGA
- 5 CÁMARA DE CARGA
- 6 LECHOS CON SEDIMENTO
- 7 TOMAS PIEZOMETRICAS DE FONDO
- 8 CAMPANA DE CONDUCCION

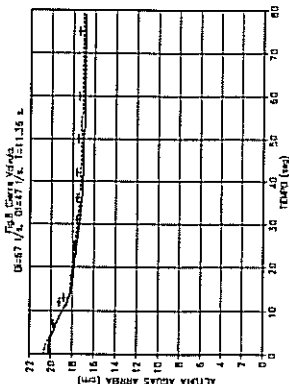


E L E V A C I O N

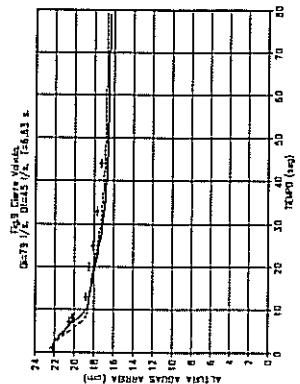
FIG. 3 CANAL DE EXPERIMENTACION DE PENDIENTE VARIABLE



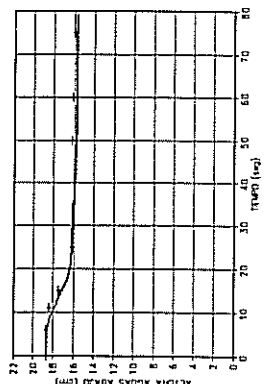




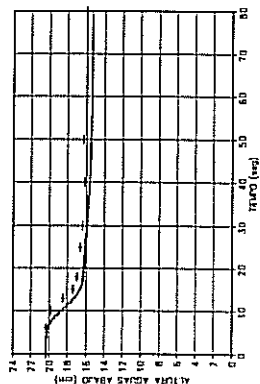
→ OBSERVADO — 40C-1 - - - - - 40C-1



→ OBSERVADO — 40C-2 - - - - - 40C-2



→ OBSERVADO — 40F-1 - - - - - 40F-1



→ OBSERVADO — 40F-2 - - - - - 40F-2

