

FUNDAMENTOS MECANICOS DE LA INICIACION DEL MOVIMIENTO DE  
PARTICULAS ESFERICAS SIMULANDO GRANULOMETRIA GRUESA Y EXTENDIDA  
EN LECHOS NATURALES O ARTIFICIALES

SOLANO VEGA VISCHI\*

RESUMEN

Se presentan las bases mecánicas puras, en contraposición a criterios exclusivamente experimentales, para la determinación de la iniciación potencial del movimiento. Esto equivale a plantear condiciones de equilibrio límite.

Se puede apreciar, que para partículas esféricas iguales colocadas en una sola capa, estas sobresalen del nivel de estagnamiento una altura de medio diámetro. Las diferencias de velocidades entre base de la semiesfera, y el coronamiento de ésta, generan una diferencia de presión cuya resultante es contraria a la del peso sumergido de la partícula.

El estudio de la rotación potencial sobre las esferas vecinas, determina un tamaño crítico " $d_c$ " en función de las características hidráulicas del escurrimiento R y J, tal que  $d_c = 8.65RJ$ , del mismo orden que el obtenido experimentalmente por Shields ( $d_c = 10RJ$ , VEGA 1973).

Para partícula esférica colocada sobre capa base de esferas del mismo diámetro, se obtiene un tamaño crítico  $d_c = 15.98RJ$ , correspondiente a un 0,54 de la fuerza tractiva necesaria para mover un elemento de la capa base. Este resultado es muy semejante al dado por Isbash de 0,51 (ICOLD 1936), obtenido en experiencias de laboratorio y mediciones en prototipo. Las diferencias entre los valores teóricos aquí presentados y los experimentales, se deben a que los primeros consideran esferas, y los segundos, partículas naturales que no poseen esa forma.

Para esferas menores que las de la base, colocadas sobre ésta, las fuerzas tractivas que inician movimiento potencial, aumentan proporcionalmente con respecto a la de la esfera de igual tamaño. Esto indica un mayor grado de "anidamiento", y la consiguiente protección ofrecida por las esferas de base. Habrá un tamaño crítico, determinado en cada caso, que limita el mecanismo explicado, y la protección que otorgan los tamaños mayores.

\* Ing. Civil U. de Ch. SOLANO VEGA Y ASOCS. INGENIEROS CONSULTORES.

I.- INICIACION DEL MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA ESFERICA COLOCADA EN UNA CAPA SIMPLE UNIFORME.

En Fig. 1, se muestra la posición de una capa simple, con la curva de distribución de velocidades en función a la altura desde el nivel de estagnamiento ( $U=0$ ).

Se calcularán las fuerzas que actúan sobre una partícula esférica, designada como partícula 1 (achurada), considerando que el Bernoulli es constante en la sección de interés.

Al existir una velocidad media  $U_y$  en el hemisferio superior, se tendrá para  $y = d/4$  una velocidad que se expresará de acuerdo a la distribución logarítmica de von Karman, con las constantes de Keulegan para lecho áspero. (EINSTEIN 1950)

$$U_y = 5,75 \log(30,2 y/k_g) U^* \quad (1) \quad k_g = \text{rugosidad} = d/2$$

para  $y = d/2$ ,  $k_g = d/2$ , se tiene:  $U^* = \sqrt{gRJ}$

$$U_y = 5,75 \log(30,2) U^* = 8,51 U^* \quad (2) \quad R = \text{radio hidr.}$$

$$J = \text{pendiente del plano de carga.}$$

La velocidad media en el hemisferio superior de partícula 1 será  $U_y' = U_y/2 = 4,255 U^*$ . Este aumento de velocidad entre base de semiesfera y su coronamiento, por constancia del B, implica una disminución de presión  $-\Delta p$  tal que:

$$-\Delta p = \gamma_a U^2 / 2g = \gamma_a (4,255 U^*)^2 / 2g = \gamma_a 0,923 U^{*2} \quad (3)$$

en  $\gamma_a = \text{peso especif. agua} = 1 \text{ ton/m}^3$

Como consecuencia de esta disminución de presión, se tendrá una fuerza vertical  $F_L$  que trata de levantar la partícula:

$$F_L = \pi d^2 \Delta p / 4 = 0,725 \gamma_a d^2 U^{*2} \quad (4)$$

Por otro lado, la esfera 1 está sometida a una fuerza de arrastre  $F_D$  y al peso propio sumergido  $F_S$ , en que:

$$F_D = [0,5 C_D \pi d^2 / 4] [\gamma_a / g] [U_y'^2 / 2] = 0,0725 d^2 U^{*2} \quad (5)$$

Figura 1

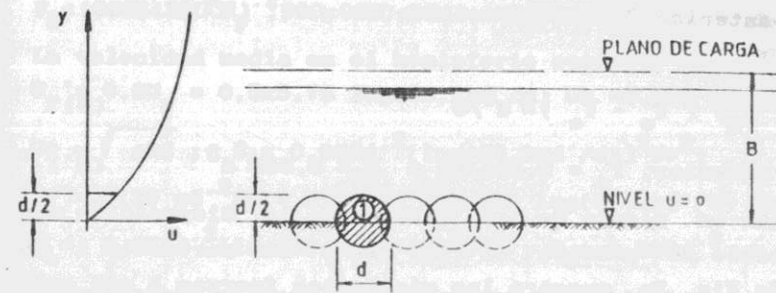


Fig 2a  
PLANTA

Fig 2b

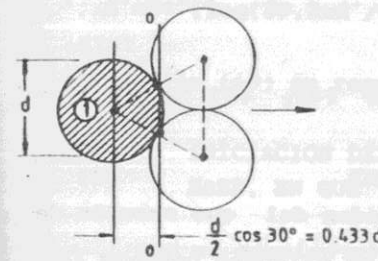


Fig 3a  
PLANTA

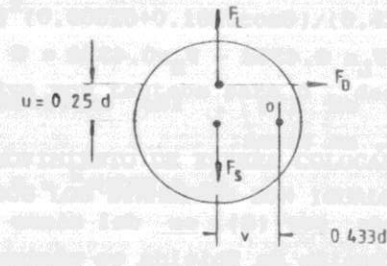


Fig 3b  
SECCION 1-1

Fig 3c  
ELEVACION ESFERA d'

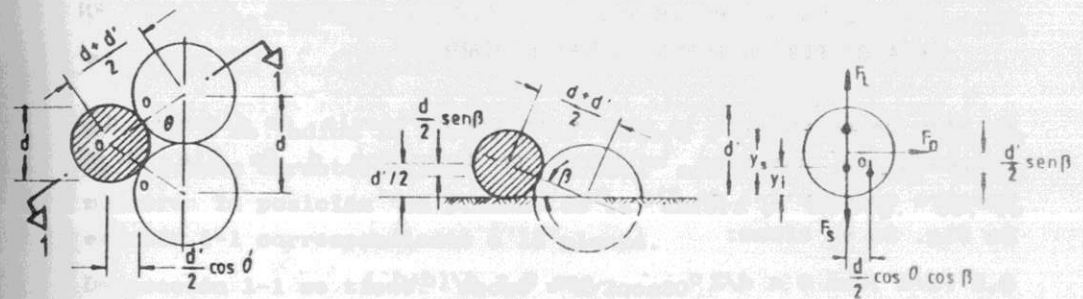
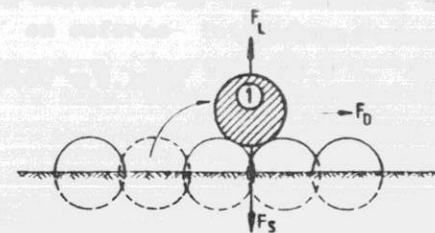
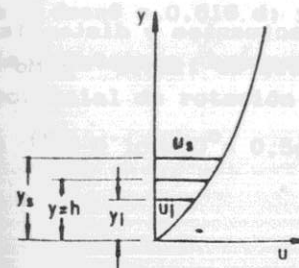


Fig. 4





En expresión anterior  $C_D = 0,20$  para  $R > 300.000$ ; (ROUSE, 1950) y  $U_y' = 4,255U^*$ .

$$F_S = (Y_B - Y_A) \pi d^3 / 6 \quad (6)$$

En expresión anterior,  $Y_B = 2,66t/m^3$  y  $F_S = 0,869 d^3$  (6')

La distribución en planta de las esferas en la disposición más compacta posible se muestra en Fig. 2a. La partícula 1 en Sección 1-1 de Fig. 2a, muestra las siguientes fuerzas a que esta sometida, y su eje de rotación O-O, como se indica en Fig. 2b. La situación de equilibrio límite en Fig. 2b es  $\Sigma Mo = 0$ :

$$F_D \times 0,25d + F_L \times 0,433d - F_S \times 0,433d = 0 \quad (7)$$

Reemplazando en (7), las expresiones (4), (5) y (6') y despejando d, se tiene:

$$d = 0,882U^{*2} = 8,65RJ \quad (8)$$

El valor dado por (8), es del mismo orden del que resulta de aplicar la función de Shields en régimen turbulento en que  $d = 10RJ$  (VEGA 1973), con lo que el modelo físico propuesto recibe confirmación experimental.

## II.- INICIACION DEL MOVIMIENTO DE PARTICULA ESFERICA COLOCADA EN CAPA SIMPLE UNIFORME DE MAYOR DIAMETRO.

En Fig. 3a se muestra la planta de una partícula de diametro  $d'$ , colocada en una capa uniforme de diámetros d. En Fig. 3b se muestra sección 1-1 de Fig. 3a.

De Fig. 3a se tiene:

$$0,5 (d+d') \text{sen } \theta = d/2 \quad \therefore \text{sen } \theta = d/(d+d')$$

La esfera  $d'$  tiene como distancia horizontal u al eje O-O de rotación:  $u = 0,5d' \cos \theta$ ;

De Fig. 3c se tiene esfera  $d'$  con fuerzas actuantes y distancias a eje de rotación O-O. La situación de equilibrio límite  $\Sigma Mo = 0$ , se puede escribir:

$$F_D \times 0,25d' + 0,5d' \cos \theta (F_L - F_S) = 0 \quad (9)$$

$$F_D = 0,004 d'^2 U_y'^2; \quad y = 0,5 d'; \quad U_y' = 5,75 \log(30,2xd'/d) U^* ;$$

La velocidad media en el hemisferio superior de esfera  $d'$  será  $U_y' = 0,5U_y = 0,5 \times 5,75 \log(30,2xd'/d) U^* = 2,875 \log(30,2xd'/d) U^*$

$$U^* = \sqrt{gRJ}; \quad F_D = 0,033d'^2 [\log(30,2xd'/d)]^2 U^{*2};$$

$$F_L = 0,25 \pi d'^2 \Delta p = 0,25 \pi d'^2 [2,875 \log(30,2xd'/d) U^*]^2 / 2g$$

$$F_L = 0,331d'^2 [\log(30,2xd'/d)]^2 U^{*2}; \quad F_S = 0,869d'^3$$

Reemplazando valores anteriores en (9), se tiene:

$$U^{*2} [\log(30,2d'/d)]^2 (0,00825 + 0,1655 \cos \theta) = 0,4345 \cos \theta d'$$

$$\therefore d' = U^{*2} [\log(30,2xd'/d)]^2 (0,00825 + 0,1655 \cos \theta) / (0,4345 \cos \theta) \quad (10)$$

La ecuación (10) se resuelve por tanteos para  $d'$ , dados d y  $U^*$ .

## III.- INICIACION DEL MOVIMIENTO DE ESFERA COLOCADA SOBRE CAPA BASE, EN QUE TODOS LOS DIAMETROS SON IGUALES.

Del proceso descrito en Sección I, resulta que por condiciones de escurrimiento una partícula de diametro  $d$ , quede colocada sobre la capa base que tiene los mismos diámetros. Se escribirán las condiciones de equilibrio límite para el movimiento potencial por rotación de esfera sobre las esferas de la base que la soportan.

En Fig 4 se indica la posición de esfera 1 y la distribución de velocidades características que actúan sobre ella. En Fig 5a se muestra la posición en planta de la esfera y en Fig. 5b, la sección 1-1 correspondiente a la planta.

$$\text{De sección 1-1 se tiene: } d \cos \theta = d/2 \cos 30^\circ$$

$$\therefore \cos \theta = 1/2 \cos 30^\circ = 0,577; \quad \theta = 54,73^\circ$$

$$h = d \text{sen } \theta = 0,816 d; \quad y_g = h + d/4 = 1,066d; \quad y_1 = h - d/4 = 0,566d$$

La distancia horizontal u entre centro de esfera 1 y eje potencial de rotación O'-O' en esferas inferiores es:

$$u = (O-O') \cos 60^\circ = 0,5d \cos \theta \cos 60^\circ = 0,144d$$

Fig 5a  
PLANTA

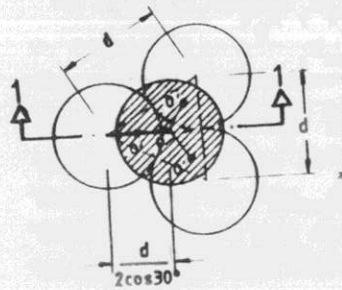


Fig 5b  
SECCION 1-1

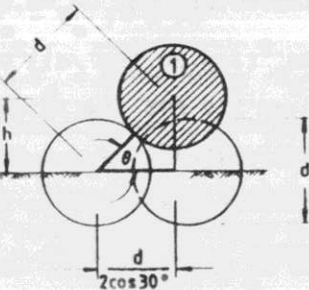


Fig 5c

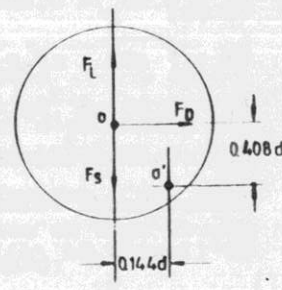
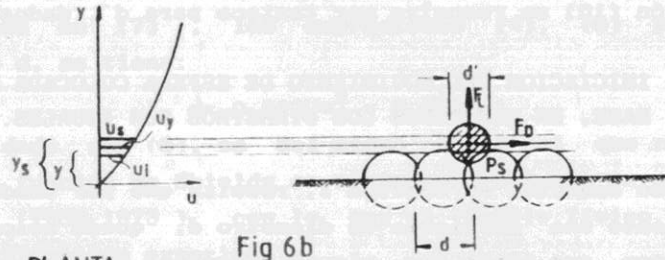


Fig 6a



PLANTA

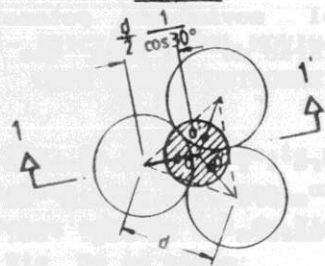


Fig 6d

SECCION 1-1'

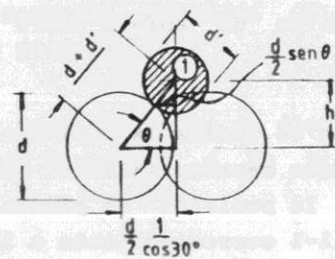
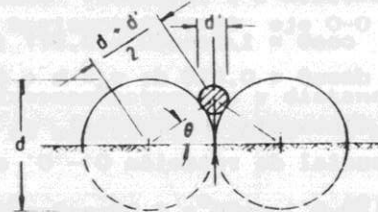
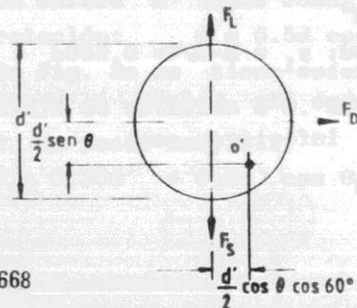


Fig 7



La distancia vertical  $v$  entre centro esfera 1 y eje potencial de rotación:

$$v = 0,5d \text{sen} \theta = 0,408d$$

En Fig. 5c se muestra esfera 1 con las fuerzas actuantes y puntos  $O'$  de eje de rotación potencial:  $\Sigma M_{O'} = 0$

$$F_D \times 0,408d + (F_L - F_S)0,144d = 0 \quad (11)$$

$$F_D = [0,2 \pi d^2 / 4] [\gamma_a / g] U_y^2 / 2 \quad (12)$$

$$U_y = 5,75 \log(30,2 \times 0,816d / 0,5d) U^* = 9,733 U^* \quad (13)$$

$$\therefore F_D = 0,759 d^2 U^{*2} \quad (12')$$

$$F_L = (\gamma_a \pi d^2 / 4) (U_s - U_l)^2 / 2g \quad (14)$$

$$U_s = 5,75 \log(30,2 \times 1,086d / 0,5d) U^* = 10,40 U^* \quad (15)$$

$$U_l = 5,75 \log(30,2 \times 0,566d / 0,5d) U^* = 8,82 U^* \quad (16)$$

$$\therefore F_L = 0,100 d^2 U^{*2} \quad (14'); \quad F_S = 0,869 d^3 \quad (17)$$

Reemplazando los valores precedentes en ec. (11), se tiene:

$$0,408d \times 0,759 (d U^*)^2 + [0,100 (d U^*)^2 - 0,869 d^3] \times 0,144d = 0$$

$$\therefore d = 2,59 U^{*2} = 25,37 R_J \quad (18)$$

Deberá compararse el estado límite de equilibrio  $\Sigma M_o$  para partícula esférica, con la real no esférica, en que la situación de equilibrio ahora será la correspondiente a fuerza de arrastre igual a fricción sobre capa base. Esto corresponde a  $\Sigma F_H = 0$ .

$$F_D = (F_S - F_L) \text{tang} \phi$$

Se adopta  $\phi = 30^\circ$ , y  $\text{tang} \phi = 0,577$ :

$$F_D = 0,577 (F_S - F_L)$$

$$0,759 d^2 U^{*2} = 0,577 (0,869 d^3 - 0,100 d^2 U^{*2})$$

$$\therefore d = 1,63 U^{*2} = 15,98 R_J \quad (18')$$

La ecuación (18') indica que para una esfera colocada sobre una capa base del mismo diámetro, el alcanzar el estado de movimiento potencial requiere aproximadamente 0,54 veces la fuerza tractiva que para mover una esfera de la base. Este valor está en el orden



de lo experimentado en laboratorio y prototipo por S.V. Isbash (ICOLD 1936), con un valor de 0,51.

IV.- INICIACION DEL MOVIMIENTO DE UNA ESFERA DE DIAMETRO MENOR QUE LA CAPA BASE, COLOCADA SOBRE ESTA.

En Figs. 6a, 6b, 6c, y 6d se muestran las disposiciones generales y secciones típicas correspondientes a este caso.

De Fig. 6c, por definición se tiene:

$$\cos\theta = [d/2\cos 30^\circ]/[0,5(d+d')] = d/(d+d')\cos 30^\circ;$$

$$y = h = 0,5(d+d')\text{sen}\theta$$

$$F_D = [0,2 \pi d'^2/4][Y_a/g]U_y^2/2 \quad (19)$$

$$U_y = 5,75 \log(30,2h/0,5d)U^*$$

$$F_L = [Y_a \pi d'^2/4][(U_g - U_1)^2/2g] \quad (20)$$

$$U_g = 5,75 \log(30,2y_g/0,5d)U^* ; \text{ en que } y_g = h + d/4$$

$$U_1 = 5,75 \log(30,2y_1/0,5d)U^* \quad y_1 = h - d/4$$

Reemplazando los valores de  $y_g$  e  $y_1$ , se tiene:

$$U_g = 5,75 \log(30,2[0,5(d+d')\text{sen}\theta + d'/4]/0,5d)U^* \quad (21a)$$

$$U_1 = 5,75 \log(30,2[0,5(d+d')\text{sen}\theta - d'/4]/0,5d)U^* \quad (21b)$$

Las ecs. (21a) y (21b) se reemplazan en ec (20) para obtener  $F_L$ . Las distancias horizontales y verticales  $u$  y  $v$  al eje potencial de rotación de esfera  $d'$  sobre esfera base son, de Fig. 6b y 6c:

$$u = (0-0')\cos 60^\circ = 0,5d'\cos\theta\cos 60^\circ; \quad v = 0,5d'\text{sen}\theta$$

La esfera  $d'$  queda sometida a las fuerzas y distancias de apoyo que se indican en Fig. 6d, en que  $\Sigma M_o' = 0$ . De Fig. 6d:

$$F_D \times 0,5d'\text{sen}\theta + (F_L - F_S) \times 0,5d'\cos\theta\cos 60^\circ = 0 \quad (22)$$

Los valores de  $F_D$  y  $F_L$  se obtienen de ecs. (19) y (20), y

$F_S = 0,869d'^3$ . De ec. (22) se obtiene  $d' = KU^*^2$ . Con las ecuaciones precedentes se resolverán los casos para esferas con diámetros  $d' = 0,8d$  y  $0,5d$ .

Caso  $d' = 0,8d$

$$\cos\theta = 1/1,8 \times 0,866 = 0,6415 \quad \therefore \theta = 50,1^\circ; \quad \text{sen}\theta = 0,767 ;$$

$$y = h = 0,9d\text{sen}\theta = 0,690d ; \quad U_y = 9,316U^* ; \quad F_D = 0,696(d'U^*)^2 ;$$

$$U_g = 9,950U^* ; \quad U_1 = 8,460U^* ; \quad F_L = 0,089(d'U^*)^2 ; \quad F_S = 0,869d'^3$$

Reemplazando los valores precedentes en ec (22):

$$0,3835d' \times 0,696(d'U^*)^2 + [0,089(d'U^*)^2 - 0,869d'^3] \times 0,160d' = 0$$

$$\therefore d' = 1,757U^*^2 = 17,22RJ \quad (23)$$

Se comparará este valor con el obtenido de  $\Sigma F_H = 0$  :

$$F_D = 0,577(F_S - F_L)$$

$$0,696(d'U^*)^2 = 0,577 [0,869 d'^3 - 0,089(d'U^*)^2]$$

$$\therefore d' = 1,49 U^*^2 = 14,61 RJ \quad (23')$$

La ec. (23') indica que para una esfera  $d' = 0,8d$ , colocada sobre capa base de esferas de diámetro  $d$ , requiere un 0,91 de la fuerza tractiva necesaria para iniciar movimiento de una esfera del tamaño de las de la capa base.

Caso  $d' = 0,5 d$

$$\cos\theta = 1/1,5 \times 0,866 = 0,7698 ; \quad \therefore \theta = 39,66^\circ; \quad y = h = 0,48d ;$$

$$U_y = 8,40U^* ; \quad F_D = 0,566(d'U^*)^2 ; \quad U_g = 8,980U^* ; \quad U_1 = 7,645U^* ;$$

$$F_L = 0,071(d'U^*)^2 ; \quad F_S = 0,869d'^3. \text{ Reemplazando valores en}$$

ec. (22) se tiene:

$$0,319d' \times 0,566(d'U^*)^2 + [0,071(d'U^*)^2 - 0,869d'^3] \times 0,1925d' = 0$$

$$\therefore d' = 11,38RJ \quad (24)$$

Se comparará este valor con  $\Sigma F_H = 0$  :

$$F_D = 0,577(F_S - F_L)$$

$$0,566(d'U^*)^2 = 0,577 [0,869 d'^3 - 0,071(d'U^*)^2]$$

$$\therefore d' = 1,21 U^*^2 = 11,86 RJ \quad (24')$$

El valor menor de  $d'$  dado por (24) será el adoptado.

La ec.(24) indica que para una esfera  $d' = 0,5d$  colocada sobre capa de esferas de diámetro  $d$ , requiere de un 0,71 de la fuerza

tractiva necesaria para iniciar movimiento de una esfera de la capa base.

El menor diámetro de una esfera  $d'$  apoyada en el plano de velocidad cero, y tangente a tres esferas base de diámetro  $d$ , es  $d' = 0,167d$ . Para este diámetro y menores, la transformación de velocidad en presión es máxima y hay tendencia a flotación de la esfera menor. Quedará finalmente en una posición de equilibrio límite tocando a una cierta altura las dos esferas de aguas abajo, y sometida al empuje  $F_D$ .

Se trasladará algo más arriba, venciendo la fricción, y hasta una altura "y" sobre el fondo (Fig.7) tal que se verifique:

$$F_D = (F_S - F_L) \tan \phi \quad (25) \quad \tan \phi = \text{coef. fricción esferas}$$

Si a esa altura "y" se alcanza el punto de paso entre dos semiesferas, el movimiento se habrá iniciado. La altura "y" que debe remontar la esfera  $d'$  para alcanzar el punto de paso cumple con la condición obtenida de Fig. 7 :

$$0,5(d + d') \text{sen} \theta = y ; \text{ además, } 0,5(d + d') \text{cos} \theta = 0,5 d$$

$$\therefore \text{cos} \theta = d / (d + d')$$

Para el punto "y" se tiene:

$$F_L = 0,04d'^2(U_B - U_1)^2; \quad F_D = 0,008(d'U)^2; \quad F_S = 0,896d'^3$$

$$U_y = 5,75 \log[30,2 \times 0,5(d + d') \text{sen} \theta / d] U^*$$

$$y_B = [(d + d') \text{sen} \theta + d'/2] / d$$

$$y_1 = [(d + d') \text{sen} \theta - d'/2] / d$$

$$U_B = 5,75 \log\{30,2[(d + d') \text{sen} \theta + 0,5d'] / d\} U^* \quad (26a)$$

$$U_1 = 5,75 \log\{30,2[(d + d') \text{sen} \theta - 0,5d'] / d\} U^* \quad (26b)$$

Escribiendo la ec. (22) con los valores precedentes, con  $\theta = 30^\circ$  ( $\tan \theta = 0,577$ ) se tiene:

$$0,008d'^2 \{5,75 \log[30,2(d + d') \text{sen} \theta / d]\}^2 U^{*2} = \dots \dots \dots (27)$$

$$0,577[0,896d'^3 - 0,04d'^2(U_B - U_1)^2]$$

$$U^{*2} \{0,2645 [\log(30,2(d+d') \text{sen} \theta / d)]^2 +$$

$$\left[ \log \left( \frac{(d+d') \text{sen} \theta + d'/2}{(d+d') \text{sen} \theta - d'/2} \right) \right]^2 \} = 0,501d' \quad (27)$$

La ec. (27) se resuelve por tanteo en  $d'$ , dados  $d$ , y  $U^*$ .

Para ciertas condiciones hidráulicas el  $d'$  obtenido de ec. 27 será el mínimo que vá parte en suspensión y parte en arrastre.

Los tamaños menores que ese  $d'$  pueden moverse en las mismas condiciones o en suspensión total.

#### REFERENCIAS

Vega V. Solano(1973) "Modelo Teórico de Socavación General y Local en Lechos Granulares Gruesos" II Congreso Nac. de Hidráulica.

Isbash S.V. (1936) "Construction of Dams by Depositing Rock in Running Water". ICOLD 1936

Einstein H.A.(1950) "The Bed Load Function in Sediment Transport"

Rouse H. (1950) "Engineering Hydraulics"

Los valores de la velocidad crítica deben ser calculados a partir de los factores  $K_1$  y  $K_2$ . La literatura no está de acuerdo en cuanto a la forma de  $K_1$  y  $K_2$ . En este trabajo se propone una forma para  $K_1$  que se arrastra sobre una capa base, valor que se debe usar en este trabajo. El segundo factor  $K_2$ , que debe ser determinado experimentalmente, es función de varias variables como la densidad del transporte, rango de variación de las aplicaciones, factor de forma, etc.

En este trabajo, se ha sugerido un valor  $K_2$  con el que se calculó el arrastre para un caso ya analizado con las fórmulas (VEGA, 1970) y se puede apreciar que los resultados obtenidos son comparables a otras fórmulas clásicas y a los resultados experimentales, talés como las de Meyer-Peter.