

MODELACION MATEMATICA DE UN ACUIFERO COSTERO A SUPERFICIE LIBRE A PARTIR DE DATOS EXPERIMENTALES DEL HELE SHAW

RAUL GALINDO U (1)

LUDWIG STOWHAS B (1)

ALEJANDRO LAOS (2)

RESUMEN

A partir de los antecedentes de laboratorio obtenidos de un acuífero costero libre pseudo real en un equipo Hele Shaw, se intenta su comparación con resultados de una modelación matemática computacional. El modelo, se desarrolla a partir de las ecuaciones hidrodinámicas del sistema bajo hipótesis clásicas y la de existencia de interfase abrupta entre dos líquidos no mezclables.

El modelo computacional se basa en el método de las diferencias finitas y se aplica a la reproducción de situaciones de equilibrio y no equilibrio del acuífero para diferentes condiciones de borde, recarga y bombeo. Se analiza la calidad de los resultados y se introducen algunas correcciones a la modelación matemática para mejorar su compatibilidad con el Hele Shaw.

(1) Ingeniero Civil . Profesor Titular Depto. Obras Civiles Facultad de Ingeniería UTFSM

(2) Egresado Ingeniería Civil UTFSM

1. INTRODUCCION.

La modelación matemática de los acuíferos costeros constituyen en la actualidad un requerimiento imprescindible para el estudio y virtual planificación del uso óptimo de este tipo de sistemas hídricos. Ellos constituyen para diversos lugares la alternativa más económica de fuente de abasto de agua potable o de regadío, pero se encuentran casi siempre sometidos al riesgo de deterioro por intrusión salina, según las condiciones de recarga y explotación que se de ellos se haga.

Lo anterior se llevará a cabo a partir de los antecedentes de un trabajo experimental desarrollado bajo el patrocinio de Conicyt (proyecto Fondecyt 90-0118) y cuyos resultados han sido presentados a este mismo Congreso en un trabajo paralelo (Galindo et al) (1). Se pretende así estudiar la modelación matemática del acuífero libre "pseudo real" experimentado en el Hele Shaw. El trabajo conjunto se orienta a la reproducción de las condiciones de equilibrio y no equilibrio del acuífero modelado en el Hele Shaw, para diferentes condiciones de borde y de recarga - bombeo con el fin de apreciar su compatibilidad, discutir la calidad de los resultados y su posterior extrapolabilidad a condiciones reales.

2. EL MODELO MATEMATICO.

El modelo matemático propuesto para reproducir el movimiento del agua dulce y salada con una interfase contiene las siguientes hipótesis (Bear et al (2)), (Pinder et al (3)), (Sa da Costa et al (4)):

- El agua dulce y salada son fluidos inmiscibles.
- La Ley de Darcy es válida.
- Propiedades de los fluidos constantes en el tiempo.
- El coeficiente de almacenamiento y la conductividad hidráulica son uniformes en la dirección vertical
- Se acepta la aproximación de Dupuit.

Basado en estas hipótesis el sistema queda representado matemáticamente para un sistema x-y con dos capas separadas por una interfase, de la siguientes forma:

$$S_d B_d \frac{\partial \phi_d}{\partial t} + n \alpha \frac{\partial \phi_d}{\partial t} + \left(n \theta \frac{\partial \phi_d}{\partial t} - n(1+\theta) \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(B_d K_{dx} \frac{\partial \phi_d}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B_d K_{dy} \frac{\partial \phi_d}{\partial y} \right) + Q_d + Q_{1d} \quad (1)$$

$$S_s B_s \frac{\partial \phi_s}{\partial t} + \left(n(1+\theta) \frac{\partial \phi_s}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(B_s K_{sx} \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(B_s K_{sy} \frac{\partial \phi_s}{\partial y} \right) + Q_s + Q_{1s} \quad (2)$$

$$\tau = (1+\theta)\phi_s - \theta\phi_d \quad (3)$$

$$\theta = \frac{\gamma_d}{\gamma_s - \gamma_d}$$

Para la obtención de la interfase se usará la ecuación (3) resolviendo previamente las ecuaciones (1) y (2) que representan un sistema de ecuaciones diferenciables no lineales acopladas en función de x y y (altura piezométrica del agua salada y dulce respectivamente).

3.- MODELO NUMERICO.

Para la resolución espacial de las ecuaciones anteriores se puede hacer hacer uso de los métodos numéricos de diferencias finitas o elementos finitos.

En el presente caso emplearemos el primero de ellos, para lo cual se utilizará un método implícito centrado en el espacio y anterior en el tiempo. La solución computacional del problema se basa en el programa Sharp (5), sin embargo como parte de la misma investigación antes señalada se trabajó en paralelo con el método alternativo de resolución en base a elementos finitos (Galindo et al (6)).

La discretización espacial utiliza un bloque centrado con diferente espaciado de malla. Las ecuaciones discretizadas en el espacio y tiempo quedan finalmente para cada nodo representadas por:

$$T_{dx,1/2}^n \Delta y (\phi_{d,1} - \phi_s)^n - T_{dx,1/2}^n \Delta y (\phi_s - \phi_{d,1})^n + T_{dy,1/2}^n \Delta x (\phi_{d,1} - \phi_s)^n - T_{dy,1/2}^n \Delta x (\phi_s - \phi_{d,1})^n =$$

$$\left\{ (S_d B_d^n + n(\alpha + S_{ar})) \frac{(\phi_d^n - \phi_s^{n-1})}{\Delta t} + S_{ar} n(1+\theta) \frac{(\phi_s^n - \phi_s^{n-1})}{\Delta t} + (1-\alpha) Q_{d1} + \alpha N \right\} \Delta x \Delta y - \left(\frac{T h_d P_1}{T h_s} \right)^n$$

$$T_{dx,1/2}^n \Delta y (\phi_{s,1} - \phi_s)^n - T_{dx,1/2}^n \Delta y (\phi_s - \phi_{s,1})^n + T_{dy,1/2}^n \Delta x (\phi_{s,1} - \phi_s)^n - T_{dy,1/2}^n \Delta x (\phi_s - \phi_{s,1})^n =$$

$$\left\{ (S_s B_s^n + F_{ar} n(1+\theta)) \frac{(\phi_s^n - \phi_s^{n-1})}{\Delta t} + F_{ar} n \theta \frac{(\phi_d^n - \phi_d^{n-1})}{\Delta t} + Q_{s1} + \alpha N \right\} \Delta x \Delta y + \left(P_1 - \frac{T h_d P_1}{T h_s} \right)^n$$

$$\theta = \frac{\gamma_d}{\gamma_s - \gamma_d}$$

Reordenando y recolectando términos estas dos ecuaciones pueden ser expresadas en forma más compacta como:

$$Z\phi_{i-1}^n + B\phi_{i-1}^n + D\phi_{j-1}^n + E\phi_i^n + F\phi_{j+1}^n + H\phi_{i+1}^n + S\phi_{k+1}^n = Q$$

donde Z, B, D, E, F, H, y S son submatrices de 2x2 de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{pmatrix}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_d \\ \phi_s \end{pmatrix} \quad \text{: variables desconocidas}$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \quad \text{: variables conocidas}$$

El sistema de "n" ecuaciones acopladas, representando el flujo de agua dulce y salada para cada nodo, que se deduce de lo anterior, puede ser representado en una notación matricial como:

$$A\phi^n = Q$$

donde A es una matriz de $M \times M$ con las submatrices en forma diagonal (Z, B, D, E, F, G, H, y S), θ es un vector columna con las alturas piezométricas desconocidas de agua dulce y salada y Q es un vector columna con las variables conocidas.

Para reducir errores de aproximación y acelerar la solución, es preferible expresar el sistema en forma residual de la siguiente manera:

$$A\{\phi^n - \phi^{n-1}\} = Q - A\phi^{n-1}$$

$$A\xi^n = R^{n-1}$$

donde:

$$\xi^n = \phi^n - \phi^{n-1}$$

$$R^{n-1} = Q - A\phi^{n-1}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones se empleó el procedimiento implícito reforzado (SIP) que es una técnica de solución mediante iteración que resuelve un problema modificado obtenido por la suma de una matriz B a la matriz A.

La matriz B se elige de tal forma que el resultado (A+B) puede ser factorizada en una matriz triangular inferior L y una superior U.

Por lo cual nuestro sistema finalmente sería:

$$(A+B)\xi^m = R^{m-1}$$

Donde ξ^m representa los cambios en las alturas piezométricas del nivel de iteración m-1 a m y R^{m-1} representa la diferencia para la iteración al nivel m-1.

4. CONDICIONES DE BORDE E INICIALES

Dentro del marco del presente análisis (relacionado con el funcionamiento del Hele Shaw) el modelo puede simular altura constante ya sea de agua dulce como salada así como bombeos y recargas en puntos específicos.

También se pueden ingresar interfaces de ubicación y características conocidas.

5. TRATAMIENTO DEL "PIE" DE LA INTERFASE.

El tratamiento o seguimiento del "pie" (punto de intersección de la interfase con el fondo impermeable del acuífero) se obtendrá buscando la proyección lineal de la interfase desde un nodo cercano hasta el fondo. En todo caso el seguimiento de este punto se hace por el modelo bajo el supuesto aproximado de mantener una pequeña capa de agua salada en el fondo del acuífero (de pequeño espesor).

6. APLICACION DEL MODELO A LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES DE HELE SHAW

Para la aplicación del modelo se simularon una serie de experiencias equivalentes a las experiencias del modelo Hele-Shaw (1) en este caso un acuífero libre, homogéneo e isotrópico.

Se simularon tres condiciones:

- i) Condición de régimen permanente sin bombeo
- ii) Condición de régimen permanente con bombeo
- iii) Condición de régimen impermanente considerando varios intervalos de tiempo

Las experiencias del Hele-Shaw se realizaron tanto con agua como con aceite (1)(6).

6.1. PARAMETROS DE LA SIMULACION.

Un parámetro principal es la conductividad hidráulica. En el modelo Hele-Shaw esta es equivalente a (1):

$$K = \frac{\gamma e^2}{12\mu}$$

donde:

e: espesor de las placas
 μ : viscosidad cinemática del fluido

La porosidad y coeficiente de almacenamiento en este caso son uno. La altura de agua de mar y recarga (agua dulce) son constantes y varían dependiendo de las experiencias.

6.2 ANALISIS ESTADISTICO DEL ESPESOR

Considerando que los espesores entre placas del equipo Hele Shaw no eran constantes debido a su construcción y al esfuerzo que se producía cuando este estaba cargado con el fluido, es que se analizaron estadísticamente los datos de laboratorio para su mejor estimación. Se obtuvo de esta manera un valor promedio representativo de $e=1.73\text{mm}$.

A partir del anterior se puede calcular el valor equivalente de K del acuífero (6).

7. RESULTADOS DE LA SIMULACION MATEMATICA DEL HELE SHAW.

7.1. CONDICION DE REGIMEN PERMANENTE SIN BOMBEO.

Según el esquema de simulación anteriormente señalado y las experiencias de laboratorio obtenidas se efectuaron diversas simulaciones matemáticas de las mismas. Un ejemplo de ellas se incluye en la figura nro. 1 (correspondiente a una experiencia en el Hele Shaw con agua dulce y salada) y la fig. nro.2 (correspondiente a una experiencia en el Hele Shaw con dos tipos de aceites).

En este caso, se detectó como principal anomalía entre la simulación matemática y el fenómeno de laboratorio un aparente desplazamiento horizontal de las interfaces debido a las características constructivas del Hele Shaw (plano inclinado a la salida) y del modelo matemático (salida vertical). Este aspecto, para mejorar la comparación, se corrigió mediante un desplazamiento de la modelación matemática a partir de la proyección teórica de la interfase real hasta un punto de intersección común con el nivel libre del mar.

A título de ejemplo, se incluyen las figuras nro .3 (con agua) y nro.4 (con aceite) donde se comparan los valores de laboratorio y de la modelación matemática con este nuevo supuesto.

7.2 CONDICION DE REGIMEN PERMANENTE CON BOMBEO

Para esta condición se aplicó un bombeo constante en una posición definida (aproximadamente en la mitad del equipo de laboratorio). Nuevamente se procedió a la simulación matemática de varias de las experiencias realizadas en agua y aceite. Ejemplo de estas son las figuras nro.5 en agua y 6 en aceite.

En esta oportunidad la condición física real medida (1) demuestra la existencia de una sección vertical de descarga al mar, que contradice el supuesto teórico corriente de la modelación matemática, de un punto común entre superficie libre del mar, interfase y nivel libre del acuífero. Según los resultados de laboratorio (1) esta condición se intentó asociarla con la existencia de "altura crítica" en la llegada al mar.

Bajo los supuestos del modelo y en términos aproximados, a partir del caudal de llegada se modificó la condición de cálculo para incorporar ésta en la modelación matemática. Resultados de este enfoque se incluyen en la fig. nro.7 correspondiente a una experiencia en laboratorio efectuada con agua.

7.3 CONDICION DE REGIMEN IMPERMANENTE CON BOMBEO.

Para esta condición de laboratorio se aplicó un bombeo constante. Dado que las experiencias con aceites (más representativas del fenómeno real (1)(6)) son extremadamente largas, la temperatura fué un factor que fue cambiando y modificando la viscosidad del aceite.

Esto mismo produjo que también las condiciones de bombeo durante el desarrollo de las experiencias no fueran absolutamente estables, debiendo ser seguidas de manera aproximada.

En las figuras 8, 9 y 10 adjuntas se aprecian las comparaciones para diferentes estados.

8. CONCLUSIONES.

a) Bajo los supuestos y aproximaciones de la modelación matemática y de las características propias de un fenómeno pseudo-real como el Hele Shaw, la compatibilidad en general entre ambos es razonable, especialmente si se piensa en término ingenieriles.

b) Para condiciones de régimen permanente sin bombeo la diferencia constructiva entre ambos modelos en la zona de descarga al mar pareciera tener alguna influencia en los resultados. Esta se intentó corregir con éxito relativo mediante un desplazamiento horizontal aproximado de la simulación matemática.

c) En la condición de régimen permanente con bombeo se aprecia que la aproximación del modelo es aceptable a la del laboratorio en la interfase.

d) En la condición de régimen impermanente se aprecia una distorsión entre ambos resultados. Esto se debería principalmente a que en laboratorio se trabajó con aceites y estos no mantenían sus condiciones constantes de operación, tal como se supuso en la simulación matemática.

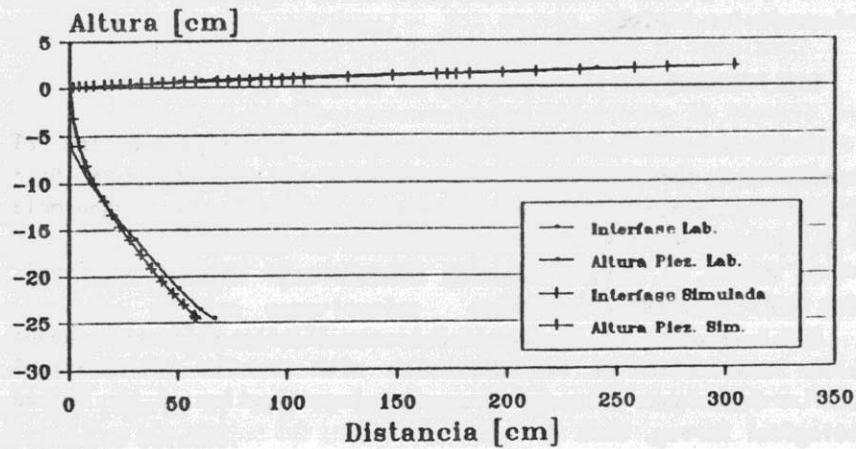
e) Las diferencias de alturas piezométricas se deben principalmente a las hipótesis iniciales del modelo matemático, las cuales supone flujos horizontales. En el equipo Hele Shaw existían flujos verticales (1)(6) sobre todo en la zona de bombeo con lo cual la altura piezométrica variaba.

9. BIBLIOGRAFIA

- 1.- R. Galindo, L.Stowhas, A. Lagos "Estudio teórico experimental del comportamiento de un acuífero mediante la analogía de Hele Shaw". Trabajo presentado al X Congreso Nacional de Ingeniería Hidráulica. Valparaíso, 1991.
- 2.- J. Bear , G. Dagan ."Moving interface in coastal aquifers". Hydr. Div. ASCE 90(4),193-216. 1964.
- 3.- P.C.Trescott, G.F.Pinder, S.P.Larson."Finite difference model for aquifer simulation in two dimension with results of numerical experiment". Techniques of water resources investigation of the United State Geological Survey. Book 7.
- 4.- J.L.Wilson, A. Sa Da Costa."Finite element simulation of a saltwater/freshwater interface with indirect toe tracking". Water Resc. Res. Vol 18 n 4. August 1982.
- 5.- E.Hedeff. "Sharp, a finite difference simulation model for freshwater and saltwater flow in layered coastal aquifer system". U.S. Geological Survey 1989.
- 6.- R.Galindo, L.Stowhas, G.Galleguillos."Informe proyecto Fondecyt 90-0118: Dinámica de acuíferos costeros". Conicyt 1991.

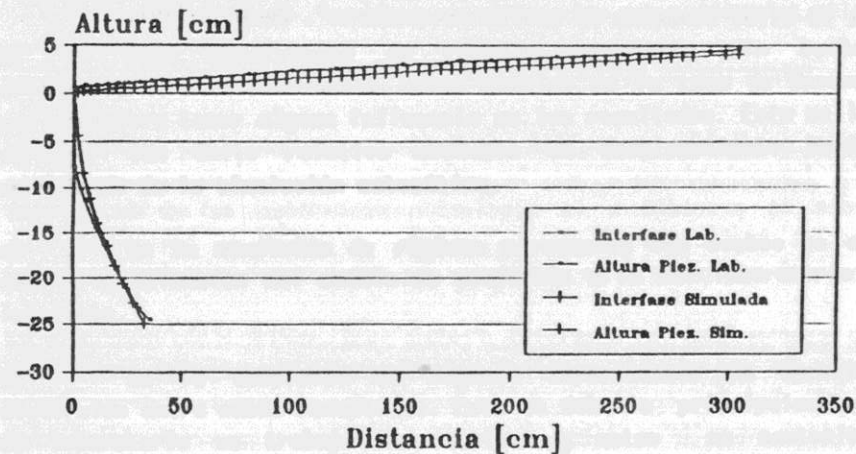


Modelo Hele Shaw
 Estado Inicial Exp N 4
 T= 0 Hr



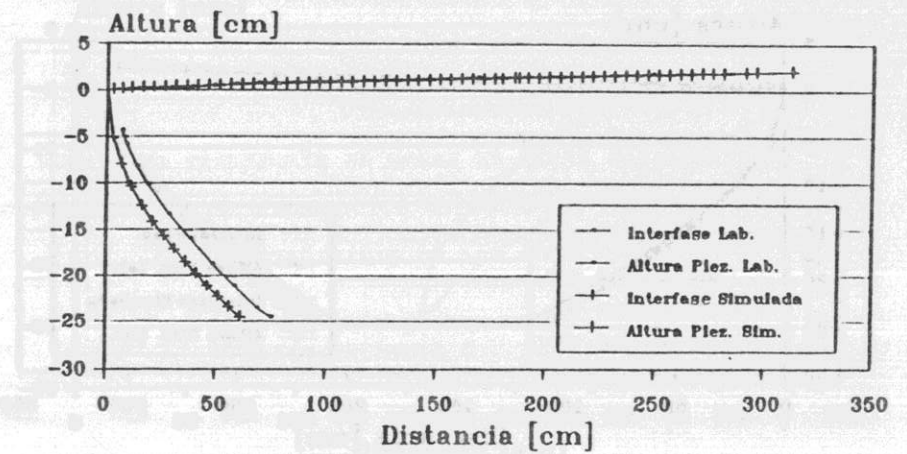
Modelacion en laboratorio con agua
 Figura N 1

Modelo Hele Shaw
 Estado Inicial Exp N 1
 T= 0 Hr



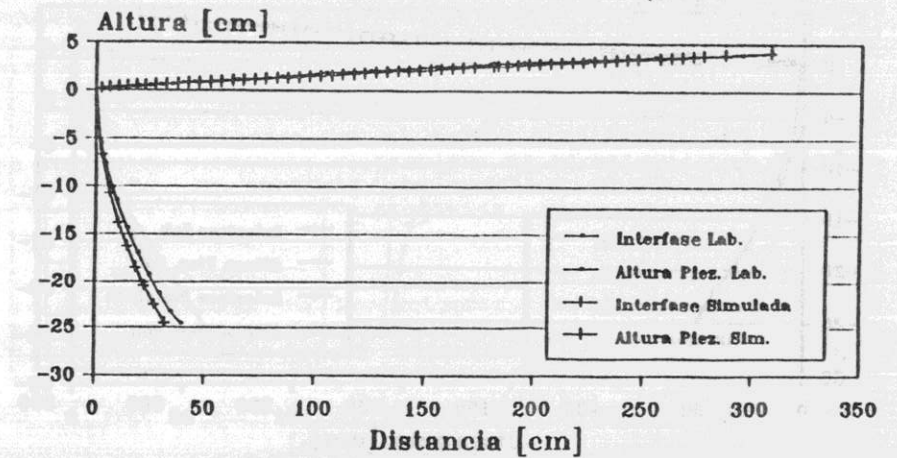
Modelacion en laboratorio con aceites
 Figura N 2

Modelo Hele Shaw
 Estado Inicial Exp N 4
 Corrimiento origen



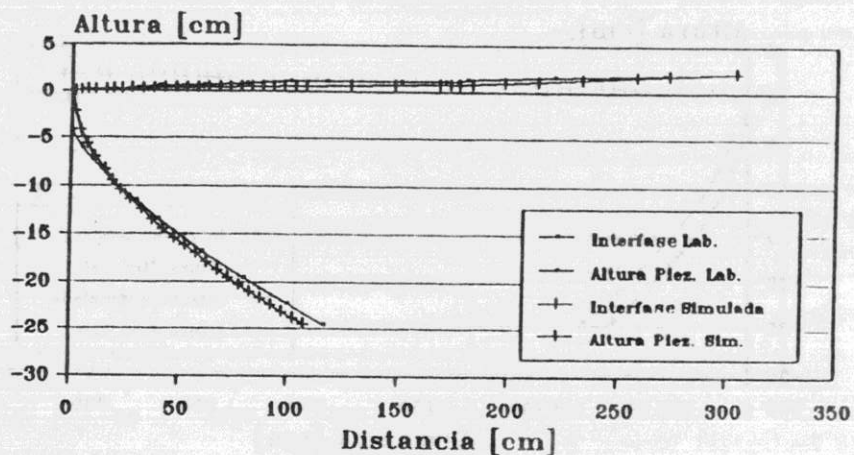
Modelacion en laboratorio con agua
 Figura N 3

Modelo Hele Shaw
 Estado inicial Exp N 1
 Corrimiento origen



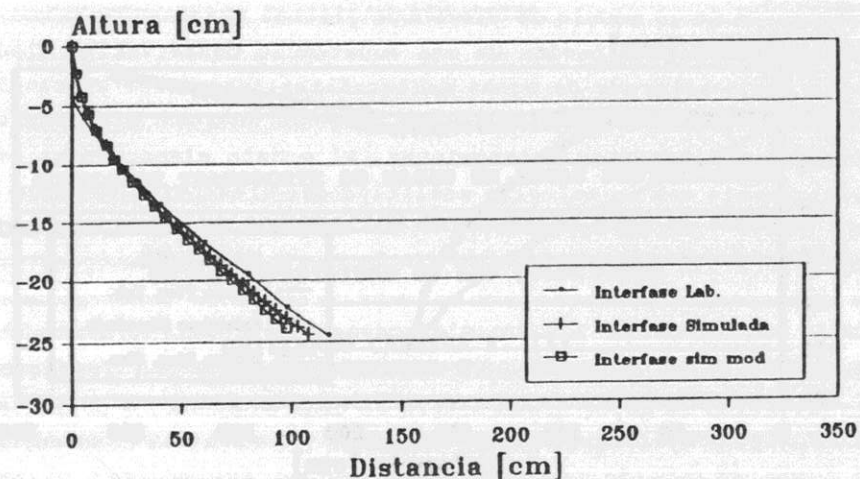
Modelacion en Laboratorio con aceites
 Figura N 4

Modelo Hele Shaw
Estado Final Exp N 4
T= 23 min



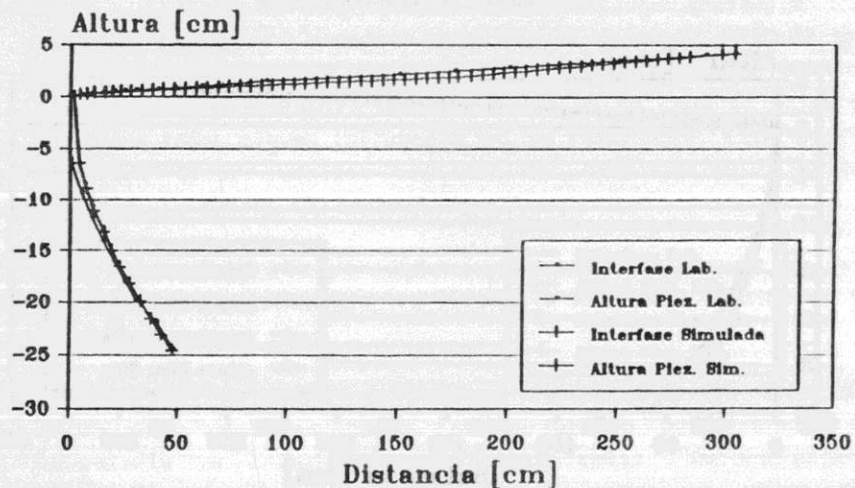
Modelacion en laboratorio con agua
Figura N 5

Modelo Hele Shaw
Estado Final Exp N 4



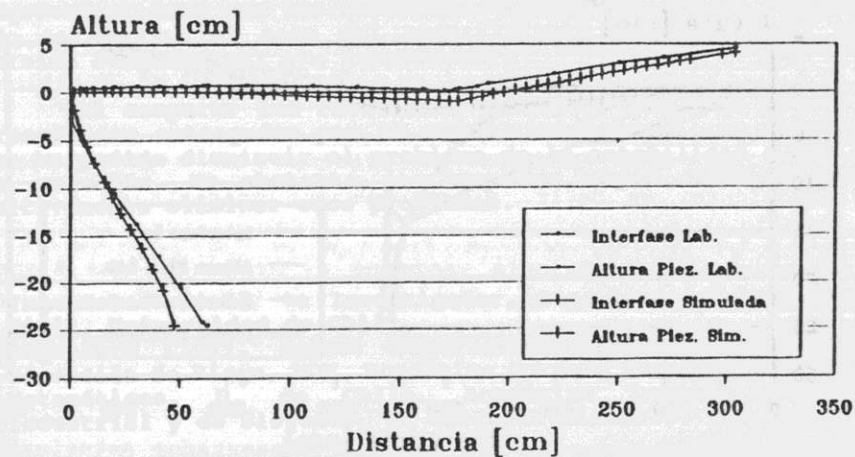
Modelacion en laboratorio con agua
Figura N 7

Modelo Hele Shaw
Estado Final Exp N 2



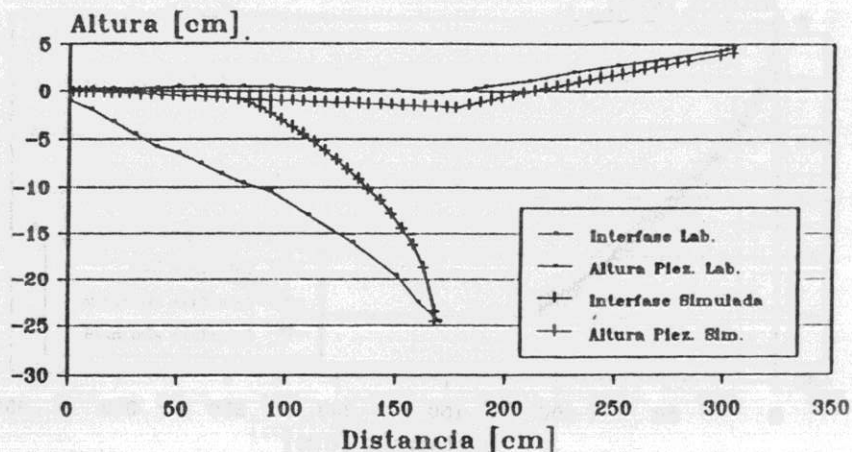
Modelacion en laboratorio con aceite
Figura N 6

Modelo Hele Shaw
Estado Intermedio Exp N 1
T= 3 Hrs 36 min



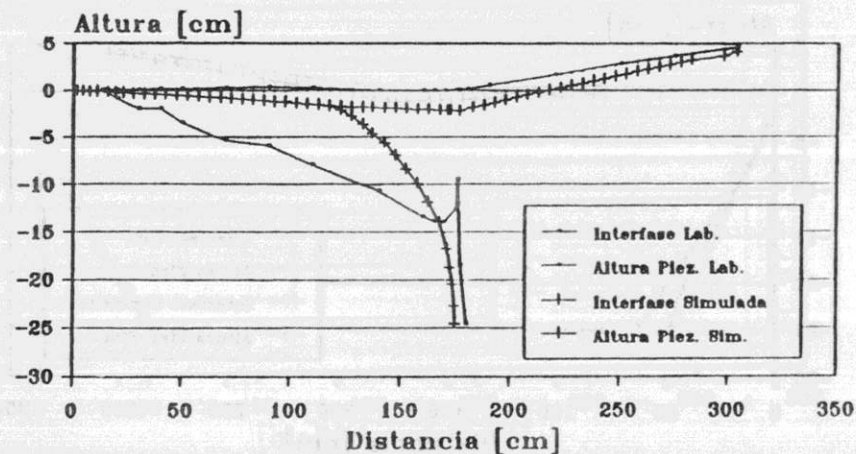
Modelacion en laboratorio con aceite
Figura N 8

Modelo Hele Shaw
Estado Intermedio Exp 1
T= 30 Hrs



Modelacion en laboratorio con aceite
Figura N 9

Modelo Hele Shaw
Estado Intermedio Exp 1
T= 46 Hrs 20 min



Modelacion en laboratorio con aceite
Figura N 10

MODELO DE TRANSPORTE DE MASAS EN AGUAS SUBTERRANEAS
CON FUNCIONES DE PONDERACION ORTOGONALES PARA EL CONTROL
DE LA ESTABILIDAD DE LAS SOLUCIONES

GUILLERMO CABRERA F. (1)
FELIPE ESPINOZA C. (2)

R E S U M E N

Se ha desarrollado un modelo de elementos finitos con funciones de ponderación de tipo ortogonales, que permite atenuar el fenómeno de oscilación numérica que presentan los modelos de elementos finitos tradicionales, cuando se resuelve un problema de transporte de masas en aguas subterráneas. Para realizar el análisis del modelo, se compararon los resultados numéricos entregados por éste con los resultados analíticos que se obtienen cuando se analiza el caso del escurrimiento unidireccional con dispersión longitudinal y/o transversal.

Al comparar los resultados obtenidos por este modelo y los resultados entregados por el modelo tradicional, se concluye que se ha podido disminuir el problema de la estabilidad numérica de la solución. No obstante, se requiere mayor esfuerzo para definitivamente eliminar esos problemas.

- (1) Ingeniero Civil e Investigador, Departamento Ingeniería Civil, Universidad de Chile
- (2) Ingeniero Civil, Asesor Departamento Estudios y Planes, Dirección de Riego, MOP. Académico Jornada Parcial, Depto. de Matemáticas, U. de Chile. Académico Ingeniería Civil Industrial y de Sistemas, U. Gabriela Mistral.