

FIG. 1 ESQUEMA DEL ESCURRIMIENTO Y DEFINICION DE VARIABLES

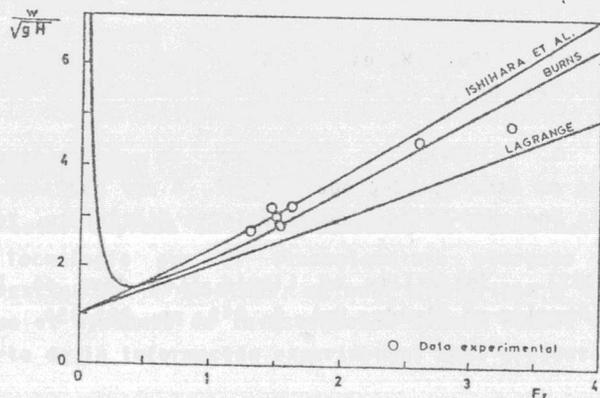


FIG. 2 VELOCIDAD DE PROPAGACION DE LA ONDA INCIPIENTE

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA
VIII CONGRESO NACIONAL

CONDICION PARA LA GENERACION DE ONDAS
RODANTES EN ESCURRIMIENTOS BIDIMENSIONALES
CON SUPERFICIE LIBRE

Aldo Tamburrino Tavantzis

RESUMEN

Mediante la perturbación de las ecuaciones diferenciales básicas que rigen el fenómeno del escurrimiento bidimensional con superficie libre, se obtiene la condición a partir de la cual se generarán ondas rodantes.

El problema se plantea en forma general, incluyendo el caso de escurrimiento con aporte lateral. De este modo, se define una condición crítica en términos del número de Froude del escurrimiento sin perturbar.

Aplicando la expresión general encontrada a casos particulares, es posible determinar la condición crítica para los distintos tipos de regímenes de escurrimiento y de pared.

Ingeniero Civil. Profesor e Investigador. Centro de Recursos Hidráulicos. Departamento de Ingeniería Civil. Universidad de Chile.

INTRODUCCION Y OBJETIVOS

Un escurrimiento permanente uniforme con superficie libre puede hacerse inestable bajo ciertas condiciones del flujo, cambiando a una complicada forma de onda progresiva llamada onda rodante (roll wave), consistente en una serie de caídas bruscas de la superficie libre, unidas entre sí por transiciones suaves del perfil de escurrimiento.

En general se trata de evitar la presencia de estas ondas en los canales, ya que su amplitud puede ser tal que sobrepase las protecciones del canal. También tiene efectos nocivos en las tierras de cultivo ya que, aunque sean escurrimientos de pequeña altura, la capacidad erosiva del flujo al existir las ondas rodantes es muy alta. En otras circunstancias, al contrario, se trata de asegurar la presencia de las ondas rodantes, ya que éstas llevan asociado un aumento de la transferencia de masa de las reacciones químicas que puedan estar llevándose a cabo en el flujo.

El problema de la generación de las ondas rodantes ha sido abordado en forma satisfactoria mediante el análisis de la estabilidad que presenta el sistema hidrodinámico frente a alguna perturbación del flujo. Existen, básicamente, dos métodos para abordar los problemas de estabilidad (Raudkivi y Callander, 1975):

- El método de energía, en el que se considera la variación en el tiempo de la energía de la perturbación del flujo.
- El método de las perturbaciones pequeñas, en el que una perturbación externa se superpone al flujo permanente base. Dependiendo si la perturbación decae o se amplifica se considera que el flujo es estable o inestable frente a dicha perturbación.

Mediante el uso de este último método, en el presente trabajo se resuelve el problema de la generación de ondas rodantes para el

caso general de flujo bidimensional, contemplándose la posibilidad de un aporte lateral de flujo.

Jeffreys (1925), fue uno de los primeros investigadores en plantear formalmente el problema y abordarlo como uno de inestabilidad del flujo. De este modo, concluye que el flujo es inestable si

$$\operatorname{tg} \theta > 4 C_f \quad (1)$$

donde θ es el ángulo de inclinación del canal, C_f es el factor de fricción, donde $\tau = C_f \rho U^2$, siendo τ el esfuerzo de corte en el fondo, ρ la densidad del fluido y U la velocidad media del flujo no perturbado.

Mediante un poco de álgebra, la Ec. 1. puede escribirse en su forma más conocida:

$$F_r = 2 \sqrt{\cos \theta} \quad (2)$$

donde F_r es el número de Froude del escurrimiento no perturbado.

Posteriormente, Dressler y Pohle (1953) consideran que la ley de resistencia está dada en forma general por una expresión del tipo:

$$J = k \frac{U^n}{H^m} \quad (3)$$

donde H es la altura del escurrimiento no perturbado.

n , m y k son exponentes y un coeficiente que dependen de cada ley de resistencia en particular.

Perturbando las ecuaciones básicas del fenómeno, concluyen que la condición de inestabilidad está dada por:

$$F_r = \frac{n}{m} \sqrt{\cos \theta} \quad (4)$$

ECUACIONES BASICAS QUE GOBIERNAN EL FLUJO

Las ecuaciones básicas que rigen el movimiento del escurrimiento bidimensional, considerando un aporte lateral de flujo son:

- Cantidad de Movimiento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - g \left(\sin \theta - \frac{\tau}{\gamma h} \right) + \frac{uI}{h} \cos \alpha + \frac{I^2}{h} \cos \alpha \sin \alpha = 0 \quad (5)$$

- Continuidad:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} = I \cos \alpha \quad (6)$$

donde u es la velocidad media del escurrimiento.

h es la altura del escurrimiento.

g es la aceleración de gravedad.

γ es el peso específico del fluido.

I es la tasa de aporte lateral por unidad de área.

α es el ángulo que forma el vector velocidad del aporte lateral respecto a la dirección del flujo.

x es la absisa, positiva en la dirección del flujo.

t es el tiempo.

Debido al desconocimiento de la relación friccional para el caso impermanente espacialmente variado, el esfuerzo de corte τ se evaluará a partir de la relación

$$\tau = \frac{\gamma}{8g} f u^2 \quad (7)$$

donde el factor de fricción f depende del régimen de escurrimiento y rugosidad de la pared y ha sido determinado para el flujo permanente uniforme.

PERTURBACION DE LAS ECUACIONES

Considerando que U y H son las soluciones de las Ecuaciones (5) y (6) para el caso sin perturbar y que una pequeña perturbación se traduce en:

$$u = U + u' \quad , \quad h = H + h' \quad (8)$$

donde u' y h' son las perturbaciones de la velocidad y la altura, respectivamente.

Al reemplazar las variables perturbadas en las Ecuaciones (5) y (6) y despreciando los términos de segundo orden, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + g \cos \theta \frac{\partial h'}{\partial x} - \frac{1}{8} f_0 \frac{U^2}{H^2} h' + \frac{1}{4} f_0 \frac{U}{H} u' + \\ & + \frac{1}{8} \frac{\partial f}{\partial u} \left| \frac{U^2}{H} u' + \frac{1}{8} \frac{\partial f}{\partial h} \left| \frac{U^2}{H} h' - I \cos \alpha \frac{U}{H^2} h' + \right. \right. \\ & \left. \left. + I \cos \alpha \frac{u'}{H} - I^2 \cos \alpha \sin \alpha \frac{h'}{H^2} = 0 \right. \right. \quad (9) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + U \frac{\partial h'}{\partial x} + H \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

f_0 , $\left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_0$ y $\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0$ representan el factor de fricción y sus derivadas respecto a h y u evaluados en la condición no perturbada, respectivamente.

Considerando que la solución de las Ecuaciones (9) y (10) es del tipo:

$$u' = \hat{U} e^{i(\sigma x - \beta t)}, \quad h' = \hat{H} e^{i(\sigma x - \beta t)} \quad (11)$$

donde \hat{U} y \hat{H} son las amplitudes, σ es el número de onda y β es el factor de propagación (complejo). La celeridad de la onda está dada por:

$$c = \frac{\beta_R}{\sigma} \quad (12)$$

y el cambio logarítmico de la amplitud por:

$$\delta = 2 \pi \frac{\beta_I}{\beta_R} \quad (13)$$

donde β_R y β_I representan la parte real e imaginaria de β .

Reemplazando Ecuaciones (11) en las Ecuaciones (9) y (10), se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{U} \left[U i \sigma - i \beta + \frac{1}{4} f_0 \frac{U}{H} + \frac{1}{8} \frac{\partial f}{\partial u} \left|_0 \frac{U^2}{H} + \frac{I}{H} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \right. \right] + \\ \hat{H} \left[g \cos \theta i \sigma - \frac{1}{8} f_0 \frac{U^2}{H^2} + \frac{1}{8} \frac{\partial f}{\partial h} \left|_0 \frac{U^2}{H} - I \cos \alpha \frac{U}{H^2} - \frac{I^2}{H^2} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \right. \right] = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

$$\hat{U} \sigma H + \hat{H} (\sigma U - \beta) = 0 \quad (15)$$

El sistema formado por las Ecuaciones (14) y (15) tiene solución no trivial para U y H si su determinante es nulo. Esta condición lleva a la siguiente relación entre σ y β :

$$\begin{aligned} \beta^2 + \beta \left[-2 U \sigma + \left[\frac{1}{4} f_0 \frac{U}{H} + \frac{1}{8} \frac{U^2}{H} \frac{\partial f}{\partial u} \left|_0 + \frac{I}{H} \cos \alpha \right. \right] i \right] + \\ U^2 \sigma^2 - H g \cos \theta \sigma^2 + \left[\frac{-3}{8} f_0 \frac{U^2}{H} - \frac{1}{8} \frac{\partial f}{\partial u} \left|_0 \frac{U^3}{H} + \frac{1}{8} \frac{\partial f}{\partial u} \left|_0 U^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 2 I \cos \alpha \frac{U}{H} - \frac{I^2}{H} \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \right] \sigma i = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

Denominando:

$$\begin{aligned} A = 4 H g \cos \theta \sigma^2 - \left[\frac{1}{4} f_0 \frac{U}{H} + \frac{1}{8} \frac{U^2}{H} \frac{\partial f}{\partial u} \left|_0 + \frac{I}{H} \cos \alpha \right. \right]^2 \\ B = \frac{U^2 \sigma}{2} \left[f_0 \frac{1}{H} - \frac{\partial f}{\partial h} \left|_0 \right. \right] + \sigma \left[\frac{I U \cos \alpha}{H} + \frac{I^2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{H} \right] \end{aligned}$$

$$C^2 = A^2 + B^2$$

Las soluciones de la Ecuación (16) son:

$$2\beta_1 = 2U\sigma + \left(\frac{C+A}{2}\right)^{1/2} + i \left[\left(\frac{C-A}{2}\right)^{1/2} - \left(\frac{1}{4}f_0\frac{U}{H} + \frac{1}{8}\frac{U^2}{H}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{I}{H}\cos\alpha \right] \quad (17)$$

$$2\beta_2 = 2U\sigma - \left(\frac{C+A}{2}\right)^{1/2} - i \left[\left(\frac{C-A}{2}\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{4}f_0\frac{U}{H} + \frac{1}{8}\frac{U^2}{H}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{I}{H}\cos\alpha \right] \quad (18)$$

De Ecuación (12) se ve que β_1 define una onda que se propaga siempre en la dirección del escurrimiento, en cambio β_2 define otra que puede propagarse hacia aguas arriba o hacia aguas abajo, según sea el valor que tome cada uno de los sumandos de la parte real de β_2 . Luego, la onda rodante queda caracterizada por β_1 y se producirá cuando cualquier perturbación del escurrimiento se amplifique. Esto significa que el cambio logarítmico de la amplitud debe ser positivo. En el caso límite, la condición se traduce en:

$$\beta_{11} = 0 \quad (19)$$

Introduciendo la condición (19) en la Ecuación (17), se llega a la siguiente condición de inestabilidad:

$$F_r = \frac{2f_0 + U \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_0 + \frac{I}{U}\cos\alpha}{f_0 - H \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_0 + \left[1 + \frac{I \operatorname{sen}\alpha}{U} \right] \frac{I}{U}\cos\alpha} \sqrt{\cos\theta} \quad (20)$$

CASOS PARTICULARES DEL NUMERO DE FROUDE LIMITE.

a) Flujo sin aporte lateral:

La Ecuación (20) se transforma en:

$$F_r = \frac{2f_0 + U \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_0}{f_0 - H \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_0} \sqrt{\cos\theta} \quad (21)$$

a1) Flujo laminar: $f_0 = \frac{24}{\operatorname{Re}}$

$$Re = \frac{UH}{\nu}$$

$$F_r = 0.5 \sqrt{\cos\theta} \quad (22)$$

Para esta situación y considerando la distribución parabólica de velocidades en la ecuación de cantidad de movimiento, Ishihara et al. (1952) obtuvieron que la condición límite está dada por $F_r = 0.577 \sqrt{\cos\theta}$. Posteriormente, Yih (1963), partiendo de la ecuación de Orr-Sommerfeld obtiene $F_r = 0.527 \sqrt{\cos\theta}$.

a2) Flujo turbulento con pared hidrodinámicamente lisa: Ecuación de Blasius:

$$f_0 = \frac{K}{Re^{1/4}}$$

$$K = 0.223, \quad M = 4, \quad F_r = 1.4 \sqrt{\cos\theta} \quad (23)$$

a3) Flujo turbulento con pared hidrodinámicamente rugosa: Ecuación de Nikuradse:

La ecuación (23) se puede escribir como $\frac{1}{\sqrt{f_0}} = a \ln \left(b \frac{H}{k_s} \right)$, donde k_s es el tamaño de la aspereza de la pared. Este significa que la amplitud debe ser positiva. Traduce en:

$$F_r = \frac{2}{1 + 2 a \sqrt{f_0}} \sqrt{\cos\theta} \quad (24)$$

a4) Flujo turbulento con pared hidrodinámicamente rugosa: Ecuación de Manning:

$$f = \frac{8gn^2}{H^{1/3}}$$

n es el coeficiente de rugosidad de Manning.

$$F_r = 1.5 \sqrt{\cos\theta} \quad (25)$$

a5) Flujo turbulento con pared hidrodinámicamente rugosa: Ecuación de Chezy:

$$f = \frac{8g}{C^2}$$

C es el coeficiente de Chezy.

$$F_r = 2.0 \sqrt{\cos\theta} \quad (26)$$

Mediante diversos análisis, otros autores han llegado a las Ecuaciones (25) y/o (26), algunos de ellos considerando una pendiente de canal pequeña ($\cos\theta \approx 1$). (Keulegan y Patterson, 1940; Powell, 1948; Dresslery Pohle, 1953; Escoffier y Boyd, 1962; Dracos y Glenne, 1967; Ponce y Simons, 1977).

a6) Flujo turbulento con pared hidrodinámicamente en transición lisa-rugosa: Ecuación de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -a \ln \left[\frac{b}{\text{Re}\sqrt{f}} + c \frac{ks}{H} \right]$$

$$a = 0.884, \quad b = 0.853, \quad c = 1/11.02$$

$$F_r = \frac{2}{\frac{ab}{\text{Re}A} + 1 + 2a\sqrt{f_0}} \sqrt{\cos\theta} \quad (27)$$

$$A = \frac{b}{\text{Re}\sqrt{f_0}} + c \frac{ks}{H}$$

b) FLUJO CON APORTE LATERAL

No se tienen antecedentes del factor de fricción en escurrimientos con flujo lateral y usualmente se utiliza para este caso las relaciones obtenidas para escurrimientos sin aporte lateral.

Sin embargo, Ayala y Tamburrino (1984) establecieron una relación funcional para el escurrimiento superficial bajo lluvia sobre pared hidrodinámicamente lisa, escurrimiento que puede considerarse como un caso particular del flujo con aporte lateral. La relación obtenida está dada en forma genérica por:

$$f_0 = \frac{K^*}{\text{Re}^{1/M^*}} \quad (28)$$

donde K^* es función de la intensidad de la lluvia y M^* lo es además de la pendiente del canal.

Luego, la condición de inestabilidad, para una lluvia vertical de intensidad I , queda definida por:

$$\frac{2M^*-1}{M^*} f_0 + \frac{I}{U} \cos\theta$$

$$F_r = \frac{\sqrt{\cos\theta}}{\frac{M^*+1}{M^*} f_0 + \left[1 + \frac{I \text{ sen}\theta}{U} \right] \frac{I}{U} \cos\theta} \quad (29)$$

En el trabajo antes citado, al hacer la aproximación de la onda cinemática, se determina que el perfil de escurrimiento queda dado por:

$$H = \left(\frac{K^* \sqrt[3]{M^*}}{8g \text{ sen}\theta} \right)^{3/2} \left(\frac{2M^*-1}{3M^*} I \cos\theta x \right) \quad (30)$$

De este modo, la Ecuación (30) y la de continuidad, permiten evaluar todos los términos de la Ecuación (29), siendo posible, por lo tanto, predecir en qué punto las condiciones son tales que hacen inestable el flujo.

CONCLUSIONES

Mediante el enfoque integral, se ha determinado la condición a partir de la cual un escurrimiento bidimensional con superficie libre se hace inestable, generando ondas rodantes.

Del análisis efectuado, se desprende la gran incidencia que tiene la relación utilizada como ley de resistencia en el valor del número de Froude que define la situación inestable. De este

modo, surge un nuevo problema, cual es el poder definir cuál es la relación friccional más adecuada de usar en cada caso. La necesidad de mayor información experimental se hace necesaria especialmente para el caso de flujo con aporte lateral, no teniendo el autor más antecedentes del factor de fricción en escurrimientos espacialmente variado que el de escurrimientos bajo lluvia.

Muchos otros investigadores han analizado el problema considerando la relación de Chezy como ley friccional ya que su uso simplifica enormemente las ecuaciones, especialmente en el caso de escurrimiento espacialmente variado (Morris, 1980). Sin embargo es necesario ser crítico de la condición de inestabilidad así obtenida debido a la no validez de esa relación en muchos tipos de escurrimientos.

RECONOCIMIENTO

El autor expresa su reconocimiento al Fondo Nacional de Ciencia y Tecnología por el financiamiento otorgado al Proyecto de Investigación N° 0541/85, el cual dió origen al presente trabajo.

BIBLIOGRAFIA

AYALA, L. y A. TAMBURRINO (1984) "Factores de Resistencia de Láminas de Escurrimiento Generados por Lluvia sobre Superficies Hidrodinamicamente Lisas", A.I.I.H., XI Congreso Latinoamericano de Hidráulica, pp. 128-139.

DRACOS, T. and B. GLENNE (1967). "Stability Criteria for Open-Channel Flow". J. Hyd. Div. ASCE., Vol 93, N° HY6, pp. 79-101.

DRESSLER, R. and F. POHLE (1953). "Resistance Effects on Hydraulic Instability", Comm. on Pure and Applied Math., Vol. 6, pp. 93-96.

ESCOFFIER, F. and M. BOYD (1962). "Stability Aspects of Flow in Open-Channels", J. Hyd. Div., ASCE., Vol.88, N° HY6, pp. 145-166.

ISHIHARA, T., Y. IWAGAKI and Y. ISHIHARA (1952). "On the Rollwave-Trains Appearing in the Water Flow on a Steep Slope Surface", Memoirs, Faculty of Engineering, Kyoto University, Japan, Vol.14, N° 2, Apr., pp. 83-91.

JEFFREYS, H. (1925). "The Flow of Water in an Inclined Channel of Rectangular Section", Phyl. Mag., S.6., Vol. 94, N° 293, May, pp. 793-807.

KEULEGAN, G. and G. PATTERSON (1940). "A Criterion for Instability of Flow in Steep Channels". Trans. Am. Geoph. Union, Part II, pp. 594-596.

MORRIS, E. M. (1980) "The Propagation of Waves in Shallow Water Flow with Lateral Inflow". Hydrological Science Bulletin, T. Clarke (Editor), Vol. 25, N° 1, pp. 26-32.

PONCE, V. and D. SIMONS (1977). "Shallow Wave Propagation in Open Channel Flow". J. Hyd. Div., ASCE., Vol. 103, N° HY12, pp. 1461-1476.

POWELL, R. (1948). "Vedernikov's Criterion for Ultra Rapid Flow". Trans. Am. Geoph. Union, Vol. 29, N° 6, pp. 882-886.

RAUDKIVI, A. and R. CALLANDER (1975). "Advanced Fluid Mechanics", John Wiley & Sons., New York, p. 137.

YIH, C (1963). "Stability of Liquid Flow down an Inclined Plane", The Physics of Fluids, Vol. 6, N° 3, pp. 321-334.