

INTRODUCCION

El objetivo principal de esta investigación es el de modelar flujo laminar impermanente en ductos con secciones complejas. Para estudiar el fenómeno es necesario ciertas restricciones, el flujo debe ser laminar, pues, soluciones analíticas exactas para ecuaciones de Navier-Stokes sólo existen para esa clase de flujo, la solución va a depender entonces de la condición de contorno que se deriva de la hipótesis de no-deslizamiento en la pared del ducto. Tanto para el flujo laminar permanente e impermanente se necesita imponer la condición de que el fluido sea Newtoniano e incompresible; viscosidad constante; que los ductos sean rectos de sección transversal constante; las paredes del ducto sean rígidas y de un largo tal que los efectos en los extremos sean despreciables.

Estas condiciones son con frecuencia encontradas en sistemas de Ingeniería y por lo tanto no debería disminuir significativamente la utilidad de la aproximación.

FLUJO LAMINAR PERMANENTE EN DUCTOS DE SECCIONES COMPLEJAS

Método de Análisis:

La ecuación de movimiento para el problema en estudio es en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right]; \quad p = p + \rho g h \quad (1)$$

donde u = velocidad axial; P = presión piezométrica; p = presión de fluido; ρ = densidad; g = aceleración de gravedad; h = altura; x = coordenada axial; ν = viscosidad cinemática; r = coordenada radial; θ = coordenada angular.

La ec. (1) es la que rige el movimiento en el ducto de la figura 1.

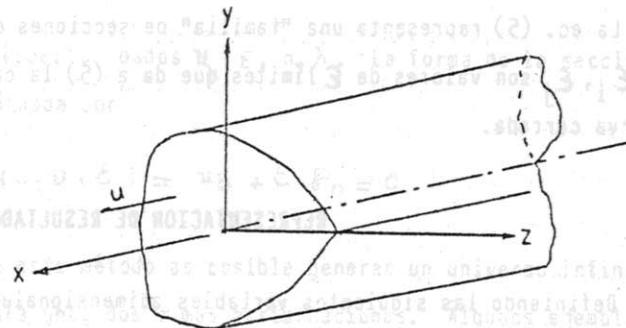


Figura 1. Esquema de un ducto con flujo de velocidad u .

Sea u_b una solución base de la ecuación (1) la cual satisface la condición de no deslizamiento en la curva cerrada de la sección transversal base dada por:

$$\phi_b(r, \theta) = 0 \quad (2)$$

Para ec. (1) sea u_h una solución homogénea que satisface

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_h}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3)$$

entonces:

$$u = u_b + \varepsilon u_h \quad (4)$$

que no necesariamente satisface la condición de contorno en una línea cerrada. Pero si ε es suficientemente pequeño se puede esperar que la condición de contorno se satisfaga en una curva cerrada, es a esto lo que se denomina como una versión perturbada de la curva base. Se tiene entonces que la velocidad es nula en la curva dada por:

$$\phi(r, \theta, \varepsilon) = 0 \quad (5)$$

Donde $\phi(r, \theta, \epsilon) \rightarrow \phi_b(r, \theta)$ para $\epsilon \rightarrow 0$

La ec. (5) representa una "familia" de secciones dadas para $\epsilon_i \leq \epsilon \leq \epsilon_j$, donde ϵ_i, ϵ_j son valores de ϵ límites que da a (5) la característica de una curva cerrada.

REPRESENTACION DE RESULTADOS

Definiendo las siguientes variables adimensionales.

$$r = ar^* ; \quad u = U_0 u^* ; \quad U_0 = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \tag{6}$$

donde a = longitud característica

La ec.(1) se transforma en

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} = -4 \tag{7}$$

Los asteriscos(*) se omitirán en lo sucesivo.

Se hará uso especial de ciertas soluciones homogéneas obtenidas a partir de las propiedades de las funciones analíticas de variable compleja como sigue [5]

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$u_n = P_n(r, \theta) = \Re [r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) + \lambda] \tag{8}$$

Donde $i = \sqrt{-1}$; \Re es la parte real de la función compleja $P_n; \lambda$ es una constante arbitraria.

Las soluciones a describirse adoptarán por lo tanto, la forma especial:

$$u = u_b + \epsilon P_n \tag{9}$$

la que queda resuelta dados $u_b, \epsilon, n, \lambda$. La forma de la sección del ducto que queda determinada por

$$\phi(r, \theta, \epsilon) = u_b + \epsilon P_n = 0 \tag{10}$$

Mediante este método es posible generar un universo infinito de secciones tanto para una, dos o más perturbaciones. Algunos ejemplos de este amplio set de secciones son mostrados en las figuras 2, 3 y 4 con sus respectivas ecuaciones de velocidad.

DETERMINACION DE ϵ PARA EL LIMITE DE UNA CURVA CERRADA.

Si se analiza el caso de una sección derivada de un círculo con una perturbación, es de interés ver que en algunos casos, si se varía en pequeña cantidad el parámetro ϵ , por ejemplo en figura 5, corresponden variaciones significativas de las correspondientes secciones, por lo tanto se obtendrán secciones de ductos de formas muy diferentes.

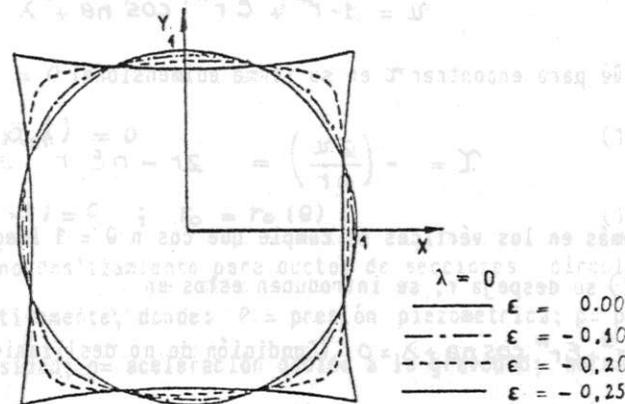


Figura 5. Evolución de una sección circular de tubería en términos de ϵ .

Existe el inconveniente que para $|\epsilon| > 0.25$ no se obtienen curvas cerradas que incluyan el origen; por lo que surge la necesidad de encontrar un límite para ϵ , de tal manera que mediante este método se obtengan curvas cerradas que describan secciones de interés para el estudio.

Sólo para una perturbación de la sección base circular es posible encontrar una expresión fundamental para ϵ . El análisis es el siguiente: por ejemplo $n = 4$, la sección es:

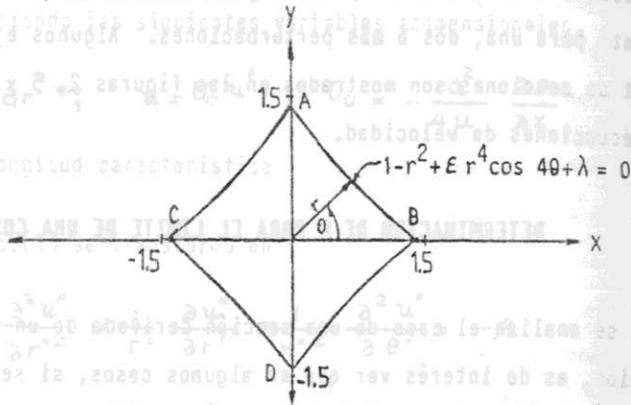


Figura 6. Sección de ducto para $\epsilon = 0.25$; $n = 4$

En puntos tales como A, B, C, D, es sabido que el esfuerzo de corte τ es nulo, la ecuación

$$u = 1 - r^2 + \epsilon r^n \cos n\theta + \lambda \tag{11}$$

sirve para encontrar τ en su forma adimensional

$$\tau = -\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 2r - n\epsilon r^{n-1} = 0 \tag{12}$$

Además en los vértices se cumple que $\cos n\theta = 1$ luego con $\lambda = 0$ y de ec.

(12) se despeja r , se introducen estos en

$$1 - r^2 + \epsilon r^n \cos n\theta + \lambda = 0 \quad (\text{Condición de no deslizamiento}) \tag{13}$$

Se obtiene:

$$\epsilon = \frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{n}{2}\right)} = \epsilon_{\text{limite}} \tag{14}$$

que es la ecuación de relevante importancia para el trazado geométrico de la sección del ducto.

FLUJO LAMINAR IMPERMANENTE EN DUCTOS DE SECCION CIRCULAR [6]

Y SECCIONES DERIVADAS DE UN CIRCULO.

Equaciones Gobernantes.

No se toma en consideración la región no uniforme de desarrollo del flujo a la entrada del ducto, sino que solamente la región de flujo desarrollado laminar de un fluido incompresible en tuberías largas, ya que en esta región el flujo es totalmente paralelo y puede describirse por las formas lineales de la ecuación de Navier-Stokes, y continuidad. En coordenadas cilíndricas:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = \phi \tag{15}$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad ; \quad p = p_0 + \rho g h \tag{16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{17}$$

$$u(a, t) = 0 \tag{18}$$

$$u(r_0, t) = 0 \quad ; \quad r_0 = r_0(\theta) \tag{19}$$

(18) y (19) condiciones de no deslizamiento para ductos de secciones circulares y complejos, respectivamente, donde: P = presión piezométrica; p = presión de fluido; ρ = densidad; g = aceleración debido a la gravedad; h = altura; x, r = coordenadas axiales y radial; respectivamente; a = radio de la tu

bería; t : tiempo; $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ = viscosidad cinemática; μ = viscosidad dinámica; r_0 = radio del contorno de la sección en una posición angular θ ; ϕ = función forzante del sistema.

METODO DE ANALISIS SECCIONES CIRCULARES.

Se adimensionaliza la ec. de movimiento con

$$U = U_0 U^*, \quad t = \tau_0 t^*, \quad r = ar^*, \quad u = U_0 u^* \quad (20)$$

Donde U_0 , τ_0 y a representan valores de referencia de velocidad, tiempo y radio del círculo, respectivamente, luego las ecs. (15) y (18) se transforman en

$$\Omega \frac{\partial u^*}{\partial t^*} - \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) = \phi^* \quad (21)$$

$$u^*(1, t^*) = 0 \quad (22)$$

Así $\phi^* = \phi \frac{a^2}{U_0 \nu}$ (función forzante adimensional) (23)

y $\Omega = \frac{a^2}{\tau_0 \nu}$ (24)

denota una razón de tiempo que mide la importancia relativa de una fuerza de inercia temporal contra una fuerza estable viscosa.

En lo sucesivo los asteriscos se omitirán.

La solución de la ec. (21) para el caso especial de movimiento permanente, es decir, $\phi = \text{constante}$ y $\Omega = 0$, permite encontrar la conocida distribución parabólica de velocidad de flujo de Poiseuille, es decir

$$u_s = \frac{\phi_s}{4} (1-r^2) \quad (s \text{ identifica el estado permanente}) \quad (25)$$

PRESENTACION DE RESULTADOS

El método de solución para la velocidad es una serie explícita en términos de una coordenada radial y de una función de tiempo. Es así posible desarrollar ciertas funciones analíticas generales las cuales son válidas para todos los miembros de la vasta familia de funciones forzantes. La velocidad es así descrita como

$$u = A_2 (1-r^2) + A_4 (1-r^4) + A_6 (1-r^6) + \dots \quad (26)$$

donde A_2, A_4, A_6, \dots son funciones de tiempo y la ec. (26) satisface la condición de no deslizamiento (22)

Se introduce la ec. (26) en ec. (21) y los términos A_4, A_6, A_8, \dots se expresan en función de $A_2 = A$ y se obtiene

$$u = A(1-r^2) + \frac{\Omega}{4^2} \frac{dA}{dt} (1-r^4) + \frac{\Omega^2}{4^2 6^2} \frac{d^2 A}{dt^2} (1-r^6) + \dots \quad (27)$$

$$A + \frac{\Omega}{2^2} \frac{dA}{dt} + \frac{\Omega^2}{2^2 4^2} \frac{d^2 A}{dt^2} + \dots = \frac{\phi}{4} \quad (28)$$

Las ecs. (27) y (28) son el punto inicial para el método de análisis de problemas de flujo laminar impermanente en tuberías.

METODO DE ANALISIS PARA SECCIONES COMPLEJAS.

Las tuberías de secciones complejas que se estudian adoptan las más variadas formas como se vio en las figuras 2, 3 y 4, el radio que describe el contorno cerrado de la sección transversal del ducto (r_0), es variable y depende de la posición angular, por lo tanto, $r_0 = r_0(\theta)$, debido a esto es necesario agregar en la ec. (21) el término que toma en cuenta la va-

riación de u con la coordenada de posición angular θ . Se adimensionaliza la ec. (15) de igual forma que para secciones circulares, luego la ec. de movimiento será:

$$\Omega \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = \phi \quad (29)$$

con $u(r_0, t) = 0$ (condición de no deslizamiento) (30)

PRESENTACION DE RESULTADOS.

El método de solución para la velocidad es ahora diferente que para secciones circulares, siendo necesario incorporar un elemento en θ [7] de tal manera que la solución a la ec. (29) adopta la siguiente estructura:

a) Para una perturbación:

$$u = (1-r^2 + \epsilon r^n \cos \theta) \left[A + \frac{\Omega}{4^2} \frac{dA}{dt} (1+r^2) + \frac{\Omega^2}{4^2 6^2} \frac{d^2 A}{dt^2} (1+r^2+r^4) + \dots + v(r, \theta, t) \right] \quad (31)$$

b) Para dos perturbaciones:

$$u = (1-r^2 + \epsilon_1 r^{n_1} \cos n_1 \theta + \epsilon_2 r^{n_2} \cos n_2 \theta) \left[A + \frac{\Omega}{4^2} \frac{dA}{dt} (1+r^2) + \dots + \epsilon_1 v_1(r, \theta, t) + \epsilon_2 v_2(r, \theta, t) \right] \quad (32)$$

y así análogamente para más perturbaciones.

ANALISIS PARA SECCIONES CIRCULARES CON UNA O MAS PERTURBACIONES

Para una perturbación la solución es:

$$u = (1-r^2 + \epsilon r^n \cos n\theta) (u'_0 + \epsilon v); \quad v = v(r, \theta, t) \quad (33)$$

donde:

$$u'_0 = A + \frac{\Omega}{4^2} \frac{dA}{dt} (1+r^2) + \frac{\Omega^2}{4^2 6^2} \frac{d^2 A}{dt^2} (1+r^2+r^4) + \dots \quad (34)$$

La ec. (33) se desarrolla y se desprecian términos de orden ϵ^2 , así

$$u = u_0 + \epsilon (1-r^2)v + u'_0 (\cos n\theta) r^n \epsilon \quad (35)$$

reemplazando ec. (35) en ec. (29) y tomando en cuenta la ec. (28) se agrupan términos de orden (ϵ^0) y de orden (ϵ) y se llega a la siguiente ecuación.

$$(1-r^2) \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} - \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right] \right\} + 4 \left[v + r \frac{\partial v}{\partial r} \right] = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{A_{\alpha} \cos n\theta}{4^2 6^2 \dots [2(\alpha+1)]^2} \sum_{\substack{\beta=0 \\ \text{par}}}^{2(\alpha-1)} r^{n+\beta} [4(\alpha+1)^2 - (n+\beta+2)^2 + n^2] \quad (36)$$

Donde:

$$A_{\alpha} = \frac{\Omega^{\alpha} d^{\alpha} A}{dt^{\alpha}} \quad (37)$$

Se supone

$$v = w(r, t) \cos n\theta \quad (38)$$

$$w = W(r, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_{\alpha} \sum_{\substack{\gamma=0 \\ \text{par}}}^{2(\alpha-1)} C_{\alpha\gamma} r^{n+\gamma} \quad (39)$$

se reemplazan las ecs. (38) y (39) en ec. (36) y se llega a

$$C_{\alpha\gamma} = \frac{-[4(\alpha+1)^2 - (n+\beta+2)^2 + n^2]}{4\{4^2 6^2 \dots [2(\alpha+1)]^2\} (n+\gamma+1)} \quad (40)$$

los $C_{\alpha\gamma}$ son coeficientes que hacen converger más rápido a V y W . De manera similar se procede para encontrar los $C_{\alpha\gamma}$ para K perturbaciones;

$K = 1, 2, 3, \dots$, luego

$$C_{\alpha\gamma K} = \frac{-[4(\alpha+1)^2 - (n_K + \beta + 2)^2 + n_K^2]}{4\{4^2 6^2 \dots [2(\alpha+1)]^2\} (n_K + \gamma + 1)} \quad (41)$$

donde n_K : grado de la perturbación K .

Así

$$V_K = w_K \cos n_K \theta \quad (42)$$

$$W_k = \sum_{\alpha=1}^{\infty} A_{\alpha} \sum_{\delta=0}^{2(\alpha-1)} C_{\alpha \delta} k^{\delta} r^{n_k + \delta} \quad (43)$$

De esta manera queda totalmente estructurado el método de solución para u, haciéndose extensivo éste para cualquier función forzante ϕ cuya expresión matemática se conozca y además para cualquier sección de ducto que se genere por el procedimiento anterior. Para el estudio de flujo linealmente acelerado y flujo pulsante se analiza la sección de la figura 7 en sus semiejes \overline{AB} y \overline{CD}

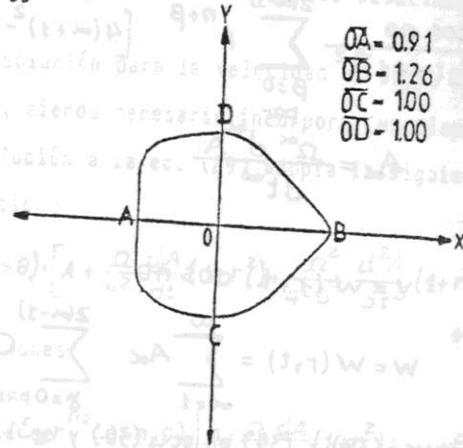


FIGURA 7. SECCIÓN ELEGIDA PARA EL ESTUDIO Y SUS EJES \overline{AB} Y \overline{CD} .

FLUJO LINEALMENTE ACCELERADO

Este flujo tiene como expresión adimensional

$$\phi = 1 + t \quad (44)$$

Reemplazando en la ec. (28) se obtiene:

$$4A + \Omega \frac{dA}{dt} + \frac{\Omega^2}{4^2} \frac{d^2A}{dt^2} + \dots = 1 + t \quad (45)$$

Así)
$$A = \frac{1 + t - \Omega/4}{4} \quad (46)$$

FLUJO PULSANTE

El flujo pulsante tiene como expresión adimensional

$$\phi = 1 + \alpha \cos t \quad ; \quad 0 < \alpha < 1 \quad (47)$$

reemplazando en la ec. (28) se obtiene

$$4A + \Omega \frac{dA}{dt} + \frac{\Omega^2}{4^2} \frac{d^2A}{dt^2} + \dots = 1 + \alpha \cos t \quad (48)$$

$$A = 0,25 + B_1 \sin t + B_2 \cos t \quad (49)$$

donde:

$$B_1 = \frac{\alpha K_1}{K_1^2 + K_2^2} \quad ; \quad B_2 = \frac{\alpha K_2}{K_1^2 + K_2^2} \quad (50)$$

$$K_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Omega^{2n+1}}{[2^{2n} (2n+1)!]^2} \quad ; \quad K_2 = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \Omega^{2n}}{[(2-2)(2-3)\dots(2-2n)]^2} \quad (51)$$

Las series para K_1 y K_2 son convergentes para cualquier valor de Ω perteneciente a los números Reales.

Finalmente se entregan valores numéricos en forma de gráficos como en figuras 8, 9 y 10, para la velocidad u, esfuerzo de corte τ y velocidad media U. El esfuerzo de corte se logra de acuerdo a la expresión:

$$\tau = - \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (52)$$

Y la velocidad media de acuerdo a la expresión

$$U = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^r u r dr d\theta \quad (53)$$

La forma en que se lograron las figuras 8, 9 y 10, fue computacionalmente debido a la inmensa longitud de las expresiones para u, τ y U.

CONCLUSIONES

Ha sido desarrollada la solución para flujo laminar impermanente en ductos de secciones complejas aprovechando los resultados iniciales desarrollados para flujo laminar impermanente en ductos de secciones circulares [7] y para flujo laminar permanente en ductos de secciones complejas [5].

El caso permanente es usado en el análisis previo de esta investigación, pues, da una metodología analítica que permite generar un conjunto amplio de soluciones exactas para secciones no convencionales.

El parámetro λ (entre 0 y -1) entrega las curvas de isovelocidades que permiten apreciar en forma visual en una sección transversal (graficada por un computador) como se desplaza el fluido en capas laminares concéntricas (Figura 2).

El parámetro ε límite es un resultado importante que permite generar secciones transversales límites para las cuales las curvas son cerradas.

Los resultados numéricos permiten visualizar que:

- Para Flujo Linealmente acelerado los valores de u , τ y U crecen con el tiempo debido a la naturaleza de $\bar{\phi} = 1 + t$.
- Para flujo pulsante con $\bar{\phi} = 1 + 0.5 \cos t$ los valores de u , τ y U se repiten cada cierto tiempo $t = 2\pi$, debido a la periodicidad de la función coseno.

Tanto para flujo: acelerado, pulsante o cualquier otro flujo de esta vasta familia y con cualquier tipo de sección generada, es aplicable la metodología o estructura de solución lograda para flujos laminares impermanentes.

Se confía que los resultados logrados podrán contribuir en alguna ma-

nera para el análisis de flujo arterial, especialmente en casos donde por alguna razón fisiológica las secciones de los conductos sanguíneos se alejen de la geometría circular.

REFERENCIAS

- [1] Suárez, B.O., 1981. Estudio de Soluciones Exactas para Flujo Laminar Permanente en Ductos de Secciones No-Convencionales, Universidad de Santiago de Chile.
- [2] Plata, W. E., 1982, Flujo Laminar en Ductos de Secciones No-Convencionales, Trabajo de Titulación de Ingeniería Civil Mecánica, Universidad de Santiago de Chile.
- [3] Parada, H. A., 1982, Flujo Permanente en Ductos de Secciones Complejas, Trabajo de Titulación de Ingeniería Civil Mecánica, Universidad de Santiago de Chile.
- [4] Olivares, J. A., 1983, Flujo Laminar Estacionario en Ductos Rectos con Secciones Derivadas a Partir de Soluciones Para Ductos Regulares, Trabajo de Titulación de Ingeniería Civil Mecánica, Universidad de Santiago de Chile.
- [5] M.F. Letelier S., "Flujo Laminar Permanente en Ductos de Secciones Complejas", VI Congreso Nacional de Ingeniería Hidráulica, Santiago, 1983.
- [6] M.F. Letelier S. AND H.J. Leutheusser, "Laminar Flow in Conduits of Unconventional Shape". XVI th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Lyngby, Denmark, 1984.
- [7] M.F. Letelier S. & A. Gutiérrez S., "Laminar Pulsating Flow in Conduits of Unconventional Shape", Accepted for The Proceedings of the X Canadian Congress of Applied Mechanics, London, Canada, 1985.

$$u = 1 - r^2 + 0.384 (r^3 \cos 3\theta) + \lambda \quad u = 1 - r^2 + 0.25 (r^4 \cos 4\theta) + \lambda$$

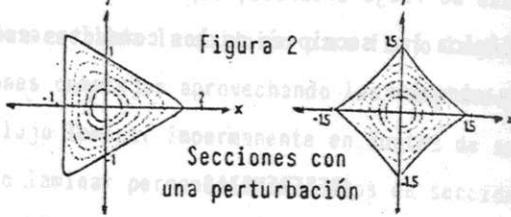


Figura 2

Sección de ducto para $\epsilon = 0.384$; $n = 3$
Curvas de Isovelocidades.

Sección de ducto para $\epsilon = 0.25$; $n = 4$
Curvas de Isovelocidades.

Sección de ducto para $\epsilon = 0.384$; $n = 3$
Curvas de Isovelocidades.

$$u = 1 - r^2 + 0.15 r^3 \cos 3\theta + 0.09 r^5 \cos 5\theta \quad u = 1 - r^2 + 0.2 r^2 \cos 2\theta + 0.04 r^7 \sin 7\theta$$

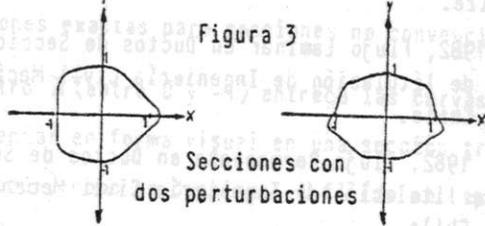


Figura 3

Sección de ducto para $\epsilon = 0.384$; $n = 3$
Curvas de Isovelocidades.

Sección de ducto para $\epsilon = 0.25$; $n = 4$
Curvas de Isovelocidades.

$$u = 1 - r^2 + 0.01 r^3 \cos 3\theta + 0.1 r^5 \sin 5\theta + 0.1 r^4 \cos 4\theta$$

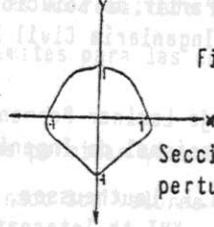
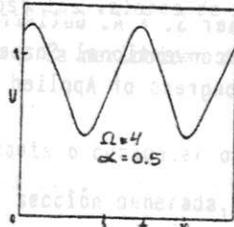
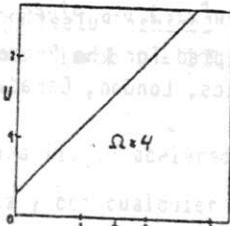


Figura 4

Sección de ducto para $\epsilon = 0.384$; $n = 3$
Curvas de Isovelocidades.



Velocidad media para flujo acelerado

Velocidad media para flujo pulsante

Figura 8. Velocidad Media.

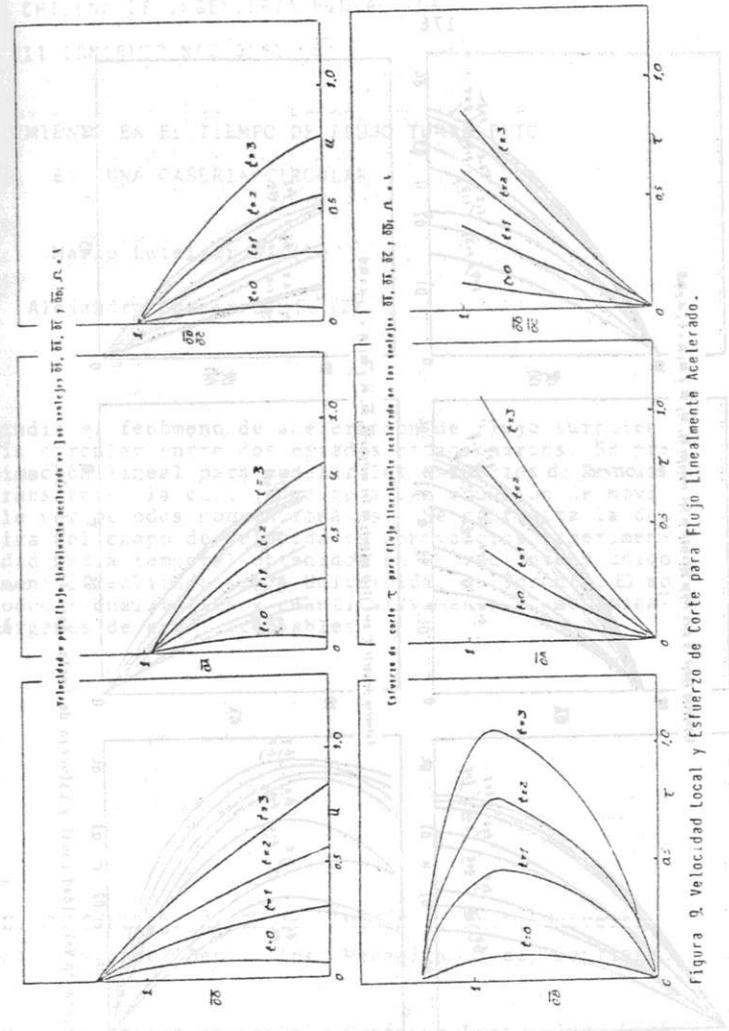


Figura 9. Velocidad Local y Esfuerzo de Corte para Flujo Linealmente Acelerado.

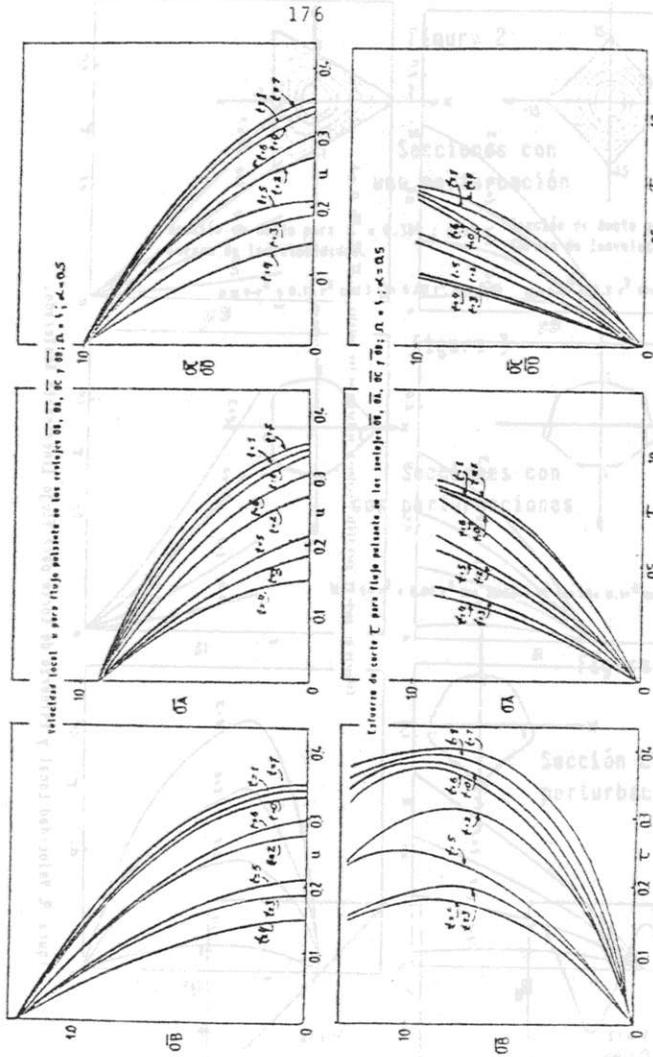


Figura 10. Velocidad Local y Esfuerzo de Corte, para flujo pulsante.

Figura 8. Velocidad Media.

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA
VII CONGRESO NACIONAL

ESTABLECIMIENTO EN EL TIEMPO DE FLUJO TURBULENTO
EN UNA CAÑERIA CIRCULAR

Mario Letelier S. (1)

Alejandro Gutiérrez S. (2)

Resumen: Se estudia el fenómeno de aceleración de flujo turbulento en una cañería circular entre dos estados estacionarios. Se presenta una aproximación lineal para modelar los esfuerzos de Reynolds en el proceso transiente, la cual conduce a una ecuación de movimiento integrable por métodos convencionales. Se contrasta la descripción analítica del campo de velocidades con valores experimentales de velocidad media temporal obtenidos en un reciente y único programa experimental realizado en la Universidad de Toronto. El modelo logra reproducir cualitativa y cuantitativamente el movimiento, dentro de márgenes de error aceptables.

- (1) Ing. Civil U. de Santiago de Chile. M.A.Sc., Ph.D. Universidad de Toronto. Profesor Depto. Ing. Mecánica U. de Santiago de Chile.
- (2) Ing. Civil U. de Santiago de Chile. Profesor Depto. Ing. Mecánica U. de Santiago de Chile.