

conveniencia de interpretar los gráficos en forma reiterada a modo de uniformar el criterio de interpretación.

- Al usar la ACF para determinar los grados de diferenciación no estacional y estacional (d y D respectivamente) necesarios para lograr la estacionariedad de la serie, se requiere un proceso de tanteos que también es bastante subjetivo.

En la práctica, algunos modelos considerados como estacionarios en esta etapa, resultan posteriormente ser no estacionarios en la etapa de determinación de los parámetros (Brown et al. 1983). Dado que es más conveniente trabajar con series no diferenciadas, es necesario notar que, la causa de la no estacionariedad de una serie hidrológica, puede en general ser analizada de los registros originales y corregida si es posible.

- Las funciones inversas, de proposición relativamente reciente, para mejorar el proceso de identificación de modelos ARIMA, no resultan ser tan ventajosas y concluyentes como sus autores aducen. Sin embargo, ellas permiten, en la mayoría de los casos, respaldar las conclusiones que pueden extraerse de la ACF y de la PACF. En general puede decirse, que la ACF es la función que tiene el comportamiento más claramente identificable según las pautas indicadas en el punto 4.

BIBLIOGRAFIA

Box G.E.P. y Jenkins G.M. (1970) "Time Series Analysis Forecasting and Control". Holden Day Inc., San Francisco, California.

Brown E. y Torretti E. (1978) "Experimentación con el Modelo de Markov de Primer Orden en la Generación Estocástica de Caudales" Centro de Recursos Hidráulicos, Depto. de Ing. Civil, Universidad de Chile. CRH 78-9-I.

Brown E., Vargas X. y Salas J.P. (1983) "Selección de Modelos ARIMA para Series de Tiempo Hidrológicas". Centro de Recursos Hidráulicos, Depto. de Ing. Civil, U. de Chile (en prensa).

Cleveland W.S. (1972) "The inverse autocorrelations of a time series and their applications". Technometrics, Vol. 14, N° 2.

Hipel K.W., McLeod A.I. y Lennox W.C. (1977) "Advances in Box - Jenkins Modeling 1. Model Construction". Water Resources Research Vol. 13, N° 3.

GENERACION DE PRECIPITACIONES DIARIAS  
MEDIANTE UN PROCESO DE MARKOV SIMPLE

Ernesto Brown F. (1)

Ximena Vargas M. (1)

Juan Arrese L. (2)

RESUMEN

se presentan aquí los resultados de la generación de series de precipitaciones diarias, mediante un proceso estocástico simple de Markov. Estos resultados se comparan a nivel anual con aquellos obtenidos por Brown y Cisternas (1978) con un modelo que combinaba un proceso de Poisson para la ocurrencia de tormentas, con un proceso de Markov simple, para generar la lluvia en los días de tormenta. Se discuten los resultados obtenidos y se comparan las ventajas y desventajas de ambos procedimientos.

- 
- (1) Ingenieros Civiles; Profesores e Investigadores Centro de Recursos Hidráulicos. Departamento de Ingeniería Civil. Universidad de Chile.
  - (2) Memorista. Centro de Recursos Hidráulicos. Departamento de Ingeniería Civil. Universidad de Chile.

1. INTRODUCCION

En lo que se refiere a modelos de precipitaciones diarias, Brown y Cisternas (1978 a, b) hacen una recopilación y análisis bastante completo de los trabajos y resultados obtenidos al respecto. En el presente trabajo se exponen los resultados principales que se han obtenido de la aplicación de un modelo de generación de precipitaciones diarias mediante un proceso de Markov simple. Esta idea no es ciertamente nueva, aún cuando los resultados que al respecto conocen los autores (Kraeger, 1971; Khanal y Hamrick, 1971; Haan et al. 1976) son relativamente incompletos o poco específicos en algunos aspectos. Consecuentemente se ha creído de interés mostrar los presentes resultados y compararlos con aquellos obtenidos por Brown y Cisternas (1978 a, b).

Este trabajo debe considerarse una extensión de lo presentado por Brown y Cisternas (1978 a, b). La diferencia fundamental radica en que, en este modelo, todo el proceso de generación de precipitaciones diarias se realiza mediante un proceso Markoviano de primer orden; en cambio, en el modelo presentado por Brown y Cisternas (1978 a, b) los períodos inter-tormentas se modelaban según una distribución de frecuencias exponencial, resultante de considerar la ocurrencia de tormentas como un proceso de Poisson; sólo los períodos de días con lluvia, se modelaban de acuerdo a un proceso Markoviano. En la versión de este nuevo modelo que se presenta en este trabajo, se considera sólo la generación en un punto o localización.

2. FUNDAMENTOS DEL MODELO

El modelo considera las siguientes hipótesis básicas:

- Se puede dividir el año hidrológico en un conjunto de diferentes estaciones climáticas, dentro de las cuales se supone que se mantienen las características estadísticas básicas del proceso de

lluvia diaria.

- para cada estación climática se puede considerar las magnitudes de lluvia diaria en forma clasificada.

Dentro de cada estación climática, la ocurrencia en cada día, de una cierta clase, sigue un proceso de Markov simple. Vale decir, la lluvia clasificada de un día queda condicionada sólo por la lluvia clasificada del día precedente, de acuerdo con las probabilidades de transición históricas, de una clase a otra, dentro de esa estación climática.

- La primera clase siempre define el estado de precipitación diaria nula; para la última clase se supone que las magnitudes quedan determinadas por una distribución de frecuencias abierta hacia la derecha, cuyos parámetros son determinados a base de los valores históricos.

Una vez generada la clase para un día determinado, para todas las clases salvo la primera, debe generarse una magnitud de lluvia. Esta magnitud se genera según la distribución de frecuencias empírica, observada históricamente, para las lluvias diarias dentro de cada clase. Para la última clase se usa una distribución exponencial.

3. APLICACION DE MODELO Y RESULTADOS OBTENIDOS

De acuerdo a las hipótesis básicas mencionadas en el punto anterior, se confeccionó el software computacional del modelo y se hizo una aplicación en la que se consideraron los datos básicos de la estación pluviométrica de Constitución (18 años completos de estadística). El software computacional hace uso de la subrutina RANDU (IBM SSP) para producir los números aleatorios uniformemente distribuidos (0,1) que se requieren en todos los procesos de generación involucrados en el modelo. Estos se llevan a cabo siguiendo las metodologías expuestas por Brown y Cisternas (1978 a, b).

1. INTRODUCCIÓN En la aplicación se consideraron las siguientes características específicas:

- Cada año se consideró dividido en 12 estaciones climáticas, cada una correspondiente a un mes calendario.
- Para todas las estaciones climáticas, se consideraron 6 clases para las lluvias diarias, a saber:

Clase	Intervalo (mm)
1	0,0
2	(0,0-4,0]
3	(4,0-8,0]
4	(8,0-15,0]
5	(15,0-30,0]
6	Mayor que 30,0

La experimentación con el modelo contempló la generación de 30 series, de 25 años cada una, de lluvias diarias. Para generar estas series se usó, en cada caso, una "semilla" básica diferente para la generación de los números aleatorios, la que a su vez generaba las "semillas" iniciales, para cada uno de los distintos procesos del modelo, internamente dentro del software computacional. En todo caso, con el objeto de minimizar los efectos de borde, siempre se generaba una secuencia de 26 años, no considerándose el año inicial con fines de análisis.

Un resumen de los resultados de la generación, en términos de valores actuales, se presenta en la Tabla 1. La notación que se emplea en esta Tabla, así como también en las siguientes, se explica en la lista que se incluye al final del trabajo. En la Tabla 2 se presenta un resumen de los resultados a nivel mensual.

TABLA N°1

RESUMEN DE RESULTADOS A NIVEL ANUAL

$\bar{x}$ his. (mm)	752,7	$s$ his. (mm)	246,6	$c_h^v$	0,33
$\bar{x}$ gen. (mm)	755,8	$\bar{s}$ gen. (mm)	177,6	$\bar{c}_v^g$	0,24
$s_{\bar{x}}$ (mm)	33,5	$s_s$ (mm)	25,9	$s_{c_v}$	0,03
$x_h - \bar{x}_g$ (%)	-0,4	$s_s - \bar{s}_g$ (%)	28,0	$c_h^v - \bar{c}_v^g$ (%)	27,3

$x_{\text{año max}}$ h (mm)	1.191,7	$x_{\text{año min}}$ h (mm)	361,9	$x_{\text{max}}^{24}$ h (mm)	154,1
$x_{\text{año max}}$ g (mm)	1.304,6	$x_{\text{año min}}$ g (mm)	317,7	$x_{\text{max}}^{24}$ g (mm)	203,4
$x_{\text{año max}}$ g (mm)	1.144,7	$\bar{x}_{\text{año min}}$ g (mm)	443,6	$\bar{x}_{\text{max}}^{24}$ g (mm)	128,8

n his.	68,1
$\bar{n}$ gen.	68,6
n max gen.	73,2
n min gen.	65,4

4. ANALISIS DE LOS RESULTADOS Y COMPARACION CON AQUELLOS DE BROWN Y CISTERNAS (1978 a, b)

El análisis de las Tablas 1 y 2 permite establecer lo siguiente:

- La precipitación anual generada, promedio de todas las series, apenas difiere de la media histórica (0,4%). Sin embargo, la desviación estándar de la precipitación media anual generada en cada serie de 25 años, es significativa, alcanzando aproximadamente a un 4,4% del valor medio general.
- Las precipitaciones mensuales generadas, promedio de todas las series, difieren en general en menos de 10% de los valores históricos. Las desviaciones estándar de las precipitaciones medias

TABLA N°2 RESUMEN DE RESULTADOS A NIVEL MENSUAL

	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	ENE	FEB	MAR
$\bar{x}$ his (mm)	41,2	109,1	179,9	156,7	113,8	58,3	41,2	18,9	14,1	5,2	2,9	11,4
$\bar{x}$ gen (mm)	39,8	111,6	172,1	166,4	113,8	61,9	34,6	21,1	14,9	5,7	3,0	11,0
$s_x$ (mm)	6,0	15,6	20,2	13,7	13,3	10,2	5,2	4,3	3,1	1,5	1,2	3,2
$\bar{x}_h - \bar{x}_g$ (%)	3,3	-2,3	4,3	-6,2	0,0	-6,2	16,0	-11,5	-5,3	-9,6	-4,1	3,9
$s$ his (mm)	56,5	76,6	107,2	95,3	74,2	53,7	22,6	21,1	22,7	7,6	6,4	17,8
$s$ gen. (mm)	31,1	70,5	89,5	85,7	63,6	49,9	27,0	20,7	16,5	8,3	6,1	19,6
$s_s$ (mm)	5,3	9,8	15,3	16,5	8,1	9,9	4,7	3,2	3,9	2,1	2,0	6,1
$s_h - s_g$ (%)	44,6	8,0	16,5	10,1	14,3	7,1	-19,5	1,9	27,3	-9,2	4,7	-10,1
$c_v$	1,37	0,70	0,60	0,61	0,65	0,92	0,55	1,12	1,61	1,46	2,21	1,56
$c_v$	0,79	0,64	0,52	0,51	0,57	0,81	0,79	1,00	1,12	1,48	2,07	1,80
$s_c$	0,13	0,08	0,09	0,08	0,08	0,14	0,12	0,13	0,15	0,27	0,36	0,27
$c_v - c_g$	42,2	9,0	12,9	15,8	12,6	11,5	-43,1	10,6	30,7	-1,3	6,4	-15,6
$n$ his (días)	4,8	9,4	12,4	11,8	8,8	6,2	6,0	2,7	2,3	1,1	1,1	1,7
$n$ gen. (días)	4,7	9,7	11,9	12,3	9,0	6,5	5,5	2,7	2,5	1,1	1,1	1,6
$x_{max}^{mes}$ h (mm)	225,8	291,1	447,7	400,7	226,5	224,4	101,7	77,1	44,0	28,1	24,3	65,4
$x_{max}^{mes}$ g (mm)	176,4	439,2	519,9	583,9	348,1	290,7	148,0	107,7	107,0	52,8	45,8	142,7
$x_{max}^{mes}$ g (mm)	119,0	289,7	380,7	378,7	261,6	199,4	103,9	75,6	63,2	30,2	23,4	75,1

mensuales de cada serie, son relativamente altas, especialmente en los meses mas secos.

Los números de días de lluvia generados en promedio, tanto a nivel mensual como anual, no son significativamente diferentes de los valores históricos.

Las desviaciones estándar de las series de valores anuales generados son significativamente menores que la correspondiente a la serie histórica; el valor medio generado de la desviación estándar anual, es un 28% menor que la histórica. A nivel mensual, los valores de las desviaciones estándar promedio generadas, son también, en general, menores que la histórica; sin embargo en este caso, las diferencias porcentuales con los valores históricos son inferiores al 20% en general, e incluso en algunos meses, el valor promedio generado supera al valor histórico.

Las tendencias cualitativas que exhiben las desviaciones estándar, según el párrafo anterior, también se pueden observar en los valores de los coeficientes de variación.

Los valores generados, en cuanto a lluvias máximas y mínimas anuales, y en cuanto a valores máximos diarios, aparecen como razonables y dentro de lo que es de esperar en la realidad.

Los resultados obtenidos en la presente experimentación, es posible compararlos con los obtenidos por Brown y Cisternas (1978 a, b). Cabe señalar que el objeto último de este trabajo, no era el establecer esta comparación, y es por eso que en este caso no se utilizan los mismos datos de los autores señalados. Asimismo, sólo es factible una comparación a nivel de valores anuales, dado que aquí se ha utilizado una mayor discretización en estaciones climáticas, que lo que consideraron dichos autores.

Brown y Cisternas (1978 a, b) para la estación pluviométrica Santiago, obtuvieron los resultados que se resumen

en la Tabla 3. En esta tabla se han señalado sólo aquellos valores que de alguna forma se independizan de las magnitudes absolutas de la precipitación, que corresponden en este caso a Santiago, y permiten una comparación con los valores análogos obtenidos en la presente experimentación, con la estación pluviométrica de Constitución. Puede observarse de la Tabla 3, que la diferencia entre los valores medios generados, porcentualmente, es levemente superior a la que se obtuvo en este trabajo; por otra parte, los coeficientes de variación generados, son en promedio inferiores al histórico, al igual que en este trabajo, encontrándose incluso una diferencia porcentual algo menor que la aquí obtenida.

TABLA N°3

RESUMEN DE RESULTADOS A NIVEL ANUAL  
OBTENIDOS POR EL MODELO DE BROWN Y CISTERNAS (1978 a, b)

$\bar{x}_h - \bar{x}_g (\%)$	- 1,7
$c_v^h$	0,43
$\bar{c}_v^g$	0,32
$c_v^h - \bar{c}_v^g (\%)$	24,6

La comparación, parcial, realizada, señala que los resultados de ambos modelos, a nivel anual, pueden considerarse bastante similares entre si. Se puede esperar que, a nivel de resultados mensuales comparables, también se obtendrían conclusiones análogas. La ventaja principal del modelo concebido por Brown y Cisternas, era que lograba un ahorro importante de tiempo de computación, generando los períodos de días sin lluvia según una distribución exponencial. Sin embargo, en la actualidad, las potencialidades de los equipos han aumentado enormemente y consecuentemente, los costos han bajado considerablemente; en estas condiciones es posible usar un modelo como el aquí presentado, que usa un proceso Markoviano simple tanto para períodos sin lluvia como para

períodos con lluvia, lo que es conceptualmente más simple, a un costo razonable y produciendo resultados que son por lo menos tan buenos como los que entregaba el modelo anterior.

Cabe señalar que los tiempos de proceso de este modelo son del orden de un 20% de aquellos que requería el modelo de Brown y Cisternas, considerando que actualmente se dispone de un computador IBM 3031, mientras que anteriormente el equipo usado era un IBM 370/145.

El modelo aquí presentado, es fácilmente extendible a la generación simultánea en mas de una estación, para lo cual podría utilizarse un procedimiento análogo al usado por Brown y Cisternas (1978 a, b),

5. PRINCIPALES CONCLUSIONES

En forma resumida, las principales conclusiones que pueden extraerse de este trabajo son:

- La generación de precipitaciones diarias usando un modelo basado en un proceso de Markov simple, produce resultados en general aceptables.
- Al igual que en otros tipos de modelos de generación estocástica de series hidrológicas, el problema principal que exhiben los resultados, es el de producir desviaciones estándar de los valores, en general, sistemáticamente inferiores a las observadas.
- El modelo aquí presentado, produce resultados, a nivel anual, que son comparables con los obtenidos por Brown y Cisternas (1978 a, b), con una concepción que es sustancialmente mas simple en el presente caso.

BIBLIOGRAFIA

- Brown, E. y E. Cisternas "Modelo de generación de precipitaciones diarias". VIII Congreso Latinoamericano de Hidráulica. Comité Regional Latinoamericano AIH. Quito, Ecuador, Octubre 1978 (a).
- Brown, E. y E. Cisternas "Formulación y Aplicación de un Modelo de Generación Estocástica de Precipitaciones Diarias". Centro de Recursos Hidráulicos, Departamento de Obras Civiles, Universidad de Chile. Publicación CRH.78.7.I 1978 (b).
- Haan C.T., D.M. Allen y J.O. Street "A Markov Chain Model of Daily Rainfall". Water Resources Research. Jun. 1976.
- Khanal N.N. y R.L. Hamrick "A Stochastic Model for Daily Rainfall Synthesis". Proc. Symposium on Statistical Hydrology. Tucson. 1971.
- Kraeger, B.A. "A Stochastic Monthly Streamflow by Multistation Daily Rainfall Generation". Stanford University-Technical Report N°152, Dic. 1971.

NOTACION

- $c_v^h$  : coeficiente de variación histórico.
- $\bar{c}_v^g$  : promedio de los coeficientes de variación generados.
- n his. : número de días de lluvia promedio histórico.
- $\bar{n}$  gen. : promedio del número de días de lluvia promedio generado.
- n máx.gen. : máximo número de días de lluvia promedio generado.
- n mín.gen. : mínimo número de días de lluvia promedio generado.
- $s_h, s_{his.}$  : desviación estándar histórica.
- $\bar{s}_g, \bar{s}_{gen.}$  : promedio de las desviaciones estándar generadas.
- $s_s$  : desviación estándar de las desviaciones estándar generadas.
- $s_{cv}$  : desviación estándar de los coeficientes de variación generados.

- : desviación estándar de los promedios generados.
- : precipitación mensual máxima histórica.
- : precipitación mensual máxima generada.
- : promedio de las precipitaciones mensuales máximas generadas.
- : precipitación anual máxima histórica.
- : precipitación anual máxima generada.
- : promedio de las precipitaciones anuales máximas generadas.
- : precipitación diaria máxima histórica.
- : precipitación diaria máxima generada.
- : promedio de las precipitaciones diarias máximas generadas.
- : precipitación anual mínima histórica.
- : precipitación anual mínima generada.
- : promedio de las precipitaciones anuales mínimas generadas.
- $\bar{x}_{his.}$  : precipitación media histórica.
- $\bar{x}_{gen.}$  : promedio de las precipitaciones medias generadas.

$s_x$   
 mes h  
 máx  
 mes g  
 máx  
 mes g  
 máx  
 año h  
 máx  
 año g  
 máx  
 año g  
 máx  
 24 h  
 máx  
 24 g  
 máx  
 24 g  
 máx  
 año h  
 mín  
 año g  
 mín  
 año g  
 mín

Una de las soluciones numéricas entregadas por el modelo simulando un caso teórico de solución conocida.

Una del modelo a la cuenca Chacabuco - Volpaico ha para el estudio de las condiciones permanentes, reproduciendo la generación de niveles estáticos mediante un ajuste de parámetros (de probabilidad). En una etapa posterior de este estudio se aplicará a condiciones impermanentes, para finalmente estudiar las distintas reglas de explotación y así definir un uso óptimo del recurso subterráneo en la cuenca.

Ingeniero Civil, Profesor e Investigador del Centro de Recursos Hidráulicos, Universidad de Chile.  
 Director de Investigación del Centro de Recursos Hidráulicos, Universidad de Chile.