

FORMULACION Y DESARROLLO DE UN MODELO MATEMATICO PARA SIMULAR LA EROSION PLUVIAL DIFUSA DE SUELOS

Luis Ayala R. (1)

María Luisa Córdova M. (2)

RESUMEN

Se presentan las bases conceptuales y se derivan las ecuaciones para la simulación matemática de las fases permanente e impermanente del proceso de erosión difusa de suelos, debido al efecto combinado del impacto de gotas de lluvia y el flujo superficial. La simulación se basa en suponer que el proceso de erosión se compone de dos subprocesos: (1) erosión por salpicadura en que la pérdida de suelo se debe a la disgregación por impacto de las gotas de lluvia y al transporte de partículas sólidas por salpicadura y (2) erosión en manto o por raspado, donde la pérdida de suelo es causada por el arrastre de sedimento que genera el flujo superficial. La modelación del primer subproceso se hace utilizando una relación de Ellison modificada, mientras que la del segundo subproceso se basa en la ecuación diferencial de continuidad para el sedimento, apoyada en una ecuación de gasto sólido. El flujo superficial, que se hace intervenir en el modelo como elemento amortiguador del impacto de las gotas de lluvia y vehículo para el transporte de sedimento, se modela utilizando la aproximación de la onda cinemática.

- (1) Ingeniero Civil. Profesor e Investigador del Centro de Recursos Hidráulicos, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.
- (2) Ingeniero Civil, Universidad de Chile.

Introducción

Los procesos de erosión generados por lluvias revisten gran importancia práctica, tanto por el efecto de degradación que significan para los suelos como por el sedimento que producen.

En este trabajo se aborda el tema de la modelación de la erosión difusa producida a escalas espaciales pequeñas (parcelas), donde los subprocesos dominantes son la disgregación y el transporte. En el pasado este problema ha sido enfocado desde un punto de vista empírico, haciendo uso de ecuaciones del tipo "ecuación universal de pérdida de suelo" (Córdova, 1982). Las soluciones que se han dado por esta vía han tenido aplicaciones en áreas agronómicas fundamentalmente.

En los últimos años sin embargo, por la necesidad de dar respuestas a problemas más amplios y complejos (por ejemplo, producción de sedimentos a nivel de cuencas, transporte de contaminantes mediante sedimentos, etc.) se ha ido derivando paulatinamente hacia el empleo de técnicas matemáticas más avanzadas como las de simulación. La aplicación de estas técnicas se encuentra hoy día en pleno desarrollo gracias a las numerosas investigaciones emprendidas, tanto teóricas como experimentales, las cuales han aportado sistemáticamente, mayor y mejor información sobre los fenómenos de erosión.

Bases conceptuales para la modelación del fenómeno

El proceso de erosión difusa en una ladera puede visualizarse compuesto fundamentalmente de dos subprocesos, no enteramente independientes entre sí : erosión por salpicadura de suelo y erosión en manto o por raspado.

La erosión por salpicadura se relaciona directamente con el impacto y salpicadura de gotas de lluvia desde el suelo. El impacto de las gotas produce disgregación de las capas superficiales de suelo y la salpicadura, arrastre de partículas sólidas que

se traduce en pérdida neta de suelo.

La erosión en manto o por raspado, es causada por el flujo superficial generado por la lluvia sobre la ladera. Asociado con dicho flujo se generan esfuerzos de corte sobre la superficie del suelo; si dichos esfuerzos son mayores que la resistencia al movimiento que oponen las partículas sólidas, ocurre la erosión en manto.

El desarrollo del perfil de flujo superficial condiciona la ocurrencia de los dos subprocesos de erosión descritos. En efecto, durante la fase transitoria del flujo, la erosión por salpicadura constituye la componente dominante, pero a medida que se alcanza un espesor suficiente, ésta cede el paso a una erosión en manto dominante. Durante la fase permanente, después que el tiempo ha excedido el tiempo de concentración sobre la ladera, se distinguen tres zonas, donde dependiendo del espesor de la lámina de agua, domina la erosión por salpicadura, la erosión en manto o ambas (Fig. 1).

Modelación matemática de la erosión por salpicadura

Las gotas al chocar contra una superficie sólida se deforman y a su vez deforman a la superficie, producto de la brusca deseleración a que se ven sometidas. En el proceso se generan grandes presiones, y un flujo lateral y también intersticial, si el medio sólido es poroso.

Para evaluar cuantitativamente este proceso, en el presente trabajo se consideraron dos alternativas y con ellas se dedujo un modelo que posteriormente se integró el de erosión en manto. Una de las alternativas la proveyó el estudio clásico de Ellison (1945) según el cual la erosión por salpicadura de un suelo se expresa a través de la relación empírica :

$$E = K V^{4.32} D^{1.07} I^{0.65} \quad (1)$$

donde E es la erosión de muestras de suelo al cabo de 30 min de ex

posición a una lluvia de intensidad I (pulg/hr), con gotas caracterizadas por una velocidad V (pies/seg) y un diámetro-D (mm).

Frente a esta alternativa empírica se opuso un enfoque teórico basado en un modelo planteado por Springer (1976). Según este modelo la erosión de materiales sólidos depende directamente de las propiedades de dicho material y de la presión instantánea que se genera en la interfase líquido-sólido, al momento en que la gota impacta la superficie sólida (Fig. 2). La presión de impacto se evalúa considerando a la gota y al material sólido representados, ambos, por dos cilindros lateralmente confinados (se despreña el flujo lateral) dentro de los cuales se propagan frentes de onda (Fig. 3); en la interfase líquido-sólido, la tensión diferencial está dada por :

$$\Delta\sigma^0 = \frac{\rho_L c_L V \cos\theta}{1 + \frac{\rho_L c_L}{\rho_S c_S}} \quad (2)$$

donde ρ y c son respectivamente, la densidad del medio y la velocidad de propagación del sonido en dicho medio, y los subíndices L y S representan a los medios líquidos y sólidos respectivamente; V es la velocidad terminal de caída de las gotas y θ el ángulo con que impactan a la superficie sólida.

Considerando que en general se cumple $\frac{\rho_L c_L}{\rho_S c_S} \ll 1$, la presión de impacto es evaluada simplificando la ec. (2) de la siguiente forma :

$$p = \Delta\sigma^0 = \rho_L c_L V \cos\theta \quad (3)$$

Por otra parte, la pérdida de material se evalúa considerando que ella depende directamente del número de impactos/área (n) por sobre un umbral (n_i) :

$$m = \alpha_1 (n - n_i) \quad (4)$$

donde m es la masa/área de material perdido.

Para evaluar la tasa de erosión, el material se considera compuesto superficialmente por un conjunto de "sitios de impacto" cada uno de los cuales tiene un área igual al área de la sección transversal de la gota ($\frac{\pi D^2}{4}$). La masa de material perdido, expresada en forma adimensional, depende de la probabilidad P de que impacten sobre la unidad de área entre n_i y n gotas :

$$m^* = \frac{m}{\rho_S D} = a_1 P^{a_2} \quad (5)$$

Evaluable P de una distribución probabilística de Weibull, se demuestra que para la pérdida de material dada por :

$$m^* = \frac{4\alpha_1}{\pi D^3} \cdot (n^* - n_i^*) \quad (6)$$

$$\text{donde } n^* = n \frac{\pi D^2}{4} ; \quad n_i^* = n_i \frac{\pi D^2}{4}$$

se cumple :

$$\frac{4\alpha_1}{\rho_S \pi D^3} = a_5 \frac{1}{n_i^{*a_4}} \quad (7)$$

Por otro lado, el número de impactos por sitio n_i^* es función de las características del material (representadas por un parámetro S) y de la presión de impacto p :

$$n_i^* = a_6 \left(\frac{S}{p}\right)^{a_7} \quad (8)$$

Combinando esta ecuación con las anteriores resulta finalmente que la masa perdida por unidad de área y de impacto es :

$$\alpha_1 = k \rho_S D^3 \left(\frac{p}{S}\right)^m \quad (9)$$

Considerando que el número de impactos por unidad área y tiempo depende de la intensidad de la lluvia (I) y del volumen de cada gota (supuesta ésta esférica), la tasa de erosión expresada en masa por

unidad de tiempo resulta :

$$e = k \cdot \rho_s D^3 \left(\frac{P}{S} \right)^m \cdot I \frac{6}{\pi D^3} \quad (10)$$

Reemplazando la presión de impacto de la ec. (3) se tiene finalmente :

$$e = C V^m \cdot I \quad (11)$$

donde C engloba todas las propiedades del material que aparecen en las ecs. (3) y (10). De acuerdo con experiencias realizadas con material sólido compacto, $m = 4.0$ y $K \approx 5 \times 10^{-7}$, si e y V se expresan en unidades del sistema MKS Técnico e I en mm/hr.

En el caso explicado, se ha supuesto que el material es sólido e impermeable. Cuando el material es poroso, el impacto de la gota genera, además de la presión de impacto, una presión de poros que tiende a disgregar el material interiormente. En la Fig. 4 aparece idealizado el proceso de transferencia de momentum de la gota al sólido, representando sus poros por canalículos a través de los cuales fluye parte del líquido. Puede demostrarse mediante este modelo idealizado que la fuerza generada a través de la presión de poros resulta proporcional a la fuerza debido a la presión de impacto. Como consecuencia de ello sigue valiendo la ec. (11) para la tasa de erosión.

Los dos modelos planteados resultan equivalentes si se consideran algunas características propias de las lluvias naturales que causan erosión de suelos. Estas lluvias se caracterizan por una dependencia directa entre el tamaño de las gotas y la intensidad de las mismas. Del mismo modo, la velocidad terminal de caída de las gotas es dependiente de su forma y tamaño, y en consecuencia, también de la intensidad de la lluvia (Ayala e Insausti, 1982).

Utilizando la relación empírica de Laws y Parson para expresar el primer tipo de dependencia :

$$D = 1.24 I^{0.182} \quad (12)$$

con D en mm e I en mm/hr, se tiene reemplazando en la ec. (1) del modelo empírico de Ellison :

$$E = K_0 V^{4.33} I^{0.845} \quad (13)$$

La velocidad terminal de caída de cada gota se evalúa de terminando el coeficiente de arrastre hidrodinámico dado por la expresión de Spilhaus, de lo cual resulta :

$$V = 72.9 D^{1/2} (0.318 - 36 D)^{1/2} \quad (14)$$

Reemplazando en esta expresión, D por el valor dado por la ec. (12) y a su vez, reemplazando V en la ec. (13) resulta :

$$E = K_1 \frac{I^{-0.125}}{(1 - 0.14 I^{0.182})^{0.165}} \cdot V^4 I \quad (15)$$

Al evaluar la fracción que contiene la intensidad de lluvia se constata que esta puede aproximarse, para un rango más o menos amplio, por una constante cercana a 0.6 (de 50 a 500 mm/hr varía de 0.65 a 0.51). Si además, E se expresa como una tasa unitaria de erosión, utilizando para estos efectos el área usada por Ellison en sus experiencias (muestras circulares de diámetro ≈ 0.25 m), se obtiene:

$$e = K_2 V^4 I \quad (16)$$

Donde K_2 tendría un valor cercano a 8×10^{-9} si e se expresa en $\text{kg/m}^2/\text{s}$, V en m/s e I en mm/hr. Como se ve, esta expresión modificada es equivalente a la del modelo teórico, presentándose sólo diferencias en la constante. Dichas diferencias sin embargo, no serían significativas al aplicar el modelo a la erosión por salpicadura de suelos en presencia de flujo superficial, tanto por el amortiguamiento que significa la lámina de agua, como por la realimentación de suelo que significa la salpicadura y el arrastre desde zonas vecinas.

Interacción entre el flujo superficial y la erosión por salpicadura

Durante la fase de formación del flujo superficial, la erosión por salpicadura es afectada por la presencia de la lámina de agua. Esta lámina provee el medio para el transporte del sedimento y también hace la veces de colchón disipador de la energía de las gotas. Para evaluar el efecto amortiguador sobre la salpicadura, se introduce un factor α_s que reduce la tasa de salpicadura cuando ésta ocurre en presencia de la lámina de agua :

$$e = e_{s0} \cdot \alpha_s \quad (17)$$

donde $\alpha_s = \alpha_s(x,t)$ y $0 < \alpha_s < 1$

Si no existe lámina de agua, $\alpha_s = 1$; si la lámina es de un espesor $h > h_L$, $\alpha_s = 0$. La altura de agua límite se define como aquella para la cual la gota disipa toda su energía antes de impactar al suelo y por lo tanto, no genera erosión. En el presente trabajo se ha evaluado considerando la gota esférica e indeformable, cayendo en un medio fluido de idénticas propiedades físicas que la gota (Fig. 5). La ecuación diferencial del movimiento para ese caso es :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_0}{D} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0 ; \quad \frac{dx}{dt} = v \quad (18)$$

$$x = 0 \quad t = 0 \quad v = V$$

siendo x la distancia medida desde la superficie libre, t el tiempo, D el diámetro de la gota, v su velocidad en la lámina, k_0 una constante y V la velocidad terminal de caída de las gotas. Resolviendo la ec. (18) para x resulta :

$$x = \frac{D}{k_0} \text{Ln} \left(\frac{V}{v} \right) \quad (19)$$

Si e_{s0D} denota una tasa de erosión despreciable, y v se calcula de la ec. (16), x representa el límite del espesor de la lámina de

agua para el cual la gota que impacta al suelo produce erosión despreciable :

$$\left. \begin{aligned} \frac{h_L}{D} &= \frac{1}{k_0} \text{Ln} \left(\frac{V}{v_L} \right) \\ v_L &= \left(\frac{e_{s0D}}{K_2 I} \right)^{1/4} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Los valores de la razón $\frac{h_L}{D} = \beta_s$ que se obtienen en función de la intensidad de lluvia para distintas tasas e_{s0} aparecen graficadas en la Fig. 6. Conocida la altura límite h_L de la lámina de agua, el factor α_s se calcula a partir de una relación lineal que cumple con las restricciones impuestas anteriormente :

$$\alpha_s = 1 - \frac{h}{h_L} \quad (21)$$

A partir de lo anterior y utilizando la ecuación de continuidad se calcula la tasa de descenso del suelo debido a la erosión por salpicadura :

$$\frac{dZ_s}{dt} = \alpha_s \frac{e_{s0}}{\gamma_a} \quad (22)$$

siendo γ_a el peso volumétrico seco del suelo.

Modelación matemática de la erosión en manto

La tasa de erosión en manto se determina haciendo un balance local en cada punto de la superficie del suelo, considerando la variación espacial de los esfuerzos de corte de fondo debido a la forma creciente del perfil de flujo superficial. La ecuación diferencial de continuidad aplicada a un elemento de suelo, permite calcular el descenso del terreno por efecto de la erosión :

$$\frac{\partial g_s}{\partial x} + \gamma_a \frac{\partial Z_M}{\partial t} = 0 \quad (23)$$

donde g_s es el gasto sólido de fondo expresado en peso de suelo se

co por unidad de ancho, y x, Z y t son respectivamente, las coordenadas espaciales (paralela y normal a la dirección del flujo) y el tiempo.

Para la evaluación del gasto sólido se utiliza la siguiente expresión propuesta por Kilinc y Richardson (1973) para cuantificar el arrastre por flujo superficial :

$$g_s = K_r (\tau - \tau_c) u^r \quad (24)$$

donde K_r y r son constantes, τ y τ_c los esfuerzos de corte de fondo y crítico del sedimento, y u la velocidad media local. Esta velocidad se evalúa a partir de la teoría de la onda cinemática, utilizando el modelo de Wooding-Eagleson (Vargas et al, 1981) :

$$q = \alpha h^m \quad (25)$$

donde α y m son constantes, q es el caudal y h la altura local del escurrimiento. Por lo tanto :

$$u = \alpha h^{m-1} \quad (26)$$

$$\tau = \gamma h i$$

donde γ es el peso específico del agua e i la pendiente local del plano de carga o de la ladera. Por otra parte, la altura de agua del flujo superficial depende del estado de desarrollo del perfil. Al respecto cabe distinguir 3 situaciones :

- Perfil en desarrollo : $0 < t < t_c$
- Perfil estacionario : $t_c < t < t_R$
- Perfil en desaparición : $t_R < t < t_i$

donde t es el tiempo y t_c , t_R y t_i los tiempos de concentración, de duración de la lluvia y de término del flujo, respectivamente.

Para el perfil en desarrollo, el tiempo que demora una perturbación introducida en el origen en alcanzar una posición x_ω cualquiera en la ladera, está dado por :

$$t_\omega = \left(\frac{x_\omega i_*^{1-m}}{\alpha} \right)^{1/m} \quad (27)$$

siendo i_* la precipitación efectiva sobre la superficie. La propagación de la perturbación define dos zonas en el perfil en desarrollo y como consecuencia de ello, se presentan las siguientes situaciones :

- i) $t \leq t_c$ $0 < x \leq x_\omega$ $h = \left(\frac{x i_*}{\alpha} \right)^{1/m}$
- ii) $t_c < t \leq t_R$ $x_\omega < x < L$ $h = \text{constante}$
- iii) $t_R < t \leq t_i$ $x = \alpha h^{m-1} (h i_* + m (t - t_R))$

Al reemplazar estas ecuaciones en la ec. (26) y ella en la ecuación de gasto sólido (24), se calcula $\partial g_s / \partial x$ en función de los parámetros del perfil de flujo superficial. Con ella se obtiene la ecuación diferencial que rige la pérdida de material por erosión para cada etapa de desarrollo del perfil de flujo superficial :

$$\frac{dz_M}{dt} = f(t, h) \quad (29)$$

Modelación de la erosión total

La erosión total resulta de la superposición de las erosiones por salpicadura y en manto. Esta superposición es en general no-lineal y compleja de modelar. Para abordar este problema, en este trabajo se consideró una superposición lineal, con lo cual la tasa de erosión total está dada por :

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dZ_s}{dt} + \frac{dZ_M}{dt} \quad (30)$$

En la Fig. 7 aparece una tabla que contiene las ecuaciones desarrolladas.

Solución numérica de las ecuaciones

Si i, j denotan los índices espacial y temporal de la discretización de las variables, y Δx_i y Δt_j los respectivos inter

valos, el descenso total (acumulado) de un punto i al cabo de un tiempo $t = \sum_{j=1}^N \Delta t_j$ está dado por :

$$Z_i = \sum_{j=1}^M \left(\frac{\Delta Z}{\Delta t} \right)_{i,j} \Delta t_j \quad (31)$$

De lo anterior resulta que el peso del material perdido en cada tramo, al cabo del mismo tiempo t, puede calcularse como :

$$W_i = \gamma_a \frac{1}{2} (Z_i - Z_{i-1}) \Delta x_i \quad (32)$$

El peso total del material perdido de la ladera de largo $L = \sum_{i=1}^N \Delta x_i$ después de transcurrido un tiempo t es : $W = \sum_{i=1}^N W_i$.

Por consiguiente, a la salida de la ladera, el gasto sólido y la concentración, en cualquier instante están dadas por las expresiones siguientes :

$$g_{sj} = \frac{\Delta W_j}{\Delta t_j} = \frac{W_{j+1} - W_j}{t_{j+1} - t_j} \quad (33)$$
$$c_{sj} = \frac{g_{sj}}{q_j}$$

siendo q_j el caudal de flujo superficial que escurre en el tiempo j.

Estructura computacional y parámetros del modelo

En la Fig. 8 aparece un diagrama de bloques que ilustra las características principales del modelo. De acuerdo a lo indicado en el diagrama, el modelo aparece estructurado como un programa principal que lee los datos de entrada y simula el proceso de erosión. Asimismo forman parte integral del modelo las siguientes subrutinas :

- Subrutina SUBFS : calcula perfil de flujo superficial
- Subrutina RASP : calcula erosión en manto
- Subrutina SALPIC : calcula erosión por salpicadura

- Subrutina BETAS : calcula coeficiente de altura límite
- Subrutina IMPRE : imprime resultados

Los datos de entrada requeridos por el modelo son : largo y pendiente de la ladera, pesos específicos del agua y aparente del sedimento, intensidad y duración de la lluvia, y la tasa de infiltración del suelo. Además de lo anterior, el proceso de simulación necesita de la especificación de los siguientes parámetros :

- Parámetros del flujo superficial : α y m
- Parámetros de la ecuación de gasto sólido : K_r y r
- Tensión tangencial crítica del suelo : τ_c
- Parámetro de la ecuación de erosión por salpicadura : K_2
- Tasa de erosión despreciable : e_{sOD}

Previo a la utilización del modelo, es preciso validar la subrutina de flujo superficial (SUBFS), para determinar α y m .

Las variables de salida del modelo son :

- a) Características del flujo superficial
 - Posición
 - Altura de la lámina de agua
 - Caudal
- b) Características del proceso erosivo
 - Identificación y ubicación del tramo
 - Tasas de erosión por salpicadura, de manto y total
 - Descenso de la ladera
 - Peso/ancho acumulado en el tiempo del suelo perdido fuera de la ladera
 - Gasto sólido/ancho instantáneo a la salida
 - Concentración instantánea del sedimento a la salida

Conclusiones

- El modelo desarrollado permite simular las fases permanentes e impermanentes del proceso de erosión difusa de un suelo, producida por una lluvia de intensidad constante y el respectivo flujo

superficial que escurre sobre una ladera de largo dado, pendiente única y ancho unitario.

- El proceso de erosión se supone compuesto de erosión por salpicadura y erosión en manto.

- La erosión por salpicadura domina cuando el espesor de la lámina de agua es pequeña, y se evalúa en el modelo en función de la intensidad de la lluvia y de la velocidad terminal de caída de las gotas usando un modelo semi-teórico. A su vez, la erosión en manto es dominante en láminas de agua gruesa; su evaluación se hace a partir de ecuaciones de continuidad y gasto sólido.

- Para la utilización del modelo se requiere especificar, además de los datos de la lluvia, suelo y ladera, 7 parámetros correspondientes a las simulaciones del flujo superficial, de la erosión en manto y de la erosión por salpicadura.

Referencias Bibliográficas

- Ayala L. e Insausti E., 1982. Diseño y puesta en marcha de un simulador de lluvia. Centro de Recursos Hidráulicos, U. de Chile CRH 82-26-I.
- Córdova M.L., 1982. Modelación matemática de la erosión hídrica pluvial, Memoria de título, Ingeniero Civil, U. de Chile.
- Ellison W.D., 1945. Some effects of raindrops and surface flow on soil erosion and infiltration, Transactions AGU, Part I, Vol 26.
- Kilinc M. y Richardson E.V., 1973. Mechanics of soil erosion from overland flow generated by simulated rainfall. Hydrology Papers N° 63 CSU, Fort Collins, Colorado.
- Springer G.S., 1976. Erosion by liquid impact, John Wiley and sons.
- Vargas X., Brown E. y Westenenk C., 1981. Modelación matemática del flujo superficial y su aplicación al caso de un simulador de lluvias. Centro de Recursos Hidráulicos, U. de Chile, CRH 81-24-I.

Agradecimientos

Los autores desean expresar sus agradecimientos al Departamento de Desarrollo de la Investigación de la Universidad de Chile por el financiamiento parcial del proyecto de investigación I 485 del cual forma parte el presente trabajo.

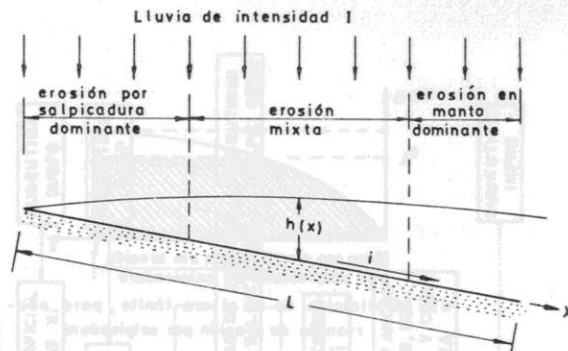


FIG.1 OCURENCIA DE LA EROSION DIFUSA EN UNA LADERA

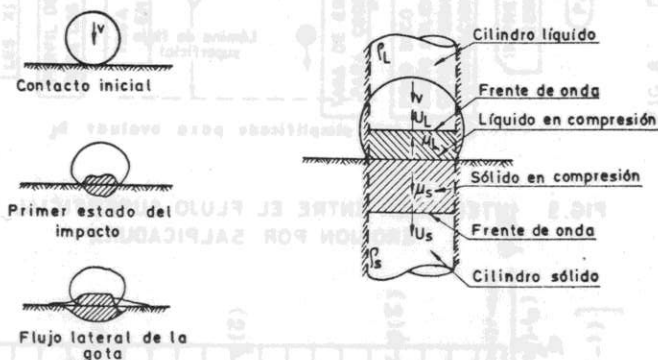


FIG.2 FASES DEL CHOQUE DE UNA GOTA CONTRA UNA SUPERFICIE SOLIDA

FIG.3 ESQUEMA PARA MODELAR EROSION POR IMPACTO MATERIAL SOLIDO COMPACTO

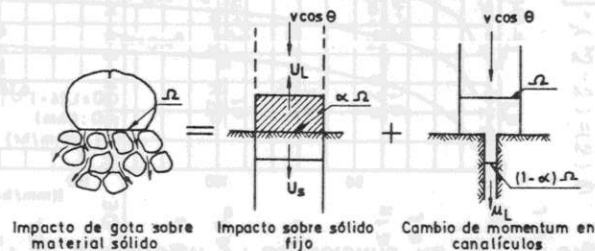
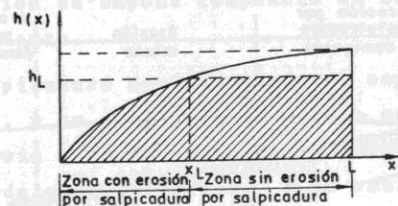
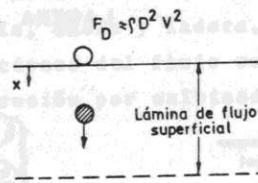


FIG.4 CONCEPTUALIZACION DE EROSION POR IMPACTO MATERIAL SOLIDO POROSO



a) Definición de la altura límite, para ocurrencia de erosión por salpicadura



b) Modelo simplificado para evaluar h_L

FIG. 5 INTERACCION ENTRE EL FLUJO SUPERFICIAL Y LA EROSION POR SALPICADURA

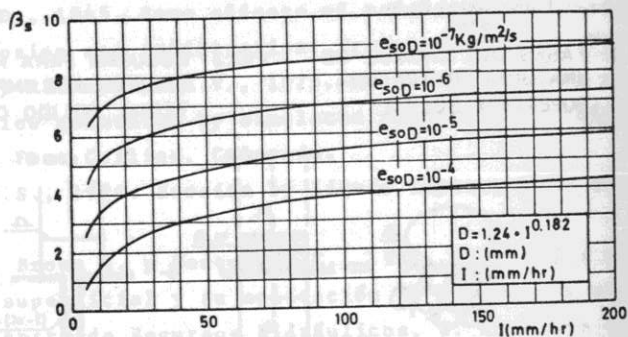


FIG. 6 β_s EN FUNCION DE LA INTENSIDAD DE LA LLUVIA Y DE LA EROSION POR SALPICADURA DESPRECIABLE

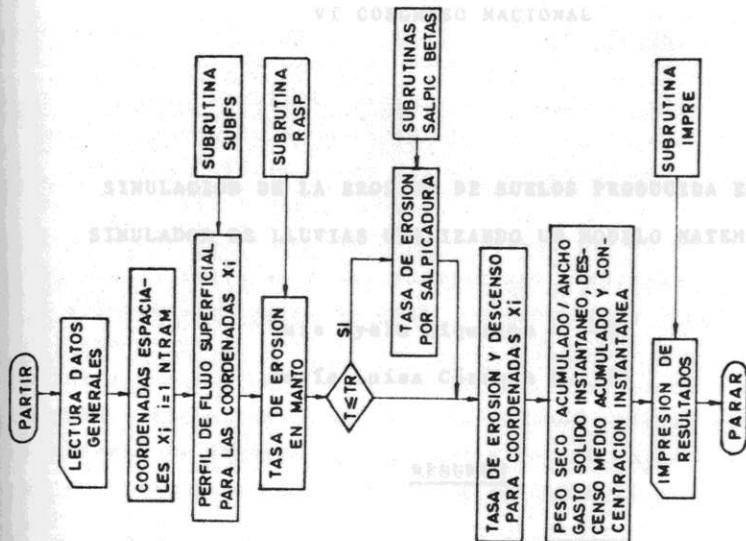


FIG. 8 DIAGRAMAS DE BLOQUES DEL MODELO

TASA DE EROSION POR SALPICADURA

$$\frac{dz_s}{dt} = \alpha_s \cdot \frac{e_{so}}{\delta a}$$

$$\alpha_s = 1 - \frac{h}{h_L}$$

$$\frac{dz_M}{dt} = 0$$

$$\frac{dZ_M}{dt} = K_r \cdot \alpha_s \cdot r \cdot h^{(m-1)} \cdot \psi(\beta)$$

$$\frac{dZ_M}{dt} = 0$$

$$\frac{dZ_M}{dt} = \frac{K_r \cdot \alpha_s \cdot r}{\delta a \cdot m x} \cdot h^{(m-1)} \cdot \psi(\beta)$$

$$\frac{dZ_M}{dt} = \frac{K_r \cdot \alpha_s \cdot (r-1)}{\delta a \cdot m \cdot (h-1) \cdot (t-t_R)^{m-1}} \cdot \psi(\beta)$$

donde: $\psi(\beta) = (\beta - \beta_c)^m \cdot \left[\frac{\beta}{\beta - \beta_c} + m - 1 \right]$

FIG. 7 ECUACIONES DEL MODELO