

COMPARACION ENTRE EL FLUJO IRROTACIONAL Y EL FLUJO DE KUWABARA EN LA DETERMINACION DE LA EFICIENCIA DE COLECCION DEBIDO A LA INTERCEPCION E IMPACTO INERCIAL EN LECHOS FILTRANTES

Pablo B. Sáez R.

RESUMEN

El trabajo presenta un desarrollo teórico que permite obtener las ecuaciones necesarias para determinar la eficiencia de colección debido al efecto combinado de intercepción e impacto inercial en lechos filtrantes, en aquellos casos donde el movimiento del gas puede describirse mediante el flujo irrotacional o el flujo de Kuwabara. Dado que las ecuaciones mencionadas, adimensionales, forman un sistema implícito, también se hace referencia al procedimiento numérico de solución. Se comparan las respuestas entregadas, para un extenso rango de los parámetros adimensionales fundamentales del modelo, de la aplicación del modelo a los dos tipos de flujo recién indicados. Finalmente, se concluye que el flujo irrotacional predice un proceso considerablemente más eficiente que aquel predicho por el flujo de Kuwabara, lo que permitiría fácilmente seleccionar el tipo de flujo que realmente ocurre en los filtros cuando se disponga de suficientes datos experimentales.

Ingeniero Civil, M.Sc., Profesor Departamento Ingeniería Hidráulica, Escuela de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.

REFERENCIAS

- 1. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 2. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 3. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 4. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 5. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 6. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 7. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 8. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 9. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 10. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 11. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 12. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 13. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 14. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 15. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 16. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 17. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 18. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 19. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 20. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 21. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 22. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 23. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 24. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 25. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 26. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 27. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 28. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 29. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 30. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 31. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 32. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 33. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 34. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 35. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 36. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 37. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 38. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 39. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 40. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 41. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 42. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 43. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 44. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 45. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 46. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 47. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 48. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 49. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.
- 50. "The Mechanics of Aerosols", Pergamon Press, London, 1964.

1. INTRODUCCION.

Aunque el padrón de flujo en un filtro fibroso, o lecho filtrante, es bastante complejo, los mecanismos por los cuales la materia particulada es separada de la corriente gaseosa han sido relativamente bien definidos. El primer mecanismo de colección, llamado impacto inercial, se basa en el hecho de que la inercia de una partícula hará que ésta se aleje de la línea de corriente para ser recogida por las fibras. En aquellos casos donde la partícula es demasiado pequeña para tener suficiente inercia para separarse de la línea de corriente, esta última y la trayectoria de la partícula coincidirán completamente. Sin embargo, aquellas partículas que alcanzan una posición tal que la distancia entre la fibra y la línea de corriente sea menor que el radio de la partícula serán removidas por el mecanismo de intercepción. El tercer mecanismo consiste en la sedimentación de las partículas sobre las fibras. Debido al movimiento Browniano de las partículas, éstas no siguen perfectamente la línea de corriente y oscilan alrededor de la última, siguiendo una trayectoria más o menos sinusoidal. Esta oscilación permite que algunas partículas contacten las fibras; este proceso es llamado mecanismo de difusión. El último mecanismo, atracción electrostática, depende de las cargas superficiales de las partículas y fibras.

Sáez ha propuesto un modelo teórico para predecir la eficiencia de colección debido al efecto combinado de impacto inercial e intercepción (Sáez, 1983). Los resultados que entrega dicho modelo son altamente dependientes del tipo de función corriente que describa el movimiento del gas. El propósito de este trabajo es comparar, en base a los parámetros adimensionales fundamentales del modelo, las respuestas teóricas obtenidas de la aplicación del modelo a las líneas de corriente correspondientes al flujo irrotacional y al flujo de Kuwabara.

2. DESARROLLO TEORICO.

2.1. Resumen del Modelo.

Sáez ha presentado un modelo teórico, basado en principios fundamentales de mecánica de fluidos y mecánica de partículas, que permite predecir la eficiencia de separación, debido a los mecanismos de intercepción e impacto inercial, en lechos filtrantes (Sáez, 1983). El modelo considera el flujo alrede-

dor de un cilindro infinito, de diámetro D, normal al flujo, tal como lo indica la Figura 1.

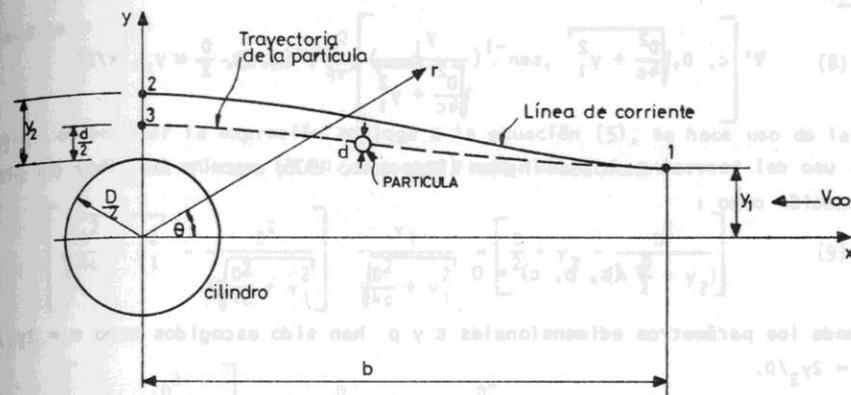


Figura 1. Flujo alrededor de un cilindro circular infinito.

El movimiento del gas se describe a través de la función corriente  $\Psi$ :

$$\Psi = V_{\infty} \Psi'(c, D, r, \theta) \quad (1)$$

donde  $V_{\infty}$  = velocidad del gas a una distancia b aguas arriba del centro del cilindro.

c = densidad del lecho filtrante, o razón entre el volumen de las fibras y el volumen del filtro.

r,  $\theta$  = coordenadas polares de posición.

Considerando que en la posición 1,  $r_1 = \sqrt{b^2 + y_1^2}$ ,  $\theta_1 = \sin^{-1}(y_1 / \sqrt{b^2 + y_1^2})$ , y que en la posición 2,  $r_2 = \frac{D}{2} + y_2$ ,  $\theta_2 = \pi/2$ , la aplicación de la ecuación (1) conduce a :

$$\Psi_1 = \Psi_2 \quad (2)$$

$$\Psi' \left[ c, D, \sqrt{b^2 + y_1^2}, \sin^{-1} \left( \frac{y_1}{\sqrt{b^2 + y_1^2}} \right) \right] = \Psi' \left( c, D, \frac{D}{2} + y_2, \pi/2 \right) \quad (3)$$

Pero, como  $b = D/(2\sqrt{c})$  (Sáez, 1983) :

$$\Psi' \left[ c, D, \sqrt{\frac{D^2}{4c} + y_1^2}, \sin^{-1} \left( \frac{y_1}{\sqrt{\frac{D^2}{4c} + y_1^2}} \right) \right] = \Psi' \left( c, D, \frac{D}{2} + y_2, \pi/2 \right) \quad (4)$$

El uso del teorema  $\pi$  de Buckingham (Streeter, 1975) permite escribir la última ecuación como :

$$F(\epsilon, \rho, c) = 0 \quad (5)$$

donde los parámetros adimensionales  $\epsilon$  y  $\rho$  han sido escogidos como  $\epsilon = 2y_1/D$  y  $\rho = 2y_2/D$ .

La ecuación (5) es la primera relación necesaria para determinar la eficiencia de colección de una fibra individual debido al efecto combinado de interceptación e impacto inercial  $\eta_f$ . Debe notarse que esta ecuación es claramente dependiente del tipo de función corriente  $\Psi$ . La segunda ecuación requerida, que es independiente de  $\Psi$ , puede expresarse como (Sáez, 1983) :

$$\rho = \frac{d}{D} + \Omega \left( 1 + \frac{\epsilon}{\rho} \right) \sqrt{c} (1 + \rho - \epsilon) \left[ 1 - \exp \left[ \frac{-1}{\Omega \left( 1 + \frac{\epsilon}{\rho} \right) \sqrt{c}} \right] \right] \quad (6)$$

donde  $d$  = diámetro de la partícula

$\Omega = V_\infty / (ad)$

$a = 18\mu / (\rho_p d^2 c)$

$\mu$  = viscosidad dinámica del gas

$\rho_p$  = densidad de la partícula

$c$  = factor de corrección de Cunningham.

Una vez que las ecuaciones (5) y (6) hayan sido conjuntamente resueltas, la eficiencia de colección de una fibra individual  $\eta_f$  se evalúa mediante (Sáez, 1983) :

$$\eta_f = \sigma \epsilon \quad (7)$$

donde  $\sigma$  = coeficiente de adhesión.

Flujo irrotacional.

El flujo irrotacional alrededor de un cilindro circular puede ser descrito mediante :

$$\Psi = -V_\infty \left( r - \frac{D^2}{4r} \right) \sin \theta \quad (8)$$

Con objeto de obtener la expresión análoga a la ecuación (5), se hace uso de la ecuación (4) aplicada al caso particular del flujo irrotacional :

$$\left[ \sqrt{\frac{D^2}{4c} + y_1^2} - \frac{D^2}{4\sqrt{\frac{D^2}{4c} + y_1^2}} \right] \cdot \frac{y_1}{\sqrt{\frac{D^2}{4c} + y_1^2}} = \left[ \frac{D}{2} + y_2 - \frac{D^2}{4\left(\frac{D}{2} + y_2\right)} \right] \quad (9)$$

$$\left[ 1 - \frac{D^2}{c + 4y_1^2} \right] y_1 = \frac{D}{2} + y_2 - \frac{D^2}{2D + 4y_2} \quad (10)$$

$$\left[ 1 - \frac{1}{\frac{c}{D} + \left(\frac{2y_1}{D}\right)^2} \right] y_1 = \frac{D}{2} + y_2 - \frac{D}{2 + \frac{4y_2}{D}} \quad (11)$$

Recordando las definiciones de  $\epsilon$  y  $\rho$  :

$$\left[ 1 - \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} + \epsilon^2} \right] \frac{\epsilon D}{2} = \frac{D}{2} + \frac{\rho D}{2} - \frac{D}{2 + 2\rho} \quad (12)$$

ó

$$2\alpha = 1 + \rho - \frac{1}{1 + \rho} \quad (13)$$

donde

$$\alpha = \frac{\epsilon}{2} \left( 1 - \frac{1}{\frac{1}{\epsilon} + \epsilon^2} \right) \quad (14)$$

La ecuación (13) puede ser reescrita como :

$$\rho^2 + \rho(2 - 2\alpha) - 2\alpha = 0$$

cuya solución positiva es

$$\rho = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} - 1$$

La Figura 2 ilustra el procedimiento numérico de solución.

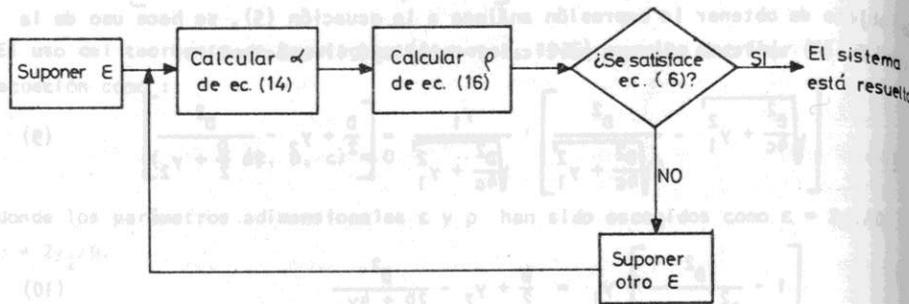


Figura 2. Procedimiento de solución para flujo irrotacional.

### 2.3. Flujo de Kuwabara.

En el caso del flujo de Kuwabara, la función corriente viene expresada como (Crawford, 1976) :

$$\psi = \frac{-V_{\infty} r}{2 Ku} \phi \left( \frac{2r}{D} \right) \text{sen } \theta$$

donde

$$Ku = c - \frac{3}{4} - \frac{c^2}{4} - \frac{1}{2} \ln c$$

$$\phi(x) = 2 \ln x - 1 + c + \frac{2-c}{2x} - \frac{c}{2} x^2$$

(15) El uso de la ecuación (4) conduce a :

$$(16) \sqrt{\frac{D^2}{4c} + y_1^2} \phi \left( \frac{2\sqrt{\frac{D^2}{4c} + y_1^2}}{D} y_1 \right) \frac{y_1}{\sqrt{\frac{D^2}{4c} + y_1^2}} = \left( \frac{D}{2} + y_2 \right) \phi \left( \frac{2(\frac{D}{2} + y_2)}{D} \right) \quad (20)$$

$$y_1 \phi \left( \sqrt{\frac{1}{c} + \left( \frac{2y_1}{D} \right)^2} \right) = \left( \frac{D}{2} + y_2 \right) \phi \left( 1 + \frac{2y_2}{D} \right) \quad (21)$$

$$\frac{\epsilon D}{2} \phi \left( \sqrt{\frac{1}{c} + \epsilon^2} \right) = \left( \frac{D}{2} + \frac{\rho D}{2} \right) \phi \left( 1 + \rho \right) \quad (22)$$

$$\epsilon = \frac{(1 + \rho) \phi(1 + \rho)}{\phi \left( \sqrt{\frac{1}{c} + \epsilon^2} \right)} \quad (23)$$

El procedimiento de solución, indicado en la Figura 3, es más complejo que en el caso del flujo irrotacional. Esto se debe a que las ecuaciones (6) y (23) son ambas implícitas, a diferencia del primer caso.

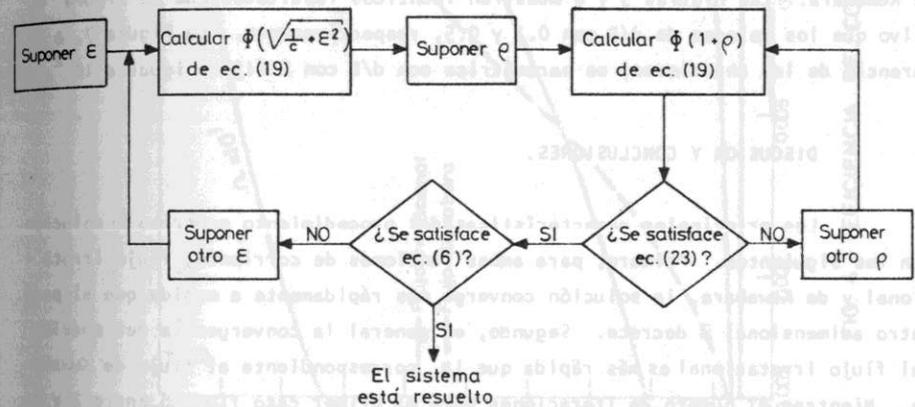


Figura 3. Procedimiento de solución para flujo de Kuwabara.

3. RESULTADOS.

Con objeto de comparar las respuestas de las funciones de corriente correspondientes al flujo irrotacional y al flujo de Kuwabara, se determinará el valor del parámetro adimensional  $\epsilon$ , el que tiene una relación directa con la eficiencia de colección de una fibra individual  $\eta_f$  (ver ecuación (7)), como función de los parámetros adimensionales  $c$ ,  $d/D$  y  $\Omega$ . El rango de variación de la densidad del lecho filtrante  $c$  abarcará los valores comprendidos entre  $10^{-3}$  y 0.5, lo cual incluye todos los valores ocupados en el diseño de filtros. Como el diámetro de las partículas  $d$  recogidas en un filtro varía aproximadamente entre 0.1 y 10  $\mu\text{m}$ , y las fibras tienen un diámetro  $D$  comprendido entre 2 y 10  $\mu\text{m}$ , se escogerán los siguientes valores para el parámetro adimensional  $d/D$ : 0.025, 0.1 y 0.5. Debido a que las siguientes magnitudes varían en las cantidades indicadas:  $\rho_p$ : 1000 - 2000  $\text{Kg/m}^3$ ;  $d$ : 0.1 - 10  $\mu\text{m}$ ;  $\mu$ :  $1.73 \times 10^{-5}$  -  $1.94 \times 10^{-5}$   $\text{Kg/m-s}$ ;  $C$ : 1.015 - 3.000;  $V_\infty$ : 0.1 - 2.0  $\text{m/s}$ ;  $D$ : 2 - 10  $\mu\text{m}$ , el parámetro adimensional  $\Omega$  fluctuará entre  $10^{-3}$  y  $10^1$ .

Las Figuras 4 a 7 muestran los resultados obtenidos. La Figura 4 ilustra la variación del parámetro adimensional  $\epsilon$  como una función de la densidad del filtro  $c$  para valores de  $\Omega$  iguales a  $10^{-3}$ ,  $10^{-1}$ ,  $10^0$  y  $10^1$  y para  $d/D=0.025$ . Se incluyen las respuestas obtenidas con el flujo irrotacional y con el flujo de Kuwabara. Las Figuras 5 y 6 muestran idénticos resultados que la Figura 4, salvo que los valores de  $d/D$  son 0.1 y 0.5, respectivamente. La Figura 7, a diferencia de las anteriores, es paramétrica con  $d/D$  con  $\Omega$  fijo e igual a  $10^{-2}$ .

4. DISCUSION Y CONCLUSIONES.

Las principales características del procedimiento numérico de solución son las siguientes. Primero, para ambas funciones de corriente, flujo irrotacional y de Kuwabara, la solución converge más rápidamente a medida que el parámetro adimensional  $\Omega$  decrece. Segundo, en general la convergencia del modelo del flujo irrotacional es más rápida que la correspondiente al flujo de Kuwabara. Mientras el número de iteraciones para el primer caso fluctuó entre 2 y 8, éstas variaron entre 1 y 33 en el segundo caso. Sin embargo, debe destacarse que el número de iteraciones requeridas para la convergencia es altamente dependiente del punto inicial.

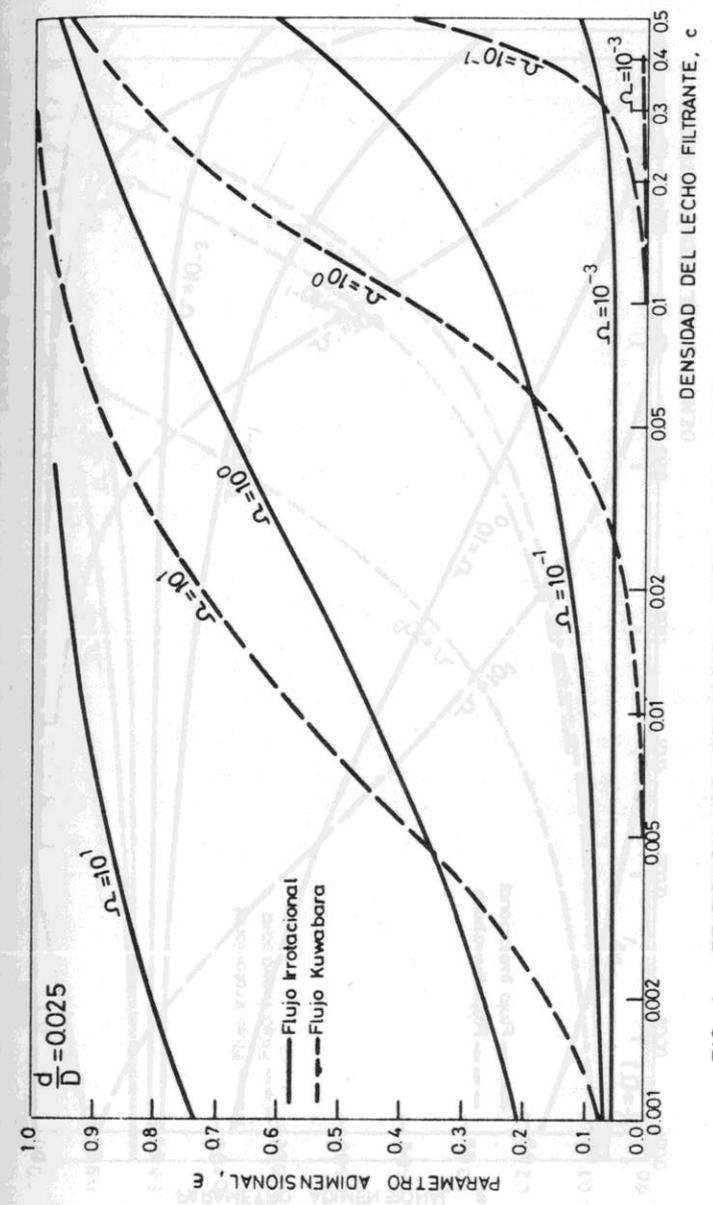


FIG. 4. EFICIENCIA DE COLECCION PARA  $d/D = 0.025$

3. RESULTADOS.

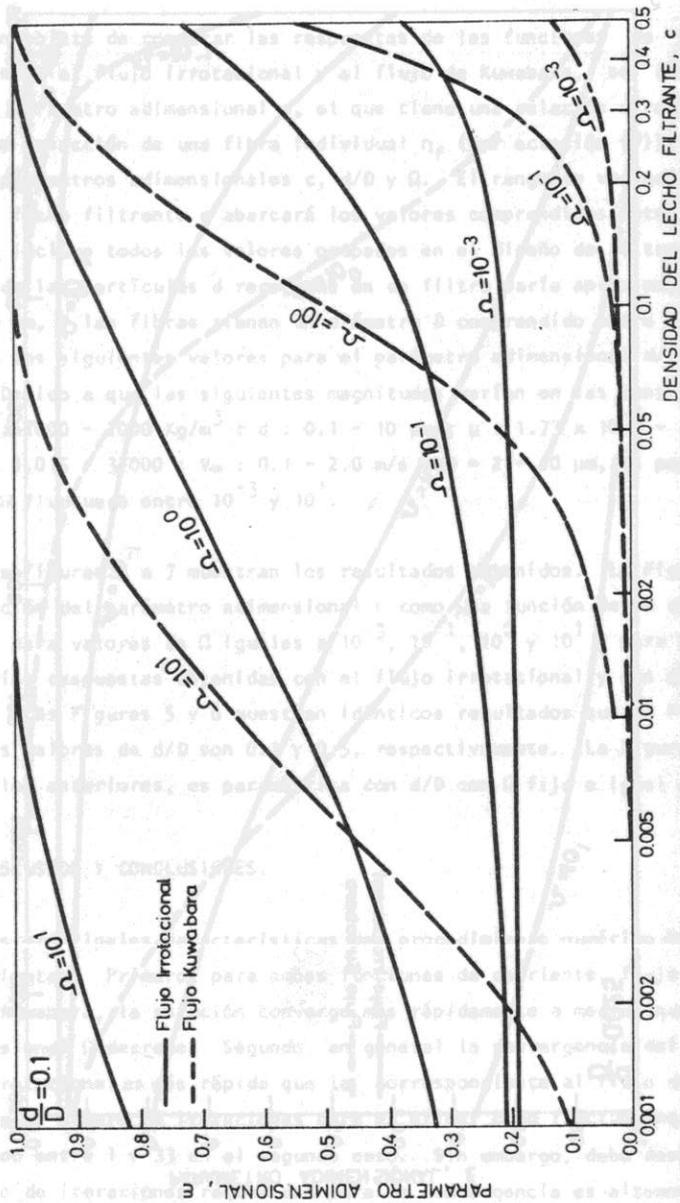


FIG. 5 EFICIENCIA DE COLECCION PARA  $d/D = 0.1$

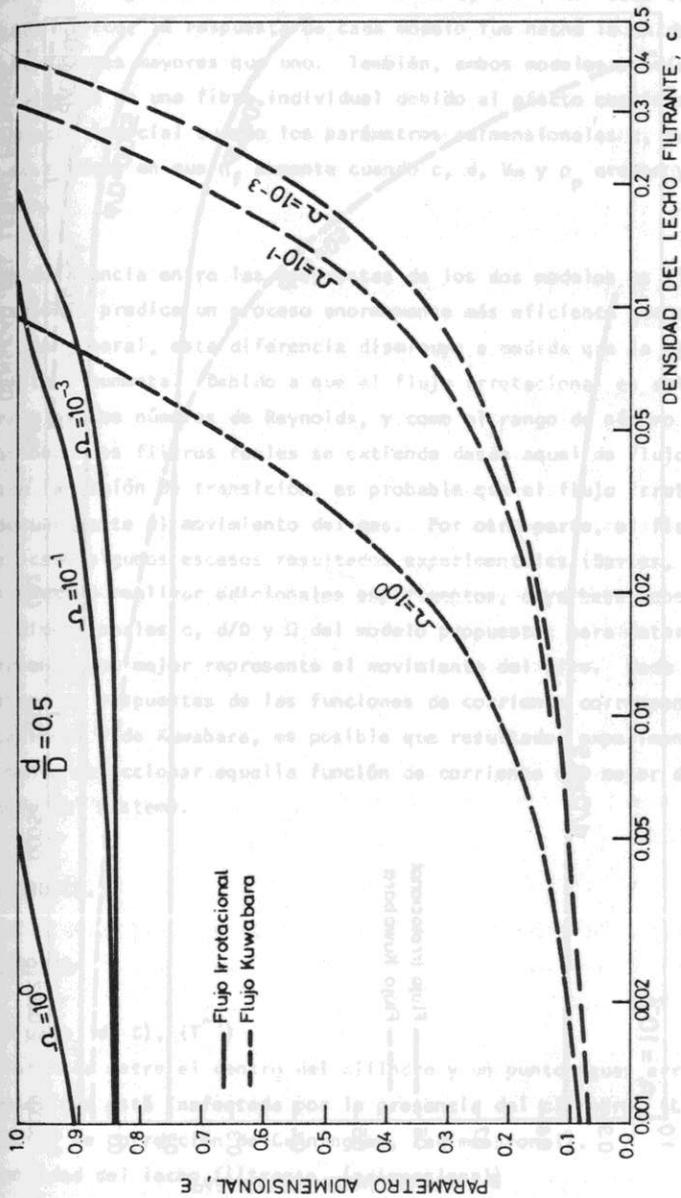


FIG. 6 EFICIENCIA DE COLECCION PARA  $d/D = 0.5$

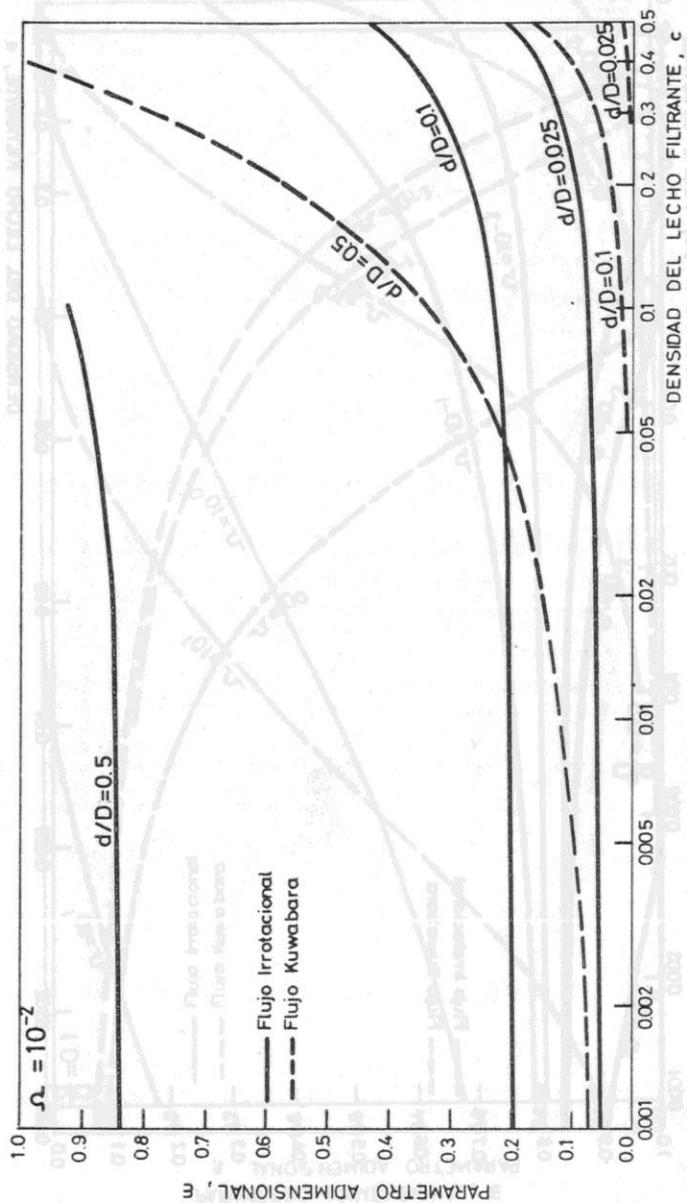


FIG. 7 EFICIENCIA DE COLECCION PARA  $\Omega = 10^{-2}$

Ambos modelos predicen eficiencias de colección de una fibra individual mayores que 1 bajo ciertas combinaciones de  $c$ ,  $d/D$  y  $\Omega$ . Como esto no tiene significado físico, la respuesta de cada modelo fue hecha la unidad cuando éste predecía valores mayores que uno. También, ambos modelos predicen un aumento en la eficiencia de una fibra individual debido al efecto combinado de intercepción e impacto inercial cuando los parámetros adimensionales  $c$ ,  $d/D$  y  $\Omega$  crecen. Esto se traduce en que  $\eta_f$  aumenta cuando  $c$ ,  $d$ ,  $V_\infty$  y  $\rho_p$  crecen y cuando  $\mu$  y  $D$  disminuyen.

La diferencia entre las respuestas de los dos modelos es clara: el flujo irrotacional predice un proceso enormemente más eficiente que el flujo de Kuwabara, y, en general, esta diferencia disminuye a medida que la densidad del lecho filtrante  $c$  aumenta. Debido a que el flujo irrotacional es aplicable solamente para elevados números de Reynolds, y como el rango de número de Reynolds con que funcionan los filtros reales se extiende desde aquel de flujo puramente viscoso hasta la región de transición, es probable que el flujo irrotacional no describa adecuadamente el movimiento del gas. Por otra parte, el flujo de Kuwabara ha explicado algunos escasos resultados experimentales (Davies, 1973). Sin embargo, es preciso realizar adicionales experimentos, cuya base deben ser los parámetros adimensionales  $c$ ,  $d/D$  y  $\Omega$  del modelo propuesto, para determinar la función corriente que mejor represente el movimiento del aire. Dada la gran diferencia entre las respuestas de las funciones de corriente correspondientes al flujo irrotacional y de Kuwabara, es posible que resultados experimentales permitan fácilmente seleccionar aquella función de corriente que mejor describa el comportamiento del sistema.

5. APENDICE.

Lista de Símbolos.

- a =  $18 \mu / (\rho_p d^2 c)$ , ( $\tau^{-1}$ )
- b = distancia entre el centro del cilindro y un punto aguas arriba cuya velocidad está inafectada por la presencia del cilindro, (L).
- C = factor de corrección de Cunningham, (adimensional).
- c = densidad del lecho filtrante, (adimensional)
- D = diámetro de la fibra, (L)

- $Ku = c - \frac{3}{4} - \frac{c^2}{4} - \frac{1}{2} \ln c$ , (adimensional)
- $r$  = coordenada polar de posición (L)
- $V_{\infty}$  = velocidad del aire en un punto a una distancia  $b$  aguas arriba del centro de la fibra, ( $L T^{-1}$ )
- $x$  = coordenada cartesiana de posición, (L)
- $y$  = coordenada cartesiana de posición, (L)
- $\alpha = \frac{\epsilon}{2} / (1 - \frac{1}{\frac{1}{c} + \epsilon^2})$ , (adimensional)
- $\eta_f$  = eficiencia de colección de una fibra individual debido al efecto combinado de intercepción e impacto inercial, (adimensional).
- $\mu$  = viscosidad dinámica del aire, ( $ML^{-1} T^{-1}$ )
- $\theta$  = coordenada polar de posición, (radián)
- $\phi(x) = 2 \ln x - 1 + c + \frac{2-c}{2} - \frac{c}{2} x^2$ , (adimensional).
- $\rho = 2y_2/D$ , (adimensional)
- $\rho_p$  = densidad de la partícula, ( $M L^{-3}$ )
- $\Omega = V_{\infty}/(ad)$ , (adimensional)
- $\sigma$  = coeficiente de adhesión, (adimensional)
- $\Psi$  = función corriente, ( $L^2 T^{-1}$ ).

6. REFERENCIAS.

1. Crawford, M., "Air Pollution Control Theory", Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1976.
2. Davies, C.N., "Air Filtration", Academic Press, Inc., New York, 1973.
3. Sáez, P.B., "Eficiencia de los Mecanismos de Intercepción e Impacto Inercial en Lechos Filtrantes", VI Congreso Nacional de Ingeniería Hidráulica, Sociedad Chilena de Ingeniería Hidráulica, Santiago, Chile, 1983.
4. Streeter, V.L., "Mecánica de los Fluidos", 4ª Ed., Mac Graw-Hill Book Company, México, 1975.

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

VI CONGRESO NACIONAL

ESTABILIDAD DE LA SEDIMENTACION DE PARTICULAS

Javier Martínez M. (1)

Walter Zeller A. (2)

La sedimentación de partículas en un líquido es planteada en el marco de la teoría de mezclas continuas. Y se efectúa el análisis de estabilidad de la sedimentación estacionaria y uniforme cuando las ecuaciones del movimiento de las fases sólida y líquida contemplan términos de viscosidad, arrastre, masa virtual y difusión.

(1) Profesor, Instituto de Matemáticas y Física, Universidad de Valparaíso.

(2) Profesor, Instituto de Física, Universidad Católica de Valparaíso.