

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DE ESCURRIMIENTOS
NO CONFINADOS IMPERMANENTES

Guillermo Cabrera F. (1)

Gabriel Matthey C. (2)

RESUMEN

Se ha desarrollado un modelo matemático de elementos finitos que tomando como base una discretización tanto espacial como temporal en la malla de elementos, permite representar la evolución de la superficie libre en sistemas acuíferos no confinados, al incidir sobre ella recargas por infiltración.

La validación del modelo con una solución analítica para el caso de un sistema no confinado limitado por dos cauces superficiales dió como resultado un buen ajuste, produciéndose diferencias pequeñas donde los gradientes son mayores, las que han sido justificadas en base a la no-linealidad de la ecuación de continuidad. Aplicado el modelo a otros casos se verificó un adecuado comportamiento y especialmente lo riguroso que es respecto a las suposiciones impuestas. Tomando en cuenta lo anterior, y además lo reducido de los tiempos de computación requeridos en el proceso se constata la conveniencia de su uso frente a otros modelos matemáticos de este tipo.

(1) Ingeniero Civil, profesor e investigador del Centro de Recursos Hidráulicos de la Universidad de Chile.

(2) Ingeniero Civil, actualmente en HIDRELEC Ltda.

INTRODUCCION

La respuesta transiente de acuíferos en napa libre ante la recarga producida por infiltración tiene importancia práctica en la evaluación de recursos de aguas subterráneas, en estudios de riego y de drenajes agrícolas, y en el comportamiento de presas de tierra.

Soluciones analíticas han sido obtenidas por diversos investigadores. La mayoría de ellas considera una linealización de la ecuación diferencial a derivadas parciales que describe el flujo, obteniéndose con ello resultados satisfactorios en casos de pequeñas fluctuaciones de los niveles producidas por bajas tasas de infiltración. Por otra parte, la mayoría de las soluciones se han desarrollado para sistemas de geometría simple y condiciones de borde idealizadas, que no se encuentran comúnmente en la naturaleza. Entre otros, pueden destacarse los trabajos de Dagan (1964) y Chu (1977), en los que se analizó el efecto de sistemas de drenes abiertos o cerrados sobre napas libres sometidas a recarga por infiltración.

La técnica numérica de diferencias finitas ha sido también utilizada en la determinación del comportamiento de sistemas de este tipo. En la mayoría de los casos, la evolución de la superficie libre en el tiempo se ha definido en base al uso de técnicas de predictor-corrector, que involucran procesos iterativos para distintos intervalos de tiempo. Deben señalarse los trabajos de Zucker et al (1973) y Rushton (1974), especialmente este último que desarrolló soluciones basadas en el método iterativo en sentido alternante (IADI) y en la técnica de relajaciones sucesivas.

Adicionalmente, la técnica numérica de elementos finitos también ha sido aplicada a la caracterización de este tipo de flujos subterráneos (Neuman y Witherspoon, 1971; Cabrera y Mariño, 1976). En todos los casos se ha usado el cálculo variacional en conjunto con elementos finitos para la discretización espacial y

un esquema iterativo de diferencias finitas para la integración en el tiempo; es decir, una combinación de ambas técnicas para calcular soluciones transientes como una serie de soluciones permanentes, al incrementar el tiempo en pequeños intervalos.

Muy pocos esfuerzos se han hecho para incluir espacio y tiempo en las aproximaciones de elementos finitos. Bruch y Zyvoloski (1974) desarrollaron soluciones numéricas que describen el comportamiento transiente de flujos de calor lineales y no-lineales, en una y dos dimensiones, dentro de un sistema de geometría simple. Aplicando el método residual de Galerkin, determinaron la distribución de temperaturas, que resultó semejante a la obtenida de soluciones analíticas y de modelos de diferencias finitas.

El objetivo de este trabajo ha sido desarrollar un modelo de elementos finitos que, tomando como base una discretización tanto espacial como temporal en la malla de elementos, permita representar adecuadamente la evolución de la superficie libre en sistemas acuíferos no confinados, al incidir sobre ella recargas por infiltración. Se ha utilizado el método residual de Galerkin y funciones de aproximación de primer grado, tomando en cuenta como válidas para el escurrimiento las hipótesis de Dupuit.

PLANTEAMIENTO MATEMATICO

Ecuación de Continuidad

La ecuación de continuidad que caracteriza el flujo saturado, no confinado de aguas subterráneas en régimen impermeable puede establecerse a partir de dos suposiciones básicas. La primera establece que para pequeñas inclinaciones de la superficie libre, las líneas de flujo se consideran horizontales de modo que las equipotenciales se asimilan a planos verticales. La segunda, directamente ligada a la anterior, plantea que el gradiente hidráulico en cada punto es igual a la inclinación de la superficie libre e invariable con la profundidad.

Lajo estas suposiciones, en el caso de un flujo tridimensional, con z como coordenada vertical, el potencial hidráulico h puede expresarse como :

$$h(x,y,z) = h(x,y) = \xi(x,y) \quad (1)$$

en que ξ representa la ordenada z de la superficie libre sobre cualquier punto de coordenadas (x,y) , al considerar como nivel de referencia para los potenciales el plano horizontal $z = 0$.

Considérese ahora un prisma vertical de suelo saturado, de sección basal $dx dy$, sobre el cual está actuando una infiltración cuya tasa neta es $I(x,y)$. Suponiendo que el suelo es homogéneo e isotrópico de permeabilidad K , los caudales entrando y saliendo en las direcciones x e y , horizontales, pueden expresarse de acuerdo a la ley de Darcy como :

$$q_x = -K h \frac{\partial h}{\partial x} dy \quad (2a)$$

$$q_y = -K h \frac{\partial h}{\partial y} dx \quad (2b)$$

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (3a)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (3b)$$

De acuerdo a esto, los caudales netos incorporándose al elemento infinitesimal en ambas direcciones serían :

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx = K \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx dy \quad (4a)$$

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} dy = K \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) dx dy \quad (4b)$$

Además, el caudal neto que se incorpora a la columna debido a la infiltración es :

$$q_z = I(x,y) dx dy \quad (5)$$

Por otra parte, si S_y es la porosidad efectiva del suelo, la variación de almacenamiento en términos de caudal puede expresarse como :

$$Q_a = S_y \frac{\partial h}{\partial t} dx dy \quad (6)$$

Puesto que el caudal neto incorporándose a la columna debe igualar al caudal producido por la variación de almacenamiento, la ecuación diferencial que describe el flujo resulta finalmente :

$$K \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + K \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) + I(x,y) - S_y \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

Método Residual de Galerkin

Considérese un escurrimiento plano para el cual la relación (7) puede escribirse como :

$$L(h) = K \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + I(x) - S_y \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

Supóngase además una función de aproximación \bar{h} de h de la forma :

$$\bar{h}(x,t) = \sum_{i=1}^N \bar{h}_i N_i(x,t) \quad (9)$$

en que \bar{h}_i y N_i son, respectivamente, los valores de la variable de estado y elementos de un conjunto de funciones linealmente independientes que satisfacen las condiciones de borde del sistema estudiado, en cada punto i del dominio de escurrimiento.

Substituyendo esta función de aproximación en (8) resulta :

$$L(\bar{h}) = K \frac{\partial}{\partial x} (\bar{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}) + I - S_y \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = r \quad (10)$$

en que r es el residuo resultante de la aproximación.

La función \bar{h} será la solución de (8) sólo si $L(\bar{h})$ es nula en todo el dominio. Ahora, si $L(\bar{h})$ es una función continua, el problema es equivalente a imponer la condición que $L(\bar{h})$ sea ortogonal a un sistema arbitrario de funciones $\psi_j(x,t)$ para $(j = 1, 2, \dots, n, \dots)$. Puesto que se han considerado N valores desconocidos \bar{h}_i , entonces deberán conseguirse N condiciones de ortogonalidad. Dichas condiciones quedan expresadas como :

$$\iint_{tx} L[\bar{h}(x,t)] \psi_j(x,t) dx dt = 0 \quad ; \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

relación que indica que el error debido a la aproximación \bar{h} de h es el mínimo (cero), cuando la integración se efectúa en todo el dominio de escurrimiento.

Si las funciones $\psi_j(x,t)$ se eligen iguales a $N_j(x,t)$ este procedimiento se denomina método residual de Galerkin, llegando en definitiva a plantear el problema mediante la relación:

$$\iint_{tx} \left[K \frac{\partial}{\partial x} (\bar{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}) + I - S_y \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \right] N_j dx dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (12)$$

que reducida a una forma más explícita, al integrar por partes el término que incluye la derivada de segundo orden, conduce a :

$$\iint_{tx} \left[-K \frac{\partial N_j}{\partial x} \bar{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + I N_j - S_y N_j \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \right] dx dt = 0 \quad (13)$$

en que la integral de contorno resultante de la integración por partes se ha omitido, puesto que corresponde a una condición de borde incluida posteriormente en forma directa.

Modelo de Elementos Finitos

Supóngase el dominio de escurrimiento $V(x,t)$, dividido en M elementos triangulares y N nudos, y una función lineal de aproximación \bar{h}^e para definir el potencial hidráulico dentro de cada elemento e dependiente de las coordenadas nodales y de los valores de \bar{h} en los nudos vértices (i,j,k) de ese elemento. Dicha función \bar{h}^e puede expresarse como :

$$\bar{h}^e = A + Bx + Dt \quad (14)$$

en que A , B y D son constantes para el elemento de área e .

De acuerdo a (13), el residuo R^e debido a la aproximación \bar{h}^e puede escribirse en forma matricial como :

$$\{R^e\} = \begin{Bmatrix} R_i^e \\ R_j^e \\ R_k^e \end{Bmatrix} = -\frac{KA}{3} (\bar{h}_i + \bar{h}_j + \bar{h}_k) \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}_i \\ \bar{h}_j \\ \bar{h}_k \end{Bmatrix} + \frac{IA}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{S_y \Delta}{3} \begin{bmatrix} d_i & d_j & d_k \\ d_i & d_j & d_k \\ d_i & d_j & d_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}_i \\ \bar{h}_j \\ \bar{h}_k \end{Bmatrix} \quad (15)$$

en la cual los factores $\Delta/3$ se obtienen de :

$$\iint_{tx} N_i dx dt = \iint_{tx} N_j dx dt = \iint_{tx} N_k dx dt = \frac{\Delta}{3} \quad (16)$$

donde $N_i = a_i + b_i x + d_i t$, $N_j = a_j + b_j x + d_j t$, y $N_k = a_k + b_k x + d_k t$; y además $a_i = (x_j t_k - x_k t_j)/2\Delta$, $a_j = (x_k t_i - x_i t_k)/2\Delta$, $a_k = (x_i t_j - x_j t_i)/2\Delta$, $b_i = (t_j - t_k)/2\Delta$, $b_j = (t_k - t_i)/2\Delta$, $b_k = (t_i - t_j)/2\Delta$, $d_i = (x_k - x_j)/2\Delta$, $d_j = (x_i - x_k)/2\Delta$ y $d_k = (x_j - x_i)/2\Delta$.

El residuo será nulo para todo el dominio V al considerar la suma de todos los R_n^m , esto es :

$$R_n = \sum_{m=1}^M R_n^m = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (17)$$

Puesto que (17) representa un sistema de ecuaciones no lineales de segundo grado, se ha aplicado el método de Newton-Raphson para su resolución. Para ello, puede considerarse a este sistema de ecuaciones como :

$$\begin{aligned} R_1(\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_N) &= 0 \\ R_2(\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_N) &= 0 \\ \vdots & \\ R_N(\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_N) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

o en notación vectorial :

$$\vec{R}(\vec{h}) = \vec{0} \quad (19)$$

Eligiendo un vector \vec{h}_0 arbitrario se tendría :

$$\vec{R}(\vec{h}_0 + \Delta\vec{h}) = \vec{0} \quad (20)$$

Desarrollando (20) en serie de Taylor y despreciando los términos de segundo orden y superiores se llega a :

$$R_1(\vec{h}_0) + \left. \frac{\partial R_1}{\partial \bar{h}_1} \right|_{\vec{h}_0} \Delta\bar{h}_1 + \left. \frac{\partial R_1}{\partial \bar{h}_2} \right|_{\vec{h}_0} \Delta\bar{h}_2 + \dots + \left. \frac{\partial R_1}{\partial \bar{h}_N} \right|_{\vec{h}_0} \Delta\bar{h}_N = 0 \quad (21)$$

$$R_2(\vec{h}_0) + \left. \frac{\partial R_2}{\partial \bar{h}_1} \right|_{\vec{h}_0} \Delta\bar{h}_1 + \left. \frac{\partial R_2}{\partial \bar{h}_2} \right|_{\vec{h}_0} \Delta\bar{h}_2 + \dots + \left. \frac{\partial R_2}{\partial \bar{h}_N} \right|_{\vec{h}_0} \Delta\bar{h}_N = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

que es un sistema lineal de ecuaciones que debe resolverse para las N incógnitas $\Delta\bar{h}_N$, donde los términos $R_n(\vec{h}_0)$ y $(\partial R_n / \partial \bar{h}_1)$ son conocidos.

La solución de (21) permite calcular $\Delta\vec{h}_0$, que se usa para corregir los valores iniciales \vec{h}_0 . El nuevo vector $\vec{h}_1 = \vec{h}_0 + \Delta\vec{h}_0$ reemplaza a \vec{h}_0 en (21) para la segunda iteración, y así sucesivamente. Este procedimiento iterativo termina cuando el máximo $\Delta\bar{h}_n$ calculado resulta menor o igual que un error admisible pre establecido.

El sistema de ecuaciones (21) puede escribirse matricialmente como :

$$[U] \{\Delta\bar{h}_n\} = \{v\} \quad (22)$$

donde [U] es una matriz cuadrada (N x N), no simétrica con coeficientes u_{ij} distintos de cero para nudos (i,j) adyacentes. La numeración de nudos de la malla, efectuada de manera que la diferencia de número de orden entre nudos adyacentes sea la mínima, es muy útil puesto que con ello se reduce al máximo el ancho de banda de [U] y por lo tanto el número de operaciones algebraicas a realizar. Los coeficientes u_{ij} se calculan para todos los nudos, incluso para aquellos que representan condiciones de borde, ya que dichas condiciones son explícitamente incorporadas al sistema de ecuaciones (22) previo a su resolución.

Las condiciones iniciales, vale decir la ubicación de la superficie libre para $t = 0$, se ha obtenido de un modelo de elementos finitos desarrollado para el caso del escurrimiento subterráneo bidimensional, no confinado en condiciones permanentes, sin infiltración (Cabrera y Mariño, 1976). En ese modelo se define una ubicación arbitraria de la superficie libre y por medio de un procedimiento iterativo es ajustada de tal forma que la presión relativa sobre esa superficie se haga menor o igual que un error admisible preestablecido cercano a cero.

Definido esto, el sistema de ecuaciones (22) se resuelve mediante un método de eliminación de Gauss modificado, puesto que existe una gran cantidad de coeficientes u_{ij} iguales a cero. Básicamente el método consiste en reducir el número de incógnitas en cada ecuación para terminar con una ecuación que tenga sólo una incógnita; la solución para las otras incógnitas se obtiene simplemente por reemplazos.

Los aspectos descritos en los párrafos anteriores se incorporaron a un programa de computación, en lenguaje FORTRAN IV-G para ser procesado en un computador IBM 370-145, que permite determinar la evolución de la superficie libre de una napa freática, limitada por dos cauces superficiales, por efecto de diferentes estímulos externos tales como recargas constantes, variables continuas o discontinuas, y/o variaciones de los niveles de agua en los cauces superficiales que limitan el sistema. El programa de computación incluye un programa principal y tres subrutinas que son usadas para calcular las condiciones iniciales, evaluar los coeficientes utilizados en la aplicación del método de Newton Raphson y resolver el sistema lineal de ecuaciones resultante. En la Figura 1 se presenta un diagrama de bloques en el que se incluyen los procedimientos más importantes del cálculo.

VALIDACION DEL MODELO

La validación del modelo se obtuvo de la comparación de resultados con la solución analítica para el caso de un sistema acuífero limitado por dos cauces superficiales sobre el que incide una recarga constante y continua en el tiempo (Figura 2). Dicha solución (Mariño 1973, manuscrito no publicado) se obtuvo a partir de una linealización de la ecuación de continuidad (7), aceptando la validez de las hipótesis de Dupuit y suponiendo inexistencia de la superficie de afloramiento sobre los taludes verticales extremos. La expresión analítica obtenida en este caso es :

FIGURA 1
DIAGRAMA DE BLOQUES DEL MODELO

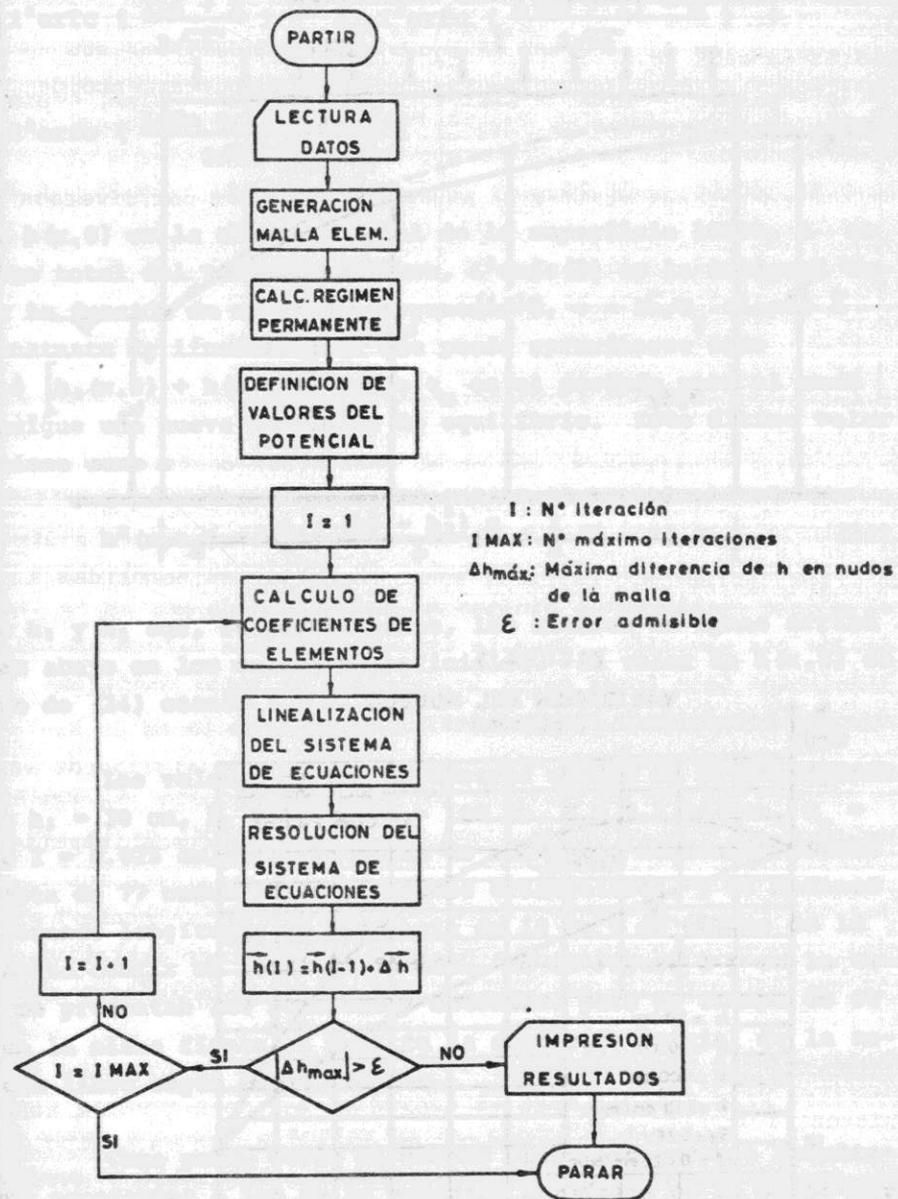


FIGURA 2
SISTEMA UTILIZADO PARA VALIDACION

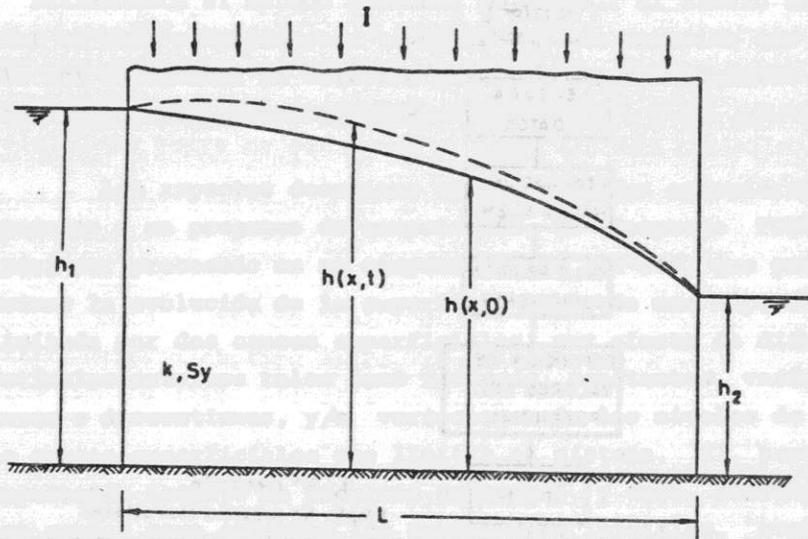
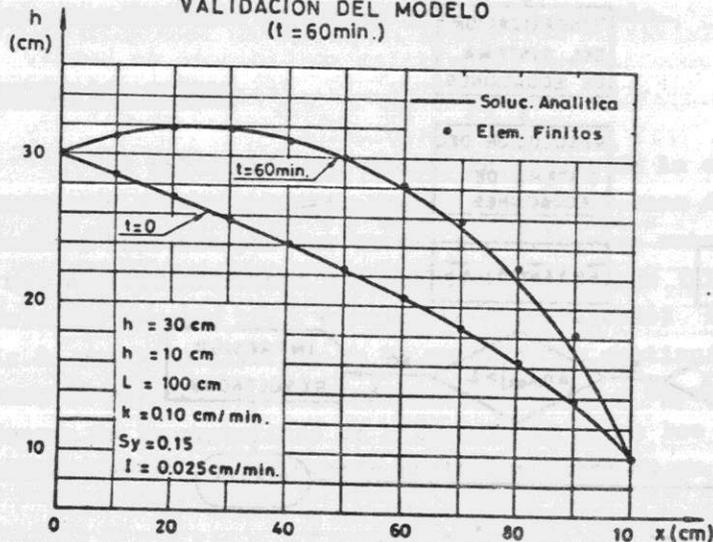


FIGURA 3
VALIDACION DEL MODELO
(t = 60 min.)



$$h^2(x,t) = h^2(x,0) + \frac{2Ivt}{K} \left(1 + 4 \left[\sum_{n=0}^{\infty} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{2L(n+1) - x}{2\sqrt{vt}} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{2Ln + x}{2\sqrt{vt}} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{L(2n+1) - x}{2\sqrt{vt}} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{L(2n+1) + x}{2\sqrt{vt}} \right) \right] \right) \quad (23)$$

en que $h(x,0)$ es la altura inicial de la superficie libre, L es el largo total del sistema acuífero, $i^2 \operatorname{erfc}(\beta)$ es la integral doble de la función de error con argumento β , $v = K\bar{n}/S_y$ siendo \bar{n} una constante de linealización que puede aproximarse como $\bar{n} = 0.5 [h_0(x,0) + h(x,t_e)]$ donde t_e es el período para el cual se consigue una nueva condición de equilibrio. Este último valor se obtiene como :

$$h^2(x,t_e) = h_1^2 - \frac{(h_1^2 - h_2^2)x}{L} + \frac{I}{K} (L - x)x \quad (24)$$

en que h_1 y h_2 son, respectivamente, las alturas de aguas arriba y aguas abajo en los cauces superficiales. El valor de $h(x,0)$ se obtiene de (24) cuando $I = 0$.

Los valores de los parámetros usados en la validación fueron $h_1 = 30$ cm, $h_2 = 10$ cm, $L = 100$ cm, $K = 0.1$ cm/min, $S_y = 0.15$ e $I = 0.025$ cm/min. La malla de elementos utilizada estaba compuesta de 77 nudos y 120 elementos triangulares, y se definió considerando longitudes de distancia de 10 cm y de tiempo de 10 min, hasta cubrir un total de 60 min. En la Figura 3 y en la Tabla 1 se presentan los resultados obtenidos para un tiempo de 60 min; en la misma figura se muestra la condición inicial de la superficie libre según ambos métodos.

Como puede verse el modelo propuesto entrega resultados muy semejantes a los de la solución analítica en la mayor parte del sistema, excepto cerca del límite de aguas abajo donde se

TABLA 1
VALIDACION DEL MODELO

$h(x,60)$ en cm

x (cm)	Soluc. Analít.	Elem. Finitos	Dif. (%)	x (cm)	Soluc. Analít.	Elem. Finitos	Dif. (%)
0.0	30.00	30.00	-	60.0	28.09	28.35	0.92
10.0	31.38	31.26	0.38	70.0	25.44	26.03	2.32
20.0	31.97	31.81	0.50	80.0	21.96	22.87	4.14
30.0	31.90	31.75	0.47	90.0	17.24	18.35	6.44
40.0	31.22	31.15	0.22	100.0	10.00	10.00	-
50.0	29.94	30.02	0.27				

presentan diferencias de cierta importancia. Dichas diferencias pueden provenir del hecho que la solución analítica considera una linealización de la misma ecuación de continuidad, mientras que el modelo de elementos finitos no está limitado por la no linealidad de esa ecuación. Resulta evidente que esa diferencia de planteamientos debe tomar mayor importancia en zonas donde los gradientes hidráulicos son mayores.

A fin de verificar los resultados cuando el dominio temporal es diferente, la misma malla se extendió hasta 120 min., llegándose a un total de 240 elementos. De la comparación con los resultados anteriores para 60 min. se obtuvieron sólo pequeñas diferencias, siendo la máxima de alrededor del 1% para $x = 90$ cm (0.21 cm), lo que permite confiar en la bondad del modelo.

APLICACION A DIVERSOS CASOS

El modelo elaborado se aplicó a diversos casos a fin de mostrar las posibilidades que ofrece. Para ello se usaron los mismos valores de los parámetros considerados en la validación. Los casos estudiados fueron :

- a) Infiltración constante durante 10 min.
- b) Infiltración continua sobre los 50 cm de aguas arriba.
- c) Evaporación constante y continua.
- d) Infiltración constante y continua y fluctuación lineal del nivel del cauce superficial de aguas abajo.

Los resultados obtenidos se han graficado en las Figuras 4, 5, 6 y 7, verificándose que en general el comportamiento del modelo es el esperado, salvo en ciertos casos cerca del talud de aguas abajo. En efecto, puede apreciarse en las Figuras 4 y 5 que en zonas vecinas a ese talud, las alturas de la superficie libre alcanzan valores inferiores al nivel estático inicial, siendo esto especialmente notorio para $x = 90$ cm.

En el caso de la infiltración constante durante 10min (Figura 4), esto puede deberse al hecho de que, puesto que la superficie de afloramiento ha sido ignorada en la simulación, los ajustes numéricos producen alturas de la superficie libre bajas cerca del borde con el fin de generar gradientes hidráulicos mayores, que son necesarios para mantener la continuidad del flujo subterráneo.

En el caso de la infiltración que alcanza parcialmente la superficie libre (Figura 5), este problema es aún más marcado. Dicha infiltración parcial agrega al sistema un volumen adicional que debe evacuarse de alguna forma. Puesto que la mitad de aguas abajo no recibe infiltración, la superficie libre evoluciona lentamente en ese sector y la única manera de eliminar el exceso de agua recibida es por medio de la generación de gradientes mayores ficticios que permitan evacuar volúmenes mayores. Esta situación tiende a desaparecer a medida que transcurre el tiempo ya que poco a poco el acuífero va tomando los gradientes necesarios para evacuar los volúmenes de agua debidos a la infiltración.

Un aspecto importante de destacar del modelo elaborado se refiere a su eficiencia. En los casos analizados, normal -

FIGURA 4
INFILTRACION CONSTANTE DURANTE 10 min.

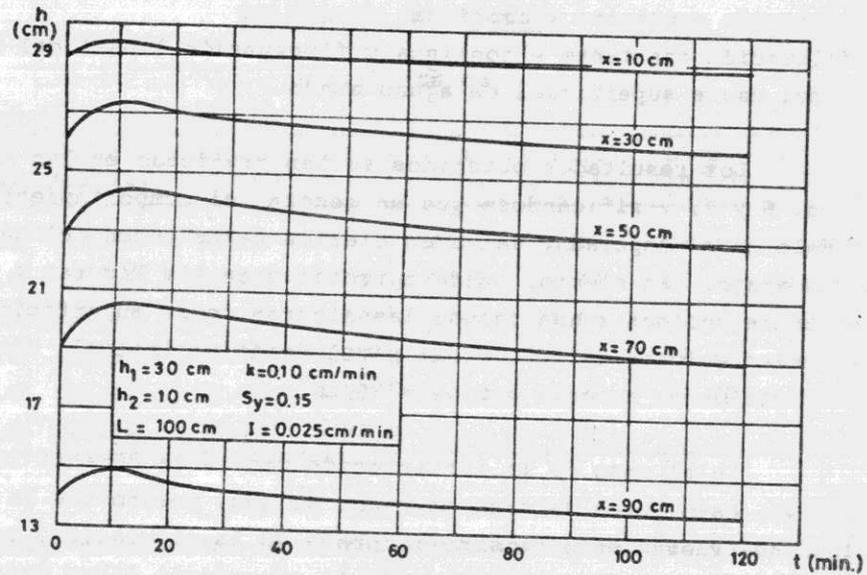


FIGURA 5
INFILTRACION CONTINUA SOBRE LOS 50 cm. DE AGUAS ARRIBA

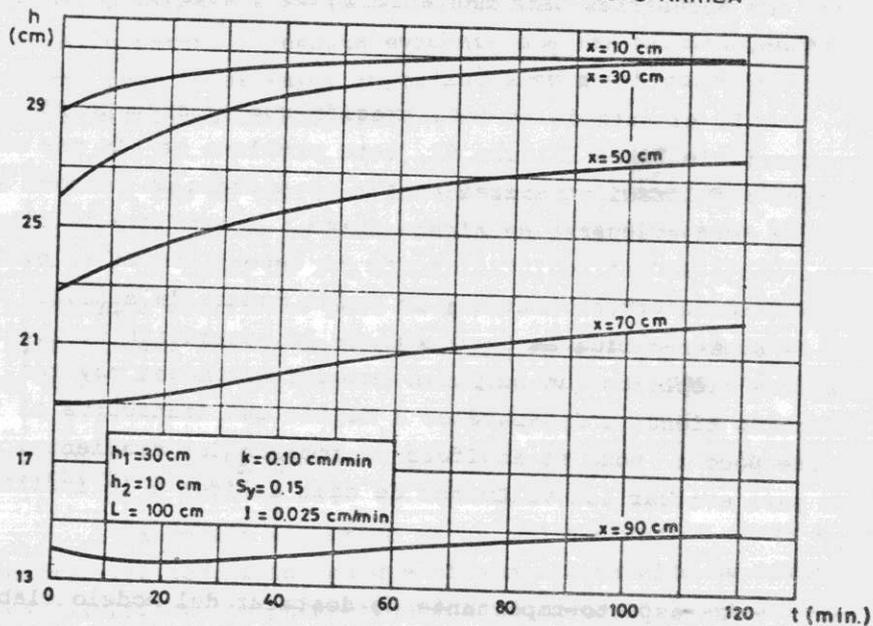


FIGURA 6
EVAPORACION CONSTANTE Y CONTINUA

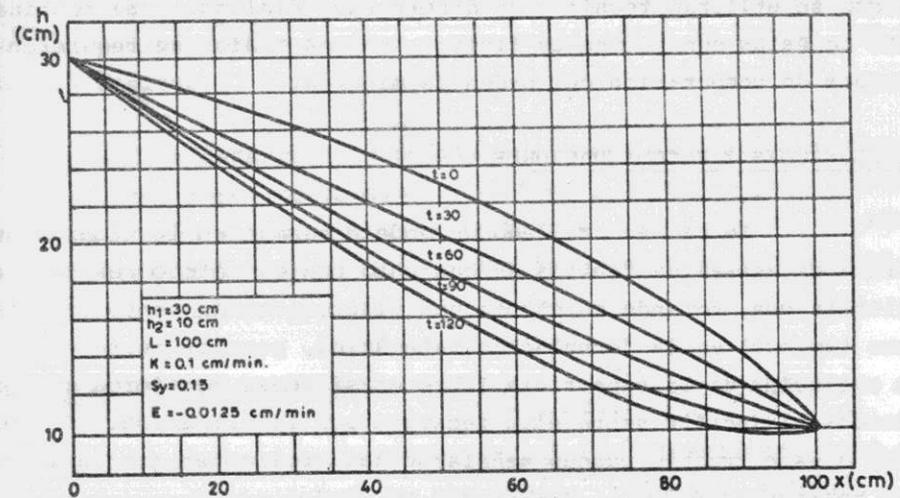
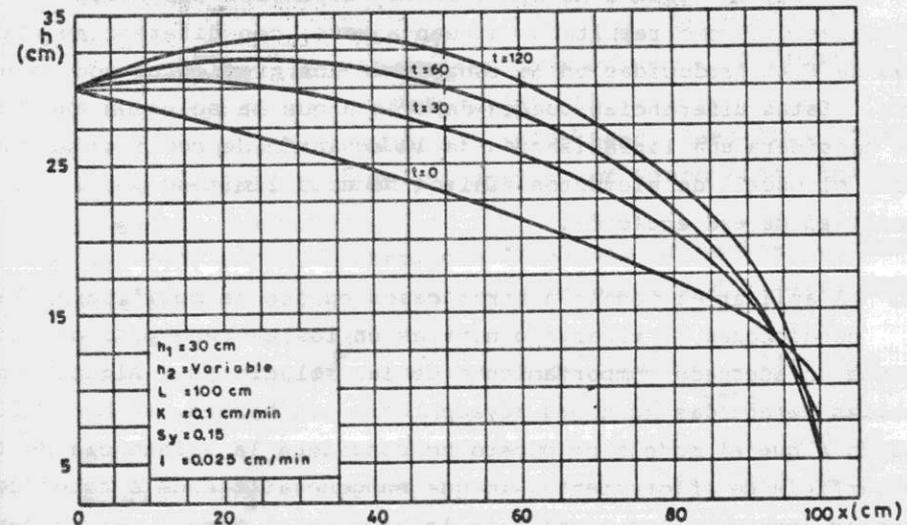


FIGURA 7
INFILTRACION CONSTANTE Y CONTINUA, Y DESCENSO LINEAL DEL NIVEL DE AGUAS ABAJO DURANTE 50 min. (de 10.0 a 5.0 cm)



mente con 240 elementos y 143 nudos, los tiempos de computación requeridos fueron de aproximadamente 30 seg, hecho que resalta la conveniencia de su uso al compararlo con otros modelos semejantes en que se utilizan técnicas de diferencias finitas o una combinación de éstas con elementos finitos, en los cuales se requieren tiempos de computación del orden de minutos.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se ha desarrollado un modelo basado en la técnica numérica de elementos finitos en conjunto con el método residual de Galerkin que, tomando en cuenta una discretización tanto espacial como temporal en la formulación matemática, permite representar la evolución de la superficie libre en sistemas acuíferos no confinados al incidir sobre ella recargas por infiltración. En relación a este trabajo pueden señalarse las siguientes conclusiones más relevantes :

1. La validación del modelo con una solución analítica para el caso de un sistema no confinado limitado por dos cauces superficiales dió como resultado un buen ajuste, con diferencias máximas de 6,4% producidas en la zona donde los gradientes son mayores. Estas diferencias pueden deberse a que la solución analítica considera una linealización de la ecuación de continuidad, mientras el modelo de elementos finitos no está limitado por la no linealidad de esa ecuación.

2. Al aplicar el modelo a otros casos en que se modificaron las condiciones de recarga o niveles en los cauces, pudo constarse un adecuado comportamiento de las soluciones. Algunas anomalías detectadas en zonas adyacentes a los bordes, se han atribuido a que el modelo propuesto no considera la existencia de la superficie de afloramiento, lo que en general tiende a hacer descender levemente los niveles de la napa en el modelo para generar los gradientes necesarios que permitan evacuar los caudales aportados por la infiltración. Según esto podría afirmarse que el modelo es riguroso respecto a las suposiciones impuestas.

3. Los tiempos de computación requeridos en un computador IBM 370-145 son del orden de 30 seg, lo que señala la eficiencia del modelo elaborado. Este hecho resalta la conveniencia de su uso frente a otros modelos computacionales en que se utilizan técnicas de diferencias finitas o una combinación de éstas con elementos finitos.

4. El modelo desarrollado podría aplicarse al diseño de obras tales como muros de embalse homogéneos, drenajes para protección de dichos muros, drenajes agrícolas, etc., frente al efecto de infiltración, evaporación, ondas de crecida y variaciones de nivel en general.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Bruch J.C. y G. Zvoloski "Transient two-dimensional heat conduction problems solved by the finite element method". Int. Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 8, 1974.
- Cabrera G. y M.A. Mariño "Dynamic response of aquifer systems to localized recharge". Water Resources Bull. AWRA. Vol. 12(1), 1976.
- Chu S.T. "Water table responses to a sequence of recharges". Water Resources Research. Vol. 13(4), 1977.
- Dagan G. "Linearized solutions of unsteady deep flow toward an array of horizontal drains". Journal of Geophysical Research. Vol. 69(16), 1964.
- Neuman S.P. y P.A. Witherspoon "Analysis of nonsteady flow with a free surface using the finite element method". Water Resources Research. Vol. 7(3), 1971.
- Rushton K.R. "Aquifer analysis using backward difference methods". Journal of Hydrology. Vol. 22(3/4), 1974.
- Zucker M.B., Remson I., Ebert J. y E. Aguado "Hydrologic studies using the Boussinesq equation with a recharge term". Water Resources Research. Vol. 9(3), 1973.