

ESQUEMA ITERATIVO PARA LA OPTIMIZACION NO LINEAL DE SISTEMAS DE AGUAS
SUBTERRANEAS CON VARIOS PERIODOS DE PLANEAMIENTO

GUILLERMO CABRERA F. (1)

MARCELO MATTHEY C. (2)

RESUMEN

Se presenta una metodología de optimización para la explotación de sistemas de aguas subterráneas, libres o confinados, que reemplaza el problema original de manejo óptimo para varios períodos de planeamiento, por una secuencia de problemas con grupos menores de períodos, traslapados entre sí, cuyas soluciones se van aproximando iterativamente a la solución del problema original. La técnica es especialmente atractiva en acuíferos no lineales donde generalmente existen limitaciones por el tamaño de los problemas a resolver.

El método se aplicó a dos casos teóricos en un sistema hipotético no lineal, en los que se propone minimizar una función de costo de explotación de la napa, sujeto a las ecuaciones de respuesta del sistema y a restricciones de tasas máximas de bombeo y de demanda de agua. En todos los problemas se utiliza el paquete de programación no lineal MINOS.

Se concluye que la secuencia de subproblemas entrega soluciones próximas a la real y mejoran en la medida que se consideren secuencias cuyo número de períodos sea tal que las variaciones de las tasas de bombeo extraídas en el primero de ellos implique menores variaciones de estado en el último.

Una metodología como la propuesta puede resultar muy útil en el caso de sistemas de gran tamaño con un alto número de períodos de planeamiento.

(1) Profesor e Investigador, Depto. Ingeniería Civil, Universidad de Chile.

(2) Ingeniero Civil, actualmente en Centro de Recursos Hidráulicos, Universidad de Chile.

INTRODUCCION

Determinar la manera de explotar un sistema acuífero es un problema de manejo óptimo. Decidir el valor de las tasas de bombeo en el espacio y el tiempo, de modo de optimizar una función objetivo, sujeto a ciertas restricciones de demanda, de niveles de explotación o cualquier otra, es una forma de racionalizar el uso de un recurso escaso.

Este problema, en muchos casos se puede plantear como un problema de programación matemática. Se requiere, sin embargo, incorporar en él un modelo de simulación que permita conocer la respuesta del sistema físico ante las diferentes reglas de explotación, como por ejemplo las depresiones en los pozos para determinadas tasas de bombeo.

Actualmente existen dos obstáculos en este tipo de problemas. El primero, que se presenta en acuíferos libres, se refiere a que la no linealidad del sistema implica generalmente tiempos elevados de proceso de computación, sobretodo cuando los acuíferos son de gran extensión, y el segundo, que se da tanto en sistemas libres como confinados, se refiere a que generalmente interesa optimizar un gran número de periodos de planeamiento, lo que implica un alto requerimiento de memoria computacional.

Para resolver problemas lineales de manejo existen, sin embargo, potentes herramientas computacionales, como por ejemplo el paquete computacional MPSX, que han permitido superar en gran medida el problema de tamaño (Willis, 1981); en nuestro país, Galleguillos et al (1987) propusieron la incorporación de las funciones de respuesta a bombeos unitarios para disminuir los requerimientos de memoria.

En sistemas no lineales, por el contrario, estas dificultades imponen una limitación a la magnitud de los problemas, ya que los paquetes computacionales disponibles no son eficientes cuando el número de variables y restricciones es grande.

En general, los trabajos realizados sólo permiten obtener soluciones aproximadas. Cabrera y Matthey (1986) proponen una función objetivo lineal y las ecuaciones de respuesta se linealizan, resolviéndose a continuación una secuencia de problemas de programación lineal; el inconveniente de esta técnica es que dado que la solución es un vértice del problema linealizado, ella no siempre coincide con un óptimo local del problema no lineal. Por otro lado, Willis y Jones (1987) propusieron un método basado en programación dinámica

diferencial (DDP), que si bien permite superar la dificultad de dimensionalidad, requiere de costosas operaciones para linealizar las ecuaciones de respuesta; en general, es un método complejo con muchas operaciones intermedias antes de llegar al óptimo.

La metodología que aquí se presenta permite resolver en forma aproximada los problemas de manejo óptimo no-lineales. Es una técnica simple de aproximación a la solución real, que no requiere linealizar las ecuaciones de respuesta y que ha demostrado una rápida convergencia en los casos teóricos, de pequeño tamaño, que han sido analizados.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para formular el problema de manejo óptimo es necesario previamente determinar las ecuaciones de respuesta que rigen el sistema acuífero, ya que ellas van incorporadas como restricciones del problema de optimización.

El escurrimiento bidimensional en un acuífero anisotrópico se rige por la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_x h \frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y h \frac{\partial H}{\partial y}) + I - Q = S \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1)$$

donde h es el espesor de la napa; K_x y K_y son los coeficientes de permeabilidad en las direcciones x e y , respectivamente; H es el potencial hidráulico; S es el coeficiente de almacenamiento; I y Q representan las tasas de infiltración y descarga. En el caso de flujo confinado $K_x h$ y $K_y h$ son los coeficientes de transmisibilidad.

Para resolver la ecuación (1) se utilizó el método de elementos finitos para la componente espacial y el de diferencias finitas para la temporal. Una vez discretizado el espacio en una malla de n nudos, y luego de aplicar estos métodos, la ecuación (1) puede escribirse matricialmente como sigue (si el sistema es lineal (2) o no lineal (3)):

$$[A](\bar{h}) + [B](\Delta \bar{h} / \Delta t) + (\bar{f}) = \bar{0} \quad (2)$$

$$(\bar{h})^T [C](\bar{h}) + [D](\bar{h}) + [E](\Delta \bar{h} / \Delta t) + (\bar{g}) = \bar{0} \quad (3)$$

donde las matrices de coeficientes dependen de la geometría y de los parámetros que caracterizan al acuífero; (\bar{f}) y (\bar{g}) son vectores columna que incluyen todas las entradas y salidas a la napa, tales como infiltraciones y tasas de bombeo.

El problema de optimización a resolver tiene la siguiente estructura:

$$\text{Min } \sum_M^{NT} F_M(\bar{h}_M, \bar{Q}_M) \quad (4a)$$

$$\text{s.a. } \bar{F}_M(\bar{h}_M, \bar{h}_{M-1}, \bar{Q}_M) = \bar{U} \quad (4b)$$

$$\bar{U} \leq \bar{Q}_M \leq \bar{Q}_{MAX} \quad (4c)$$

$$\sum_I^{NQ} Q_{M,I} = \text{DEMANDA}(M) \quad (4d)$$

donde F_M : función objetivo, \bar{F}_M : ecuaciones de respuesta del sistema, \bar{h}_M : espesor de la napa al final del período M . (\bar{h}_0 = condición inicial),

\bar{Q}_M : tasa de bombeo en los pozos durante el período M , \bar{Q}_{MAX} : tasas máximas de bombeo.

DEMANDA (M): demanda de aguas subterráneas en el período M , NT: número total de períodos de planeamiento, NQ: número de pozos.

La metodología propuesta consiste en reemplazar el problema (4) por una secuencia de problemas que incorporan un número de períodos LT cada uno, donde LT debe ser previamente definido.

Sea $J = NT - LT + 1$ y sea $\bar{h}_1^0, \bar{h}_2^0, \dots, \bar{h}_{J-1}^0$ espesores de la napa supuestos al iniciar el proceso de optimización. Asumiendo que todas las variables que llevan superíndice se consideran constantes, entonces en la i -ésima iteración la secuencia que se debe resolver es la siguiente:

Problema 1 (con $M = J + 1, \dots, NT$)

$$\text{Min } F_J(\bar{h}_J, \bar{Q}_J) + \sum_M F_M(\bar{h}_M, \bar{Q}_M) \quad (5a)$$

$$\text{s.a. } \bar{F}_J(\bar{h}_J, \bar{h}_{J-1}^{i-1}, \bar{Q}_J) = \bar{U} \quad (5b)$$

$$\bar{F}_M(\bar{h}_M, \bar{h}_{M-1}, \bar{Q}_M) = \bar{U} \quad (5c)$$

$$\bar{U} \leq \bar{Q}_M \leq \bar{Q}_{MAX} \quad (5d)$$

$$\sum_I^{NQ} Q_{M,I} = \text{DEMANDA}(M) \quad (5e)$$

Problema 2 (con $M = J, \dots, NT-1$)

$$\text{Min } F_{J-1}(\bar{h}_{J-1}, \bar{Q}_{J-1}) + \sum_M F_M(\bar{h}_M, \bar{Q}_M^i) \quad (6a)$$

$$\text{s.a. } \bar{F}_{J-1}(\bar{h}_{J-1}, \bar{h}_{J-2}^{i-1}, \bar{Q}_{J-1}) = \bar{U} \quad (6b)$$

$$\bar{F}_M(\bar{h}_M, \bar{h}_{M-1}, \bar{Q}_M^i) = \bar{U} \quad (6c)$$

$$\bar{U} \leq \bar{Q}_{J-1} \leq \bar{Q}_{MAX} \quad (6d)$$

$$\sum_I^{NQ} Q_{J-1,I} = \text{DEMANDA}(J-1) \quad (6e)$$

Problema J (con $M = 2, \dots, LT$)

$$\text{Min } F_1(\bar{h}_1, \bar{Q}_1) + \sum_M F_M(\bar{h}_M, \bar{Q}_M^i) \quad (7a)$$

$$\text{s.a. } \bar{F}_1(\bar{h}_1, \bar{h}_0, \bar{Q}_1) = \bar{U} \quad (7b)$$

$$\bar{F}_M(\bar{h}_M, \bar{h}_{M-1}, \bar{Q}_M^i) = \bar{U} \quad (7c)$$

$$\bar{U} \leq \bar{Q}_1 \leq \bar{Q}_{MAX} \quad (7d)$$

$$\sum_I^{NQ} Q_{1,I} = \text{DEMANDA}(1) \quad (7e)$$

Y se deja de iterar cuando se cumple:

$$\|T_M^i - T_M^{i-1}\| \leq \epsilon_h \quad (8a)$$

$$\|Q_M^i - Q_M^{i-1}\| \leq \epsilon_Q \quad (8b)$$

donde ϵ_h y ϵ_Q son errores admisibles preestablecidos suficientemente pequeños.

La determinación del número de periodos LT depende de cada caso particular, pero mientras menor sea el efecto del bombeo en el primer periodo de cada subproblema sobre las variables de estado del último periodo, mejores serán los resultados. Se puede ver que la secuencia así definida permite introducir la dependencia entre el óptimo de cada periodo y los óptimos de los periodos anteriores y posteriores, a diferencia de la optimización separada de periodos (OSP) que sólo incorpora la dependencia con los anteriores, utilizando como condición inicial el estado generado en el periodo precedente (Alley et al., 1976).

Como se ha señalado, la aplicación de esta metodología es de especial interés en acuíferos libres. En tales casos debe utilizarse paquetes de programación no lineal para resolver cada problema, como por ejemplo para este trabajo el MINOS.

APLICACION A UN SISTEMA ACUIFERO NO LINEAL

Se ha considerado dos problemas de manejo óptimo en un sistema con escurrimiento bidimensional, en que la única fuente de abastecimiento es el agua subterránea. El sistema físico y la configuración de elementos finitos utilizada se presenta en la Figura 1.

Se consideran periodos de planeamiento de una duración de 20 minutos, discretizados en un único intervalo de tiempo $\Delta t = 20$ (min). La tasa máxima de bombeo en los pozos fue de 6 (m^3/min) y la demanda por periodo fue de 20 (m^3/min). El estado inicial del sistema está dado por los niveles en régimen permanente sin bombeo, es decir:

$$H^2 = H_1^2 - \frac{(H_1^2 - H_2^2)}{L} \cdot X \quad 0 \leq X \leq L \quad (9)$$

Se consideró una función objetivo cuya expresión es la siguiente:

$$F = \sum_{M,1}^{NT,NQ} C_M Q_{M,1} (H_1 - H_{M,1}) \quad (10)$$

donde: C_M : costo unitario de bombeo asociado al periodo M ($\$/m \cdot m^3/min$). $Q_{M,1}$: tasa de bombeo en el l-ésimo pozo durante el periodo M, $H_{M,1}$: potencial hidráulico en el l-ésimo pozo al final del periodo M, NT: número total de periodos, NQ = número de pozos.

Primer caso: NT = 4, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$, $C_4 = 4$

Se consideró los siguientes valores para el número de periodo LT de cada subproblema: LT = 4, que corresponde al problema original de manejo; LT = 3, en que cada secuencia está compuesta de dos subproblemas de optimización de 3 periodos cada uno; LT = 2, en que cada secuencia está compuesta de tres subproblemas de optimización de 2 periodos cada uno; finalmente se aplicó el método de optimización separada de periodos (OSP), en que se resuelve primero el problema del primer periodo, luego el del segundo, y así hasta llegar al cuarto. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 2 y en la Tabla 1.

Tabla 1.- Valor de función objetivo (\$) respecto al número de periodos LT

Punto de Partida Po (1)	LT	Iteración		
		1	2	3
1	3	1159.96	1164.09	1164.09
	2	1137.44	1164.36	1164.22
2	3	1172.58	1164.09	1164.09
	2	1217.34	1164.06	1164.22
3	3	1166.58	1164.09	1164.09
	2	1179.19	1164.24	1164.22

LT=4, min F = \$ 1164.08
OSP, min F = \$ 1165.46

- (1) Se refiere a los diferentes patrones de bombeo adoptados inicialmente:
- Po = 1 : Q = 0, en todos los pozos
 - Po = 2 : Q = 9, en todos los pozos
 - Po = 3 : Q = 2 en nudos 4 y 5, Q = 5 en 7 y 8, Q = 8 en 10 y 11.

Segundo caso: $NT = 6$, $C_1 = 1$, ..., $C_5 = 5$, $C_6 = 6$

Además de la secuencia con $LT = 3$, se resuelve el problema original ($LT = 4$) y se aplica la optimización separada de periodos (OSP).

Se consideró los siguientes valores para el número de periodos LT : $LT = 6$, $LT = 3$ y OSP. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 3 y en la Tabla 2.

Tabla 2.- Valor óptimo de la función objetivo (\$) respecto a LT , para cada periodo M .

Periodo M	OSP	LT=3	LT=6
1	104.16	104.64	104.86
2	229.84	229.78	229.81
3	354.54	354.15	354.11
4	476.92	476.34	476.18
5	597.89	596.77	596.72
6	718.15	716.51	716.49
Σ	2481.50	2478.19	2478.17

ANÁLISIS DE RESULTADOS

- El procedimiento propuesto ha demostrado una rápida convergencia (Tabla 1). La solución dada por cada caso es mucho mejor que la entregada por la optimización separada de periodos, llegando en el caso de $LT = 3$ a valores muy cercanos a la solución real (Figuras 2 y 3).
- La secuencia con $LT = 3$ da mejores resultados que la de $LT = 2$, ya que supone que el bombeo de un periodo cualquiera no tiene influencia sobre los niveles del tercer periodo que le sigue, en circunstancias que para $LT = 2$ se supone una influencia de sólo dos periodos, lo que está más lejos de la realidad.

- Las dos secuencias aplicadas han demostrado un comportamiento estable, en el sentido de que independiente del punto de partida del proceso de optimización la solución ha sido la misma (Tabla 1).
- Las tasas óptimas de bombeo entregadas por cada procedimiento reflejan lo siguiente:
 - En los nudos 4 y 5 se bombea con la tasa máxima por estar en una zona cercana a un borde de potencial fijo y donde el espesor de la napa es mayor, con lo que se generan gradientes externos que suplen el bombeo con facilidad.
 - En el nudo 8 se bombea más que en los nudos 7, 10 y 11, porque el mayor espesor de la napa lo hace preferible a los nudos 10 y 11, y su mayor distancia a las paredes impermeables, con la consiguiente disminución de la depresión, lo hace mejor que el nudo 7.
- En la medida que LT crece se prefiere bombear más en los nudos cercanos a los bordes, ya que el bombeo en estos últimos nudos se siente menos en los periodos siguientes. El procedimiento OSP bombea más en 7 y 8 porque sólo le interesa ubicar las zonas de mayor espesor, sin importar los efectos sobre los periodos posteriores. Al adoptar el método OSP, si bien se logra un mejoramiento significativo de la función objetivo asociada al primer periodo, para los periodos siguientes el valor de ella empeora con respecto a los otros métodos (Tabla 2).

CONCLUSIONES GENERALES Y PROYECCIONES

- El método propuesto ha entregado una buena aproximación al óptimo real de los casos analizados, lo que hace prever que puede ser muy útil en aplicaciones a cuencas reales con un gran número de periodos de planeamiento, ya que permite disminuir en forma importante los requerimientos de memoria computacional.
- Se requiere, sin embargo, que el número de periodos de planeamiento de cada subproblema sea tal que la influencia entre el primer y último periodo resulte ojalá despreciable, lo que en problemas reales generalmente implicará aumentar el número de periodos de planeamiento en cada subproblema. Aún así se podrá optar por menos periodos, aceptando que la solución obtenida será menos próxima al óptimo buscado.

c) Se pretende aplicar una metodología como la aquí presentada a un problema de manejo óptimo en la cuenca de Santiago, para varios periodos de planeamiento; dada la gran extensión del acuífero y los altos niveles de explotación a los que se ha llegado, este problema es de gran importancia.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- ALLEY W.M., AGUADO E. y REMSON I. (1976). "Aquifer Management Under Transient and Steady-State Conditions". Water Resources Bulletin, Vol. 12, Nº 5, October.
- CABRERA G., M. MATTHEY y E. BROWN. (1986). "Modelo de Optimización para la Explotación Racional de Recursos Subterráneos. I. Planteamiento y Validación Teórica". XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, A.I.I.H. Sao Paulo, Brasil.
- GALLEGUJILLOS G., ZUÑIGA J., BERTOLOTTO C. y SILVA P. (1987). "Explotación de Aguas Subterráneas Mediante Control Óptimo". VIII Congreso Nacional de Ingeniería Hidráulica.
- MATTHEY M. y CABRERA G. (1987). "Modelos de Optimización para Sistemas de Aguas Subterráneas", Universidad de Chile.
- WILLIS R. (1981). "A Unified Approach to Regional Groundwater Management". Humboldt State University.
- WILLIS R. y JONES L. (1987). "Optimization of Unconfined Groundwater Systems: A Differential Dynamic Programming Algorithm". Geological Society of India. Bangalore.

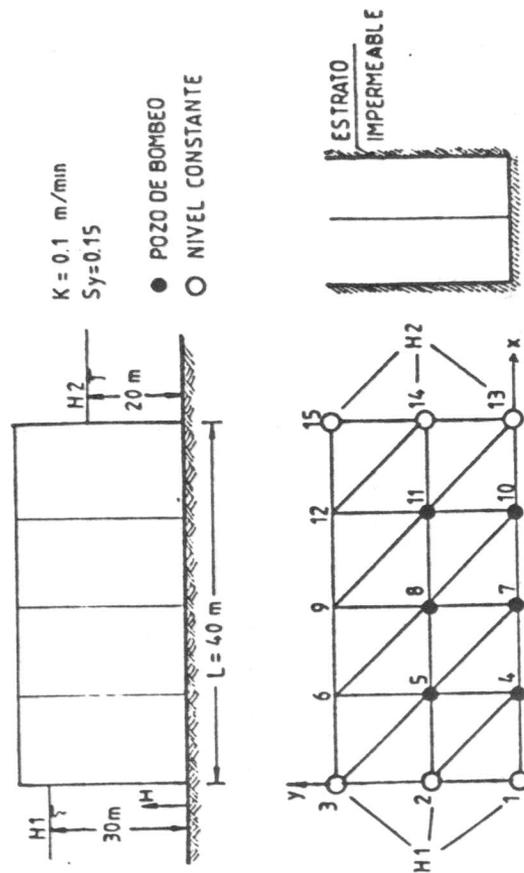


FIGURA 1. ESQUEMA SISTEMA Y MALLA DE ELEMENTOS

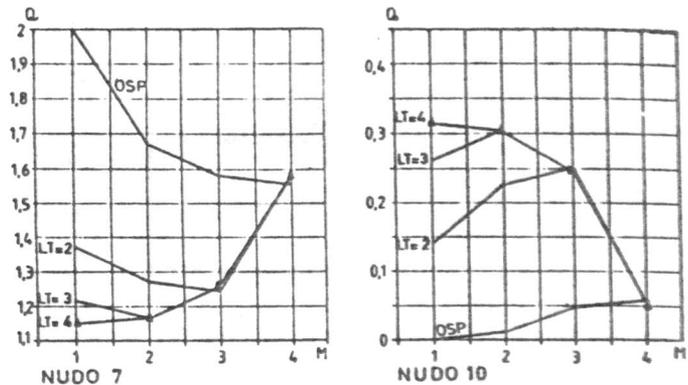


FIGURA 2. TASAS DE BOMBEO OPTIMO EN POZOS
(Q4 Y Q5 OPTIMOS = $6 \text{ m}^3/\text{min}$)
▲ : OPTIMO PROBLEMA ORIGINAL

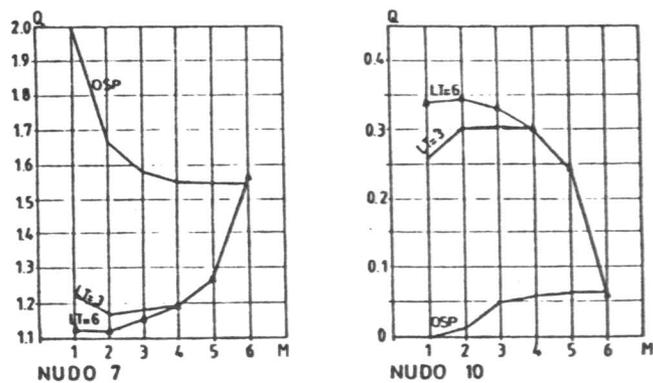


FIGURA 3. TASAS DE BOMBEO OPTIMOS EN POZOS
(Q4 Y Q5 OPTIMOS = $6 \text{ m}^3/\text{min}$)
▲ : OPTIMO PROBLEMA ORIGINAL

