

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

IX CONGRESO NACIONAL

MODELOS ARMAX EN LA GENERACION SINTETICA DE  
SERIES DE CAUDALES. COMPARACION CON  
OTRAS METODOLOGIAS

Ximena Vargas (1)  
Ernesto Brown (1)  
Abdón Naim (2)

RESUMEN

Se examina la aplicación de modelos del tipo ARMAX (autorregresivo de promedio móvil con variable exógena) a la generación de series de gastos medios mensuales usando series históricas correspondientes a dos cuencas de regímenes hidrológicas sustancialmente diferentes entre sí. Se analizan los resultados y se comparan con otros procedimientos alternativos.

- 
- (1) Ingeniero Civil, Profesor e Investigador, Centro de Recursos Hidráulicos, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.
  - (2) Ingeniero Civil, Ex-Ayudante de Investigación, Centro de Recursos Hidráulicos, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.

## INTRODUCCION

Dentro de una línea de investigación en generación de series sintéticas de caudales, usando modelos estocásticos, el Centro de Recursos Hidráulicos de la Universidad de Chile ha desarrollado diversos trabajos. Entre estos cabe señalar a Brown y Torretti (1978) que examinaron la aplicabilidad de modelos de Markov de primer orden a la generación de series de caudales medios anuales y mensuales; a Brown y Cisternas (1978) que abordaron la generación de precipitaciones diarias mediante una combinación de un proceso de Poisson con un proceso de Markov simple; a Brown et al (1983) que desarrollaron el mismo tema pero sólo a base de un proceso de Markov simple, a Arrese (1984) que utilizó las series de precipitaciones generadas como entrada para un modelo conceptual de simulación hidrológica; y, Vargas y Brown (1985), y Vargas et al (1987) que analizaron el uso de modelos tipo ARMA en la generación de series de precipitaciones y caudales medios mensuales.

En el caso de este trabajo, se examina la generación de caudales medios mensuales y precipitaciones mensuales mediante modelos denominados del tipo ARMAX, vale decir, modelos autorregresivos de promedio móvil, con una variable exógena. Los resultados obtenidos se discuten y el procedimiento se compara con aquellos usados en los trabajos señalados anteriormente, estableciéndose sus ventajas y desventajas.

## PLANTEAMIENTO CONCEPTUAL

En general un modelo del tipo ARMAX, para una variable normal y estacionaria, puede escribirse como:

$$q_t = \bar{q}_t + \eta_t \quad (1)$$

- en que -  $q_t$  es el valor de la variable caudal en  $t$   
-  $\bar{q}_t$  es la componente determinística del modelo en  $t$ .  
-  $\eta_t$  es la componente aleatoria del modelo en  $t$ .

La componente determinística podrá escribirse en forma general como:

$$\bar{q}_t = \delta_1 q_{t-1} + \delta_2 q_{t-2} + \dots + \delta_r q_{t-r} + w_0 p_{t-b} - w_1 p_{t-b-1} - \dots - w_s p_{t-b-s} \quad (2)$$

- en que  $p_{t-j}$  es la precipitación en el intervalo de tiempo  $(t-j)$  considerada como variable exógena.  
 $b$  es un desfase temporal entre la serie de la variable exógena y la serie de caudales.  
 $q_{t-j}$  es el caudal en el intervalo de tiempo  $(t-j)$ .

La forma de la componente determinística de la ecuación (2) implica considerar un efecto de persistencia y una dependencia de la variable caudal en  $t$  de la precipitación en intervalos de tiempo anteriores.

La componente aleatoria  $\eta_t$  se ha expresado en general como un modelo ARMA, en función de impactos aleatorios  $a_t$  que poseen media nula y varianza  $\sigma_a^2$ , de la siguiente forma:

$$\eta_t = \phi_1 \eta_{t-1} + \phi_2 \eta_{t-2} + \dots + \phi_p \eta_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3)$$

La identificación del orden  $r$  y  $s$  de la componente determinística, del parámetro de desfase  $b$ , y la identificación del modelo ARMA para la componente aleatoria, se hace por los procedimientos descritos por Naim (1989).

Por otra parte el ajuste de los parámetros definitivos se ha hecho, en ambos casos anteriores, utilizando el algoritmo IVAML (variable instrumental por aproximación de máxima verosimilitud). (Vargas et al, 1985; Vargas et al, 1986; Naim 1989).

## APLICACIONES

En lo que sigue se muestra la aplicación del procedimiento señalado a dos cuencas de regímenes hidrológicos sustancialmente

diferentes, la correspondiente al río Bureo en Mulchén, de régimen netamente pluvial y ubicada en la hoya hidrográfica del río Bio-Bio, y, la cuenca del río Maipo en El Manzano, de régimen hidrológico fundamentalmente nival. Las características geomorfológicas e hidrológicas medias de estas cuencas se muestran en la Tabla 1.

Las estaciones pluviométricas adoptadas como representativas de la precipitación en cada una de las cuencas fueron Cerro El Padre (Lat. 37°46' y Long. 71°53') para la cuenca de Bureo en Mulchén y Embalse El Yeso (Lat. 33°41' y Long. 70°07') para Maipo en El Manzano.

**TABLA 1: CARACTERISTICAS GEOMORFOLOGICAS E HIDROLOGICAS DE LAS CUENCAS UTILIZADAS**

Cuenca	Latitud	Longitud	Area (Km2)	Caudal Medio (m3/s)
Bureo en Mulchén	37°42'	72°42'	656	46,6
Maipo en El Manzano	33°36'	70°24'	4.968	104,1

Los modelos ajustados a las series de gastos medios mensuales, transformada y estandarizada, fueron en cada caso:

- Bureo

$$q_t = 0,2417 q_{t-1} + 0,0926 q_{t-2} + 0,6171 p_t - 0,16 p_{t-1} + a_t \quad (4)$$

- Maipo

$$q_t = 0,8269 q_{t-1} + 0,1562 p_t + a_t \quad (5)$$

Para comprobar la bondad del ajuste se utilizaron los modelos dados por las ecuaciones (4) y (5), aplicadas a las series históricas, adoptando para el impacto aleatorio  $a_t$  su valor esperado igual a cero. Los resultados del ajuste pueden apreciarse, en términos anuales, en la Tabla 2.

**TABLA N°2:**

**RESULTADOS ANUALES DEL AJUSTE DE LOS MODELOS A LA SERIE HISTORICA**

Estadígrafo	Bureo en Mulchén					Maipo en El Manzano		
	HIST.	ARMAX	ARMAX12	ARMA	M.S.	HIST.	ARMAX	ARMA
Media	46,60	45,00	45,50	43,20	47,00	104,10	103,50	102,80
Desv. Estándar	13,70	10,70	11,00	6,00	10,30	35,30	30,40	29,60
Coef. Correlac.	0,25	0,08	0,09	0,26	0,05	0,10	0,11	0,12
Coef. Asimetría	0,57	0,30	0,37	0,95	0,08	0,24	0,31	0,32
Corre. Estacional	0,08	0,03	0,03	0,37	0,11	0,79	0,71	0,67

En la Tabla 2 se han incorporado a manera de comparación, los resultados del ajuste a las mismas series de modelos ARMA (Vargas et al 1987) y, en el caso del río Bureo, del ajuste logrado a través de un modelo de simulación hidrológica (M.S.) (Naim 1989). El estadígrafo correlación estacional es un índice de la preservación de las características internas de cada año hidrológico. Naim (1989) presenta además los resultados del ajuste a nivel mensual, además del resultado de la aplicación de un conjunto de tests estadísticos.

Un procedimiento alternativo, que se aplicó sólo en el caso de la serie Bureo en Mulchén, consistió en ajustar a cada mes del año un modelo ARMAX distinto para la variable transformada  $q_t$ . En este caso los modelos son de la forma:

$$q_t = \mu_{qt} + \delta_1 (q_{t-1} - \mu_{qt-1}) + w_0 (p_t - \mu_{pt}) + a_t \quad (6)$$

Los valores de los parámetros  $\delta_1$  ajustados, variaron entre 0,0409 y 0,7729, y los de  $w_0$ , entre 0,1115 y 0,7879. En la Tabla 2 se ha agregado una columna (ARMAX12) con los resultados anuales siguiendo este procedimiento.

Los modelos ajustados se emplearon también para la generación de series sintéticas. En este caso los impactos aleatorios  $a_t$  se generaron con la subrutina Gauss disponible en el sistema computacional de la Facultad de Ciencias Físicas y

Matemáticas, con una varianza predeterminada según el tipo de modelo.

El procedimiento consistió en generar un número suficiente de series de gastos medios mensuales, de 50 años de longitud cada una, de tal manera que, luego de someterlas a diversos tests estadísticos, pudiera conformarse un conjunto de 50 series que pudieran considerarse estadísticamente aceptables. Los resultados obtenidos a nivel de valores medios anuales, se muestran en la Tabla 3, en la que las cifras incluidas corresponden a los valores medios calculados a partir de las 50 series generadas.

**TABLA 3: RESULTADOS ANUALES DE LA GENERACION**

Estadigrafo	Bureo en Mulchén					Maipo en El Manzano		
	HIST.	ARMAX	ARMAX12	ARMA	M.S.	HIST.	ARMAX	ARMA
Media	46,6	45,6	46,0	46,4	46,7	104,1	103,5	103,5
Desv. Estándar	13,7	13,3	13,3	13,1	10,2	35,1	33,2	33,7
Coef. Correlac.	0,25	-0,01	-0,02	-0,01	0,02	0,10	0,17	0,22
Coef. Asimetría	0,57	0,63	0,63	0,65	0,34	0,24	0,65	0,67
Corre. Estacional	0,08	0,13	0,16	0,10	0,26	0,79	0,51	0,56

#### COMENTARIOS SOBRE LOS RESULTADOS

Con respecto a los resultados de la simulación de la serie histórica, puede apreciarse (Tabla 2) que los modelos ARMAX exhiben una mejoría con respecto a los ARMA, y esto es aún más notorio con los modelos ARMAX mensuales. En este último caso, el análisis de los valores mensuales (Naim, 1989) indica una notoria mejoría en los coeficientes de correlación mensuales. Con respecto a los resultados del modelo de simulación hidrológica, estos autores consideran que ellos no son rigurosamente comparables, puesto que el modelo usado es de una estructura bastante simplificada.

Con respecto a los resultados de la generación de series, no se aprecian diferencias de importancia entre los procedimientos, al menos a nivel anual, salvo una disminución en el coeficiente de correlación estacional en el caso de Maipo en El Manzano, donde además, la prueba estadística señala un importante número de rechazos para este estadígrafo. El comportamiento relativamente pobre del coeficiente de correlación estacional no se aprecia para Bureo en Mulchén, dado que el valor histórico del mismo, es en este caso prácticamente nulo.

Con respecto a los valores mensuales generados (Naim, 1989) se observa que las medias, desviaciones estándar y coeficientes de asimetría se preservan razonablemente bien. En cuanto a los coeficientes de correlación mensuales, ellos presentan una menor variabilidad que los correspondientes históricos (Ver figuras 1 y 2); sin embargo al usar modelos ARMAX mensuales se aprecia una mejoría notoria de este estadígrafo, aún cuando no logra reproducir del todo los valores históricos (Ver figura 3).

#### CONCLUSIONES

La aplicación de modelos tipo ARMAX en la generación de series de gastos medios mensuales, proporciona resultados que pueden considerarse levemente superiores a los que entregan modelos tipo ARMA, cuando ambos se plantean como modelos únicos para la serie. Si se usan modelos tipo ARMAX mensuales, se mejora sustancialmente la preservación del coeficiente de correlación mensual, lo que también podría lograrse con modelos tipo ARMA mensuales.

La mantención de las características hidrológicas de un año, cuantificadas a través del coeficiente de correlación estacional, no es del todo satisfactoria. En este sentido, en opinión de los autores, el uso de un modelo de simulación hidrológica de tipo conceptual, bien desarrollado y calibrado, en conjunto con series de precipitación generadas con modelos tipo ARMA debería

entregar resultados superiores. Sin embargo, para lograr una adecuada representación de las series de gastos mensuales, debería disponerse de un modelo a escala temporal inferior al mes (semanal o diario) y la generación de precipitaciones debería hacerse a dicha escala temporal.

#### REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Brown E. y E. Torretti (1977). "Experimentación con el Modelo de Markov de Primer Orden en la Generación Estocástica de Caudales". Centro de Recursos Hidráulicos, Depto. de Ingeniería Civil, Universidad de Chile. CRH 78-9-I.
- Brown E. y E. Cisternas (1978). "Formulación y Aplicación de un Modelo de Generación Estocástica de Precipitaciones Diarias". Centro de Recursos Hidráulicos, Depto. de Ingeniería Civil, Universidad de Chile. CRH 78-7-I.
- Naim A. (1989). "Un Modelo Estocástico de Simulación de Caudales Medios Mensuales". Tesis para optar al título de Ingeniero Civil, Universidad de Chile.
- Vargas X. y E. Brown (1985). "Análisis de Procedimientos Alternativos para Generar Series de Caudales Usando Modelos ARMA". V Congreso de Metodologías. Santiago. Chile.
- Vargas X., Brown E. y G. Sandoval (1986). "Un Modelo de Función de Transferencia para el Pronóstico de Caudales en Tiempo Real". XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica. Vol 2. Sao Paulo Brasil. pp 168-179.
- Vargas X., E. Brown y J. Miranda (1987). "Generación de Series de Variables Hidrológicas Usando Modelos ARMA". VIII Congreso Nacional de Ingeniería Hidráulica. Sociedad Chilena de Ingeniería Hidráulica. Santiago, Chile.
- Vargas X., H. Zavala y E. Brown (1985). "Propagación de Crecidas en Tiempo Real Usando el Filtro de Kalman". VII Congreso Nacional de Ingeniería Hidráulica. Sociedad Chilena

de Ingeniería Hidráulica. Concepción, Chile Vol 2 pp. 353-370.

Vargas X., H. Zavala y E. Brown (1986). "Modelos ARMAX en el Estudio de Propagación de Crecidas en "Tiempo Real" "XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica. Vol 2. Sao Paulo Brasil. pp 136-144.

#### RECONOCIMIENTO

Los autores desean agradecer al Departamento de Ingeniería Civil y al Departamento Técnico de Investigación de la Universidad de Chile que a través del Proyecto 2461 proporcionaron el financiamiento necesario para el desarrollo de la investigación aquí presentada.

FIG. 1: MAIPO EN EL MANZANO

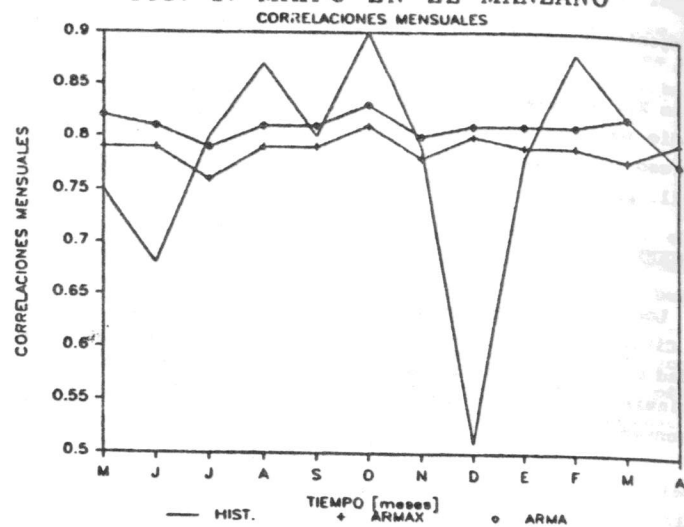


FIG. 2: BUREO EN MULCHEN

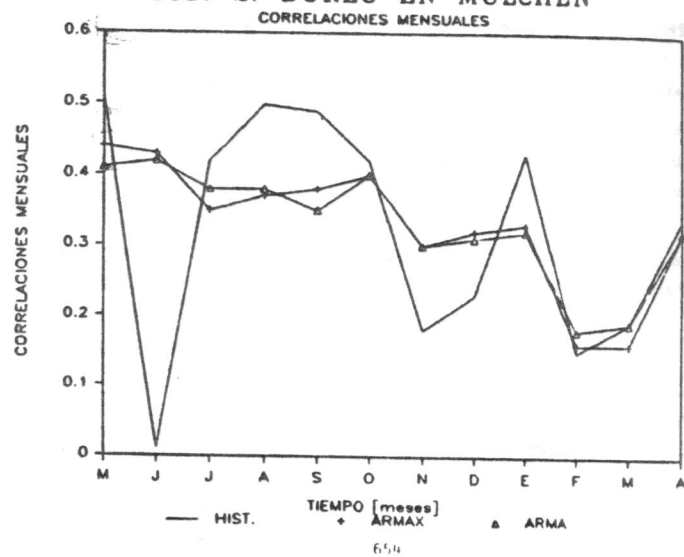


FIG. 3: MODELOS ARMAX MENSUALES

