SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

XXII CONGRESO CHILENO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

MODELACIÓN NUMÉRICA 3D DE LA INTERACCIÓN ENTRE FLUJO Y PARTÍCULA EN SUELOS GRANULARES.

DIEGO SOTO R.[1]
PAULO HERRERA R. [2]

RESUMEN

Para entender fenómenos tales como la erosión de suelos granulares y presas, la filtración de sedimentos en pozos, los mecanismos que causan aluviones, etc. Se debe comprender la interacción entre agua y suelo para poder estimar la distribución de esfuerzos sobre los sólidos que conforman el esqueleto del medio. El estudio de los esfuerzos viscosos que oponen resistencia al flujo también es relevante para calcular la permeabilidad de sedimento y rocas que conforman acuíferos bajo distintas condiciones. La distribución de esfuerzos en ausencia de flujo ha sido identificada y caracterizada (por ejemplo, Thornton, 1997; Radjai et al., 1996). Actualmente, este tipo de análisis es posible mediante el uso de herramientas de simulación numérica que permiten modelar de forma acoplada los efectos de los esfuerzos a través del esqueleto y la interacción con el flujo.

En este trabajo se muestra la primera parte de un estudio en el que se analiza la interacción flujo-partícula. Por tanto se enfoca en los efectos del tamaño de los granos, polidispersión y confinamiento de un paquete de suelo sobre los valores de la conductividad hidráulica. Para lo anterior, utilizamos YADE, software de código abierto el cual simula los esfuerzos en el suelo mediante el equilibrio de fuerzas y balance de momentum en paquetes de esferas utilizando el método de elementos discretos (Šmilauer, 2006; Šmilauer and Chareyre, 2010). Además, YADE incluye un módulo que permite simular el flujo de un fluido, utilizando el método de volúmenes finitos a escala de poros (Catalano et al., 2014). Entonces es posible analizar el efecto combinado del flujo y los esfuerzos del suelo.

Utilizando YADE se obtienen valores para la conductividad hidráulica de suelos sintéticos con distintas características granulométricas. Se realizan comparaciones de la conductividad hidráulica

[1]Estudiante, Depto. de Ingeniería Civil, FCFM, Universidad de Chile - horusdnsr@hotmail.com
[2]Profesor Asistente, Depto. de Ingeniería Civil, FCFM, Universidad de Chile - pherrera@ing.uchile.cl

(K) obtenida mediante la modelación numérica con fórmulas empíricas que relacionan el valor de K con un tamaño característico del diámetro de los sedimentos, tales como: Hazen (1892), Slichter (1899), Terzaghi (1925), Beyer (1964), recopilados en (Shepherd, 1989) y (Devlin, 2015). Primero, analizamos el caso para paquetes de esferas de diámetro uniforme y diversos tamaños de radio. En segunda instancia, los paquetes de esferas poseen un diámetro medio y se encuentran uniformemente distribuidas en el intervalo comprendido entre $[D_{mean}+2Sd\cdot D_{mean}, Dmean-2Sd\cdot D_{mean}]$, donde Sd es un parámetro que sirve para representar distintas distribuciones de tamaños, entre más se acerca a 1, mayor es la diferencia entre el tamaño máximo y mínimo de las esferas. Además, consideramos distintas presiones de confinamiento axial.

1. INTRODUCCIÓN

Diversos métodos numéricos han sido usados para estudiar la interacción entre flujo-partícula. Por ejemplo, el método de elementos discretos (DEM) ha sido acoplado con el método de Lattice-Boltzmann (LBM) (Han et al., 2007; Lominé et al., 2013; Galindo-Torres et al., 2013), y con el método de volúmenes finitos (FVM) (Chen et al., 2011; Catalano et al., 2013), entre otros. En general, estas técnicas numéricas han estado disponible desde décadas, pero sólo han podido ser implementadas recientemente con el aumento de las capacidades de cómputo para modelar distintos fenómenos físicos.

El método de elementos discretos (DEM, *Discrete Element Method*) utiliza en la mayoría de las ocasiones círculos o esferas en 2D y 3D, para representar los granos del esqueleto de suelos. El método se basa en resolver las ecuaciones de movimiento para cuerpos rígidos sujetas a campos de aceleración y a interacciones entre sí mediante choques inelásticos, en los que ocurren transmisiones de fuerzas y de momentum. Para completar la solución del problema, es necesario definir condiciones de borde e iniciales y seleccionar valores de ciertos parámetros, como la densidad, el ángulo de fricción, el coeficiente de Poisson, el módulo de Young, entre otros. También, existe la posibilidad de extender el método mediante algoritmos de detección e interacción para partículas no esféricas (Boon et al., 2013).

En el caso de YADE, el flujo es simulado mediante el uso del método de volúmenes finitos a escala de poros (PFV) (Catalano et al., 2013), que consiste en discretizar un dominio continuo en una serie de elementos de volumen de fluido con forma de tetraedros, tal que los vértices coinciden con los centros de las esferas que lo rodean. Lo anterior bajo el supuesto de que el fluido se encuentra en un medio permeable. En cada volumen de la grilla numérica se realiza un balance de masa utilizando el teorema de la divergencia 1. Este balance iguala la variación de volumen del elemento con la sumatoria de caudales de los cuatro elementos contiguos q_{ij}, en donde $(u - v)$ corresponde a la velocidad relativa del fluido con el solido (Catalano et al., 2011).

$$\dot{V}_i^f = \int_{s_{ij}} (u - v) \cdot n \, ds = \sum_{j=j_1}^{j_4} q_{ij} \tag{1}$$

Con el objetivo de facilitar el análisis de los resultados que se presentan en la secciones posteriores, presentamos un breve resumen de las ecuaciones que definen el acople implementado en YADE. La

implementación se relaciona de manera directa con los costos computacionales, algunos elementos de estabilidad y en los supuestos físicos que deben cumplir las condiciones de contorno.

Para realizar el acople se asume un bajo número de Reynolds lo que implica un régimen de escurrimiento de Stokes en donde los términos advectivos de la ecuación de Navier-Stokes son despreciados. Utilizando el teorema de la divergencia y proponiendo una expresión para la viscosidad se obtiene,

$$GP = E\dot{x} + Q_p + Qq \tag{2}$$

donde G corresponde a la matriz del cociente entre la viscosidad y la longitud donde ocurre la diferencia de presión local, P corresponde a un vector con los valores de la presión, E corresponde a la matriz que define la variación de volumen en función de la velocidad $\dot{x}$, de tal forma que $E\dot{x} = \dot{V}^f$ es la variación de volumen, Q_p es el vector de flujo producto de las condiciones de presión y, finalmente, Q_q es un vector de flujo debido a las condiciones de caudal.

Para definir el movimiento de las partículas se utiliza la siguiente formulación matricial,

$$M\ddot{x} = F^c + W + F^f \tag{3}$$

donde M corresponde a una matriz que contiene el valor de la masa de cada una de las esferas, $\ddot{x}$ es el vector de aceleración de las partículas, F^c representa al vector de fuerzas de contacto entre partículas, F^f es el vector de fuerzas debido a la acción del fluido, y W corresponde al vector de fuerzas debido a los campos de aceleración, el que en la mayoría de los casos se reduce a la aceleración de gravedad.

Finalmente, para completar el acople se tiene

$$F^f = SP \tag{4}$$

donde S es una matriz que representa la superficie del sólido en contacto con el flujo. Por lo tanto, el problema que soluciona el modelo es el siguiente:

$$\ddot{X} = M^{-1}(Fc + W + SG^{-1}(E\dot{X} + Q_q + Q_p)) \tag{5}$$

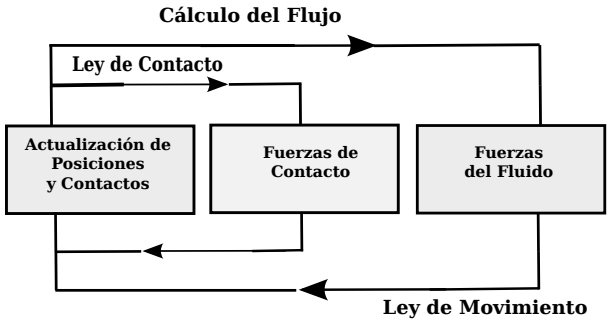

Figura 1. Esquema de actualización de información del modelo y cálculo de fuerzas.

La Figura 1 muestra un esquema simplificado del algoritmo de resolución numérica. Dada una posición inicial, se ejecutan las leyes de contacto y se obtiene una actualización de la posición, fuerza y momentum de las esferas debido al contacto y a las fuerzas globales. Cuando se realiza el acople con el flujo se añade otro componente al ciclo, en el cual se calcula las condiciones del flujo conforme a la geometría y posición de las partículas. Existe un parámetro adicional que maneja la periodicidad con la que se vinculan los ciclos, es decir, se puede calcular los efectos del flujo y la posición de las partículas en cada iteración o designar un valor que indica cada cuantas iteraciones se actualizan las fuerzas ejercidas por el fluido y su geometría, mientras que las fuerzas de contacto se actualizan en cada iteración, permitiendo así regular los costos computacionales conforme al problema en estudio.

2. MODELOS Y VALIDACIÓN

Muchos estudios experimentales han obtenido relaciones empíricas entre la conductividad hidráulica y el tamaño de los granos y concluyen que su valor es proporcional a un diámetro representativo d_i elevado a un exponente b,

$$K = Cd_i^b \tag{6}$$

Los valores b varían entre $1{,}11$ y $2{,}05$ (Devlin, 2015; Shepherd, 1989). En lo que sigue utilizaremos diferentes expresiones de este tipo para validar el resultado de las simulaciones numéricas.

Características de los Modelos

Se modela un volumen de base cuadrada con una superficie que contiene alrededor de 25 esferas y una altura equivalente al diámetro de 12 esferas, por lo que el número de esferas en cada simulación es del orden de 300. Para simulaciones de distintos diámetros se utilizan los parámetros resumidos en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros usados en las simulaciones de validación.

Condiciones de los modelos			
Diferencia de presión	Δp	1/8	[Pa]
Viscosidad fluido	μ	0.001	[Pa · s]
Fuerza de gravedad	g	9.81	[m · s^{-2}]
Densidad esferas	ρ_s	2600	[Kg · m^{-}3]
Densidad fluido	ρ_h	1000	[Kg · m^{-}3]
Ancho Basal	D	10 · Rmean	[m]
Altura Inicial paquete de esferas	H	24· Rmean	[m]
Modulo de Young	E	1e6	[Pa]
Coeficiente de Poisson	ν	0.5	[-]
Ángulo de Fricción	ϕ	3	[°]

A través del volumen pasa un flujo producido por una diferencia de presión, sumado a la fuerza de gravedad normal a la base del modelo. En la cara inferior se impone un valor de carga hidráulica

mayor que en la cara superior, por lo que el gradiente hidráulico (i) produce un flujo ascendente. Entonces conocido el caudal y la altura del volumen, aplicamos la ecuación de Darcy (7) para calcular conductividad hidráulica del medio.

$$K = \frac{Q}{iA} \tag{7}$$

Se realizaron un total de once simulaciones considerando esferas de un diámetro constante para distintos radios, R=[0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0, 2.5, 3.0] [m $\cdot$ 10^{-3}]. Para cada simulación las esferas se disponen inicialmente en un volumen mayor al de equilibrio. El dominio mantiene sus paredes laterales e inferiores inmóviles, la superior desciende hasta hacer contacto con las partículas que han caído sólo por acción de la gravedad. Una vez alcanzada esta posición se agrega el fluido con una diferencia de presión, la que produce el avance del flujo, por lo que es necesario definir un criterio para determinar el estado en que no existen cambios importantes en las propiedades del medio. La modelación se detiene cuando el valor de la conductividad hidráulica se estabiliza y existe una diferencia inferior a un límite entre el caudal de entrada y el de salida, lo que se verifica mediante la siguiente expresión,

$$\frac{|Q_{in} - Q_{out}| \cdot 100}{Q_{in}} < 0{,}1 \tag{8}$$

Para verificar que los valores de K obtenidos a partir de las simulaciones se ajustan a una ley de potencia con respecto al diámetro, se grafican los resultados en escala log-log, de tal forma de satisfacer:

$$K = Cd^n \qquad \log_{10}(K) = n\log_{10}(d) + \log_{10}(C) \qquad y = mx + n \tag{9}$$

El gráfico resultante se muestra en la Figura 2. Se observa una relación casi cuadrática del comportamiento de los valores de la conductividad hidráulica en función del diámetro de las partícula.

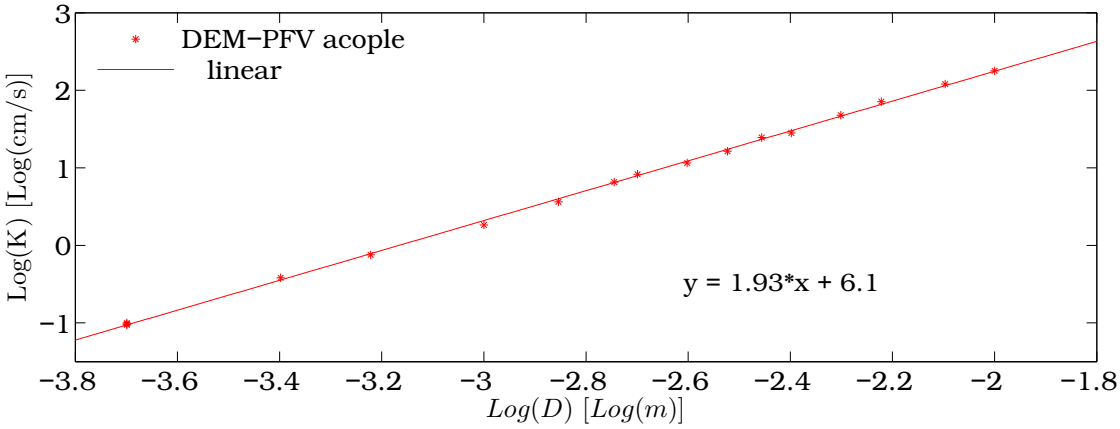

Figura 2. Ajuste de los valores del logaritmo de la conductividad hidráulica calculada a partir de las simulaciones y el logaritmo del diámetro de las esferas. Cada punto corresponde a una simulación.

Comparación con Fórmulas Empíricas

La Figura 3 muestra una comparación de valores de conductividad hidráulica obtenidos de la modelación, la curva obtenida a partir del ajuste a ley de potencia (10) con valores de conductividad hidráulica medidos experimentalmente para microesferas de vidrio de 1 [mm] y 2 [mm] de diámetro. Como referencia también se muestran valores calculados a partir de distintas fórmulas empíricas resumidas en las Tablas 2 y 3.

$$K = 1{,}28 \cdot 10^6 d^{1{,}93} \tag{10}$$

El primer set de ecuaciones es de la forma $K = \frac{\rho g}{\mu} N \varphi(n) d_e^2$. En donde el término N corresponde a una constante, $\varphi_{(n)}$ depende de la porosidad y d_e [cm], está asociado a un tamaño característico de los granos. Mientras que el segundo set de ecuaciones es de la forma $K = a \cdot d^b$, en donde d se expresa en pies y K en galón por día/$pies^2$.

Tabla 2. Ecuaciones del tipo $K = \frac{\rho g}{\mu} N \varphi(n) d_e^2$, para el cálculo de la conductividad hidráulica (Devlin, 2015; Shepherd, 1989).

Ecuación	N	$\varphi(n)$	d_e
Hazen	$6 \cdot 10^{-4}$	$[1 + 10 \cdot (n - 0{,}26)]$	d_{10}
Beyer	$5{,}2 \cdot 10^{-4} \log \frac{500}{U}$	1	d_{10}
Terzaghi (grano liso)	$10{,}7 \cdot 10^{-3}$	$\frac{(n-0{,}13)^2}{(1-n)^{2/3}}$	d_{10}
Slichter	$1 \cdot 10^{-2}$	$n^{3{,}287}$	d_{10}
Bialas	$4{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{0{,}3}$	1	d_{20}

Tabla 3. Ecuaciones del tipo $K = a \cdot d^b$, para el cálculo de la conductividad hidráulica (Devlin, 2015; Shepherd, 1989).

Ecuación	a	b	d_e
Russel, esferas de vidrio	300000	2	d_{10}
Schriever, esferas de vidrio	208818	1.94	d_{10}
Harleman, tamaño uniforme	128996	2.05	d_{10}

Las curvas de la Figura 3 se agrupan en tres sectores. El grupo superior incluye los resultados de las simulaciones, el ajuste a ley de potencia a partir de las simulaciones y la fórmula empírica para las esferas de vidrio propuesta por Rusell. En la zona intermedia se ubican las curvas dadas a partir de la fórmula de Schriever para micro esferas de vidrio, las ecuaciones de Hazen y Beyer para arenas y los resultados experimentales para microesferas de vidrio. Finalmente, en el grupo inferior aun más alejado de los resultados de la modelación se encuentran las curvas correspondientes a las ecuaciones de Bialas, Harleman para tamaños uniformes, Terzaghi para grano liso y Slichter. El orden resultante no es producto del azar y se debe a que las fórmulas empíricas fueron ajustadas para

condiciones específicas de uniformidad, tipo de arena, presión de confinamiento, entre otras, las cuales son distintas para cada set de experimentos. Además, resultados de simulaciones numéricas preliminares demostraron que otros parámetros pueden afectar los resultados, tales como el ángulo de fricción y el módulo de Young.

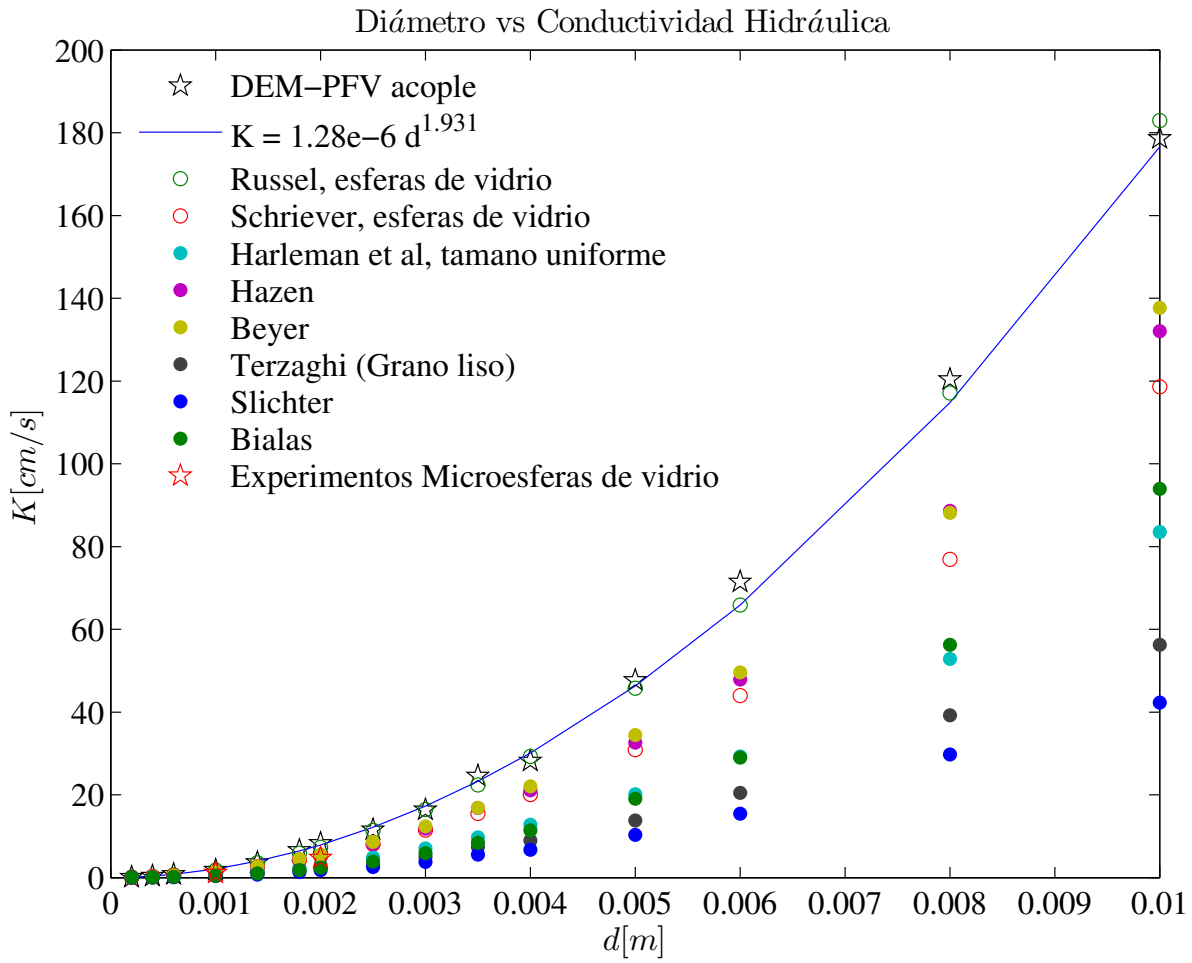

Figura 3. Comparación de conductividades hidráulicas calculadas a partir de simulaciones mediante el acople DEM-PFV, ensayos de laboratorio con micro-esferas de vidrio y fórmulas empíricas resumidas en Tablas 2 y 3.

3. RESULTADOS DE SIMULACIONES CON TAMAÑO DE GRANO VARIADO

Se define el radio mínimo como $R_{min} = R_{mean} - Sd \cdot R_{mean}$, el radio máximo $R_{max} = R_{mean} + Sd \cdot R_{mean}$. Combinando las definiciones se obtiene

$$Sd = \frac{(R_{max} - R_{min})}{(R_{max} + R_{min})} \tag{11}$$

Los radios de los granos para estos modelos se encuentran uniformemente distribuidos en el intervalo $[R_{min}, R_{max}]$, determinado por el valor de R_{mean} y $Sd = [0{,}0, 0{,}17, 0{,}34, 0{,}51, 0{,}68]$. Con esto

buscamos verificar la influencia de la polidispersión y el confinamiento en el valor de la conductividad hidráulica.

En los medios granulares la polidispersión es una propiedad análoga a la polidispersión en polímeros, pero en lugar de medir la diferencia de masa con respecto a la masa promedio, lo hace con respecto al diámetro promedio, tal como se observa en (12) la polidispersión se encuentra directamente relacionada con el parámetro Sd.

$$PDI = \frac{\sum_{i=1}^{n} (D_i - s * R_{meaan})^2}{(n)} \quad (PolyDispersion\ \ Index) \tag{12}$$

Al tener granulometrías más extendidas las dimensiones de los modelos deben aumentar, para que sea posible construir el intervalo de diámetros completo. Se impone un ancho basal de 45 veces el radio promedio y una altura igual a 80 veces R_{mean}. Con estas dimensiones, los volúmenes simulados poseen en promedio del orden de 26.000 partículas, lo que produce tiempos de cómputo mayores.

Las condiciones iniciales de estos modelos son distintas a los presentados en la sección anterior, por ejemplo se utilizó una mayor diferencia de presión, para tener un mayor caudal resultante y un ángulo de fricción distinto, acorde a los materiales granulares que se desean simular. Los parámetros de estas simulaciones se resumen en la Tabla 4. Además, en estas simulaciones se aplicó una presión de confinamiento paralela a la aceleración de gravedad.

Tabla 4. Parámetros de las simulaciones con granulometrías extendidas.

Diferencia de presión	Δp	10	[Pa]
Viscosidad	μ	0.001	[Pa · s]
Fuerza de gravedad	g	9.81	[m · s^{-2}]
Densidad esferas	ρ_s	2600	[Kg · m^{-}3]
Densidad fluido	ρ_h	1000	[Kg · m^{-}3]
Ancho basal	D	45 · Rmean	[m]
Altura inicial paquete de esferas	H	80 · Rmean	[m]
Módulo de Young	E	1e6	[Pa]
Coeficiente de Poisson	ν	0.5	[-]
Ángulo de Fricción	ϕ	30	[°]

La Figura 4 muestra los valores de conductividad hidráulica obtenidos en función del parámetro Sd, para una presión de confinamiento de 2,7 [kPa] y distintos diámetro medio. En acuerdo con la teoría, el valor de la conductividad hidráulica depende de forma directa del diámetro medio.

La Figura 5 compara los resultados de las simulaciones sometidas a una presión de confinamiento de 2,7 [kPa], con las fórmulas empíricas de Russell para esferas de vidrio, Hazen, Beyer, Terzaghi y Slichter en función de Sd. Los valores de conductividad hidráulica calculados a partir de las simulaciones son superiores a los de las expresiones empíricas. Esto se debe a que la presión de confinamiento es baja y el medio se comporta de forma similar a una arena sin compactar que cae

por gravedad, sin ser confinada como las analizadas en la sección anterior. Sin embargo, cuando la presión de confinamiento aumenta, los valores de conductividad decrecen como se muestra en la Figura 6.

Por otro lado, la Figura 7 muestra el comportamiento de la porosidad para distintos valores de Sd cuando se aplican distintas presiones de confinamiento. El aumento de la presión de confinamiento produce una disminución en los valores de la porosidad. Aumentos en el confinamiento de tres órdenes de magnitud producen una disminución de alrededor de un 17 % en la porosidad y de aproximadamente 60 % en la conductividad hidráulica.

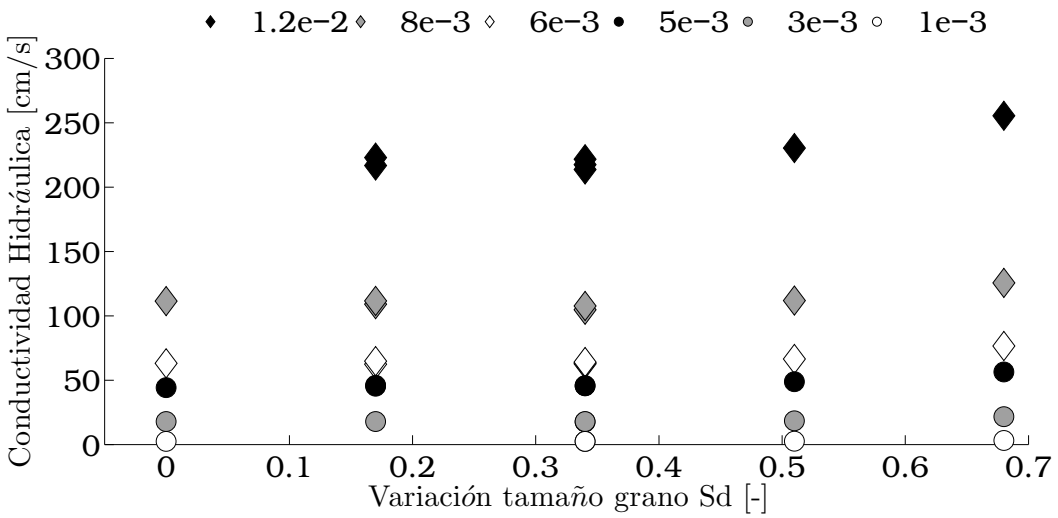

Figura 4. Conductividad hidráulica vs Sd, para distintos tamaños de diámetro promedio. Los valores de los diámetros se muestran en la parte superior de la figura en [m].

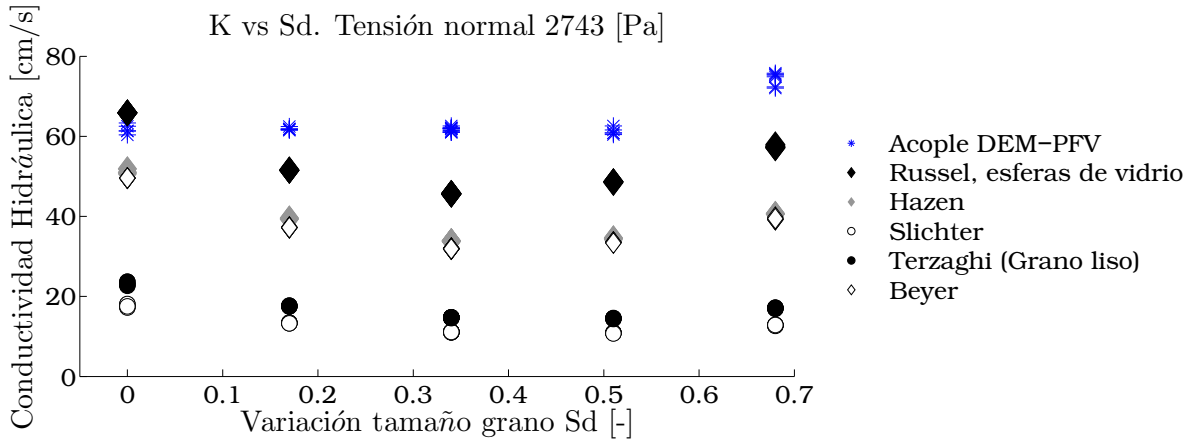

Figura 5. Conductividad hidráulica entregada por el modelo y obtenida con las fórmulas presentadas versus Sd para un confinamiento de 2,7 [kPa]

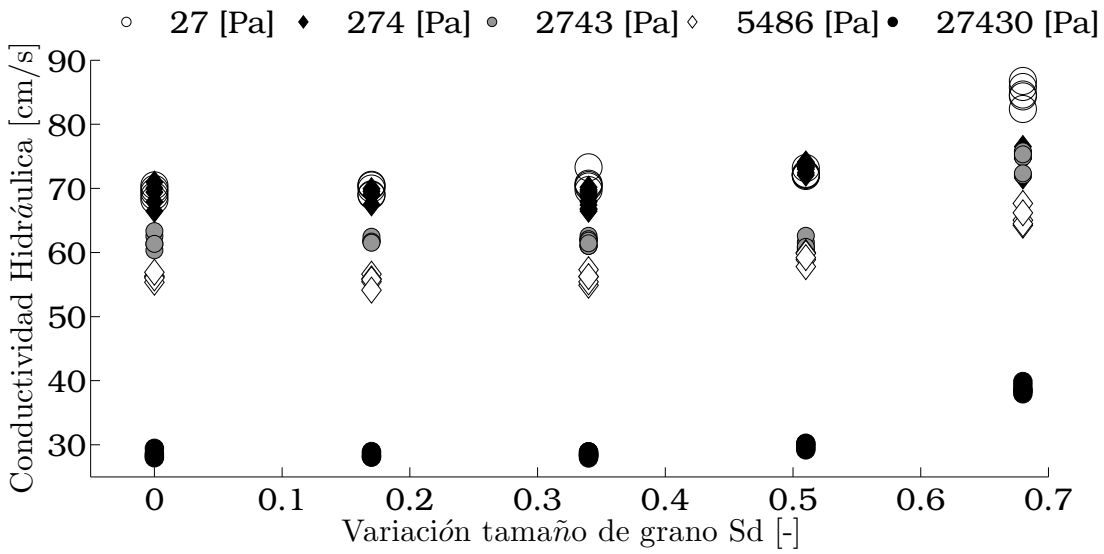

Figura 6. Conductividad Hidráulica vs Sd, para distintos valores de la presión de confinamiento.

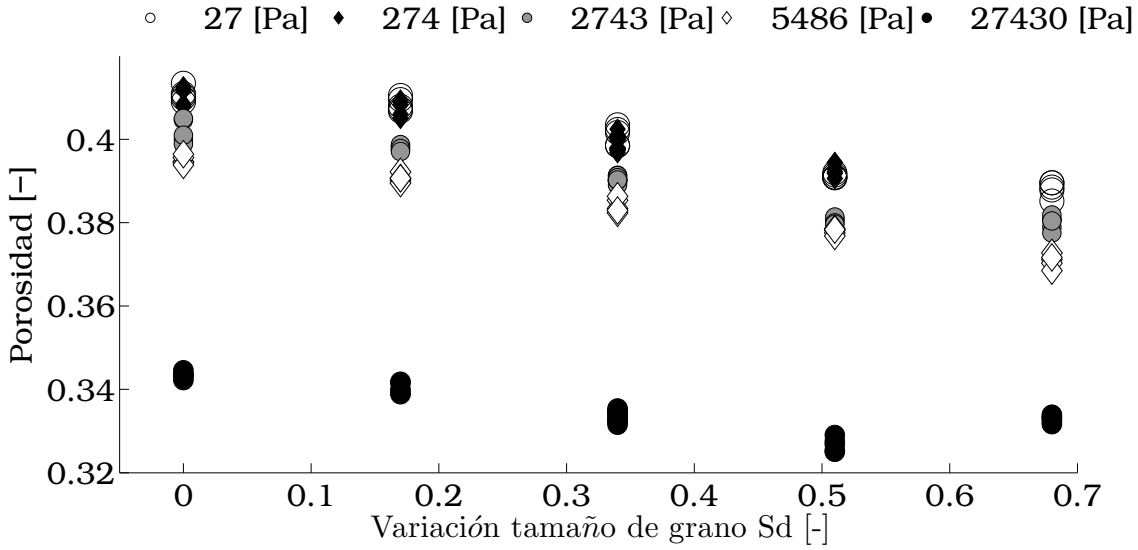

Figura 7. Porosidad vs Sd, para distintos valores de la presión de confinamiento, tal como lo muestra la leyenda en la parte superior.

La comparación de las Figuras 6 y 7 muestra que K y la porosidad varían de forma distinta con el grado de polidispersión del medio representado a través de Sd. Mientras la porosidad disminuye debido a que partículas de menor tamaño pueden ocupar el espacio entre partículas más grandes, lo cual es consistente a lo que se observa en suelos reales, la conductividad hidráulica aumenta con Sd. Esto se explica al analizar la dependencia del diámetro d_{20}, el cual representa la parte fina de cada medio, con el valor de Sd como se muestra en la Figura 8. Debido a que la cantidad de esferas es del mismo orden de magnitud para las distintas simulaciones, en un principio el aumento

de Sd produce que el valor de d_{20} sea menor a R_{mean} hasta un valor mínimo, luego de esto las esferas grandes utilizan tanto volumen que para obtener el 20 % de la masa es necesario incluir esferas de mayor diámetro, por lo tanto d_{20} vuelve a crecer superando incluso R_{mean}. Se observa un comportamiento cuadrático del diámetro d_{20} en función de Sd, que cambia solo por la diferencia en la construcción geométrica de los paquetes de suelo. Dado que el flujo está restringido por los sedimentos de menor diámetro, es esperable que la conductividad hidráulica se comporte de forma similar a d_{20} y sea mayor para los valores máximos de Sd simulados, como se muestra en la Figura 5. Esto es acorde a las fórmulas empíricas que, en general, utilizan el diámetro d_{10} para representar la parte fina del medio.

4. CONCLUSIONES

Demostramos que mediante la utilización de YADE es posible simular el comportamiento de suelos sintéticos representados mediante esferas de tamaño uniforme y no-uniforme, por los cuales atraviesa un flujo producto de un gradiente hidráulico. Utilizamos los resultados de las simulaciones para calcular valores de conductividad hidráulica, los cuales muestran un comportamiento similar a experimentos de laboratorio, y a fórmulas empíricas documentadas en la literatura que relacionan el valor de K con diámetros representativos del medio y/o la porosidad.

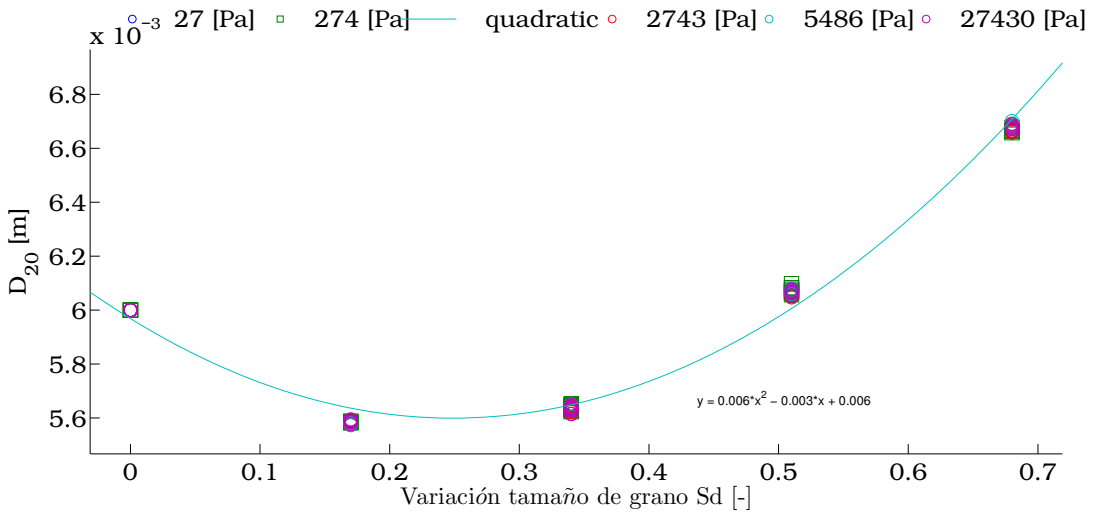

Figura 8. d20 vs Sd, para distintos valores de la presión de confinamiento en [KPa].

El modelo permite obtener valores correctos de la conductividad hidráulica si los parámetros de entrada como el confinamiento de la muestra, el modulo de Young y ángulo de fricción se definen de forma consistente a las condiciones a las que esta sometido el suelo que se desea replicar. Además, observamos cierta similitud entre el comportamiento de la porosidad y conductividad hidráulica con el rango de la distribución de tamaño de los sedimentos. Otro aspecto interesante a considerar es que la porosidad varía en función del confinamiento y de la distribución granulométrica, pero depende principalmente del primer parámetro en el rango de presiones de confinamiento analizadas.

Los resultados presentados en este trabajo, indican que a futuro sería interesante extender el estudio a suelos con distribuciones granulométrica más extendidas, además de considerar rangos de confinamiento superiores.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a los desarrolladores de YADE por poner a disposición el software de forma gratuita y a la comunidad de usuarios por la buena disposición para responder dudas e identificar errores en los códigos. También agradecen al profesor Ricardo Moffat por el sustento teórico entregado en la discusión y a Hugo Ulloa por las críticas constructivas. Además, reconocen el aporte de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile para la adquisición de los equipos computacionales utilizados en este trabajo.

REFERENCIAS

Boon, C., G. Houlsby, and S. Utili (2013). A new contact detection algorithm for three-dimensional non-spherical particles. *Powder Technology 248, 94–102.*

Catalano, E., B. Chareyre, and E. Barthélémy (2013). Dem-pfv analysis of solid-fluid transition in granular sediments under the action of waves. In Powders and Grains 2013: Proceedings of the 7th International Conference on Micromechanics of Granular Media*, Volume 1542, pp. 1063–1066. AIP Publishing.*

Catalano, E., B. Chareyre, and E. Barthélemy (2014). Pore-scale modeling of fluid-particles interaction and emerging poromechanical effects. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics@*(1), 51–71.*

Catalano, E., B. Chareyre, A. Cortis, and E. Barthélémy (2011). A pore-scale hydro-mechanical coupled model for geomaterials. In Particles 2011 II International Conference on Particle-Based Methods.

Chareyre, B., A. Cortis, E. Catalano, and E. Barthélemy (2012). Pore-scale modeling of viscous flow and induced forces in dense sphere packings. Transport in porous media@*(2), 595–615.*

Chen, F., E. C. Drumm, and G. Guiochon (2011). Coupled discrete element and finite volume solution of two classical soil mechanics problems. Computers and Geotechnics@*(5), 638–647.*

Devlin, J. (2015). Hydrogeosievexl: an excel-based tool to estimate hydraulic conductivity from grain-size analysis. Hydrogeology Journal@*(4), 837–844.*

Galindo-Torres, S., A. Scheuermann, H. Mühlhaus, and D. Williams (2013). A micro-mechanical approach for the study of contact erosion. Acta Geotechnica@*(3), 357–368.*

Han, K., Y. Feng, and D. Owen (2007). Coupled lattice boltzmann and discrete element modelling of fluid–particle interaction problems. Computers & structures@*(11), 1080–1088.*

Lominé, F., L. Scholtès, L. Sibille, and P. Poullain (2013). Modeling of fluid–solid interaction in granular media with coupled lattice boltzmann/discrete element methods: application to piping erosion. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics@*(6), 577–596.*

Plassiard, J.-P., N. Belheine, and F.-V. Donzé (2009). A spherical discrete element model: calibration procedure and incremental response. Granular Matter@*(5), 293–306.*

Radjai, F., M. Jean, J.-J. Moreau, and S. Roux (1996). Force distributions in dense two-dimensional granular systems. Physical review letters@*(2), 274.*

Shepherd, R. G. (1989). Correlations of permeability and grain size. Groundwater@*(5), 633–638.*

Šmilauer, V. (2006). The splendors and miseries of yade design. Annual Report of Discrete Element Group for Hazard Mitigation.

Šmilauer, V. and B. Chareyre (2010). Yade dem formulation. Yade Documentation.

Succi, S. (2001). The lattice Boltzmann equation: for fluid dynamics and beyond. *Oxford university press.*

Thornton, C. (1997). Force transmission in granular media. Kona Powder and Particle Journal@*(0), 81–90.*

To, H., S. Galindo-Torres, and A. Scheuermann. Sequential sphere packing by trilateration equations.

Voivret, C., F. Radjai, J.-Y. Delenne, and M. S. El Youssoufi (2009). Multiscale force networks in highly polydisperse granular media. Physical review letters@*(17), 178001.*