

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA
XXII CONGRESO CHILENO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

**ECUACIONES CONTINUAS DE DOS FASES PARA LA MODELACIÓN DEL
TRANSPORTE INCIPIENTE DE SEDIMENTOS**

CAROLINA MERUANE¹
ALDO TAMBURRINO²
ALBERTO DE LA FUENTE³
YARKO NIÑO⁴

RESUMEN

El transporte incipiente de sólidos en un lecho de material granular es un problema fundamental de la hidráulica fluvial y ambiental, que permite determinar por ejemplo las condiciones bajo las cuales se produce socavación en el cauce de un río, o las condiciones en las que se podrían arrastrar partículas en un lecho contaminado. En este trabajo se presenta una aplicación de las ecuaciones continuas de dos fases propuestas por Meruane et al. (2010), para estudiar el arrastre incipiente de sedimentos en un lecho de material granular homogéneo. Los resultados de las simulaciones se comparan con la curva de Shields, mostrando que existe un buen ajuste para los Reynolds bajos; sin embargo, a medida que el flujo se hace más turbulento, los resultados numéricos se separan de estacurva. Se infiere que las discrepancias se podrían deber al cierre utilizado para representar la fuerza de arrastre, dado que este cierre tiene directa relación con la producción de la energía turbulenta en las ecuaciones del modelo $k-\varepsilon$. Como trabajo futuro se propone desarrollar un análisis de sensibilidad para distintas parametrizaciones de la fuerza de arrastre. También, se propone desarrollar un modelo 3D para estudiar la socavación en pilas.

¹Directora, Modelación Ambiental SpA - cmeruane@modelacion.cl

²Profesor Asociado, Depto. de Ingeniería Civil, Universidad de Chile - atamburr@ing.uchile.cl

³Profesor Asociado, Depto. de Ingeniería Civil, Universidad de Chile - aldelafu@ing.uchile.cl

⁴Profesor Titular, Depto. de Ingeniería Civil, Universidad de Chile - ynino@ing.uchile.cl

1. INTRODUCCIÓN

El transporte incipiente de sólidos en un lecho de material granular es un problema fundamental de la hidráulica fluvial que permite estudiar por ejemplo, la socavación en el cauce de un río producto de cambios en el régimen de escurrimiento, o la socavación que ocurre alrededor de las pilas de un puente. También, el arrastre incipiente reviste mucha importancia en la hidráulica ambiental, para determinar por ejemplo las condiciones bajo las cuales se podrían arrastrar las partículas de un lecho contaminado (Niño and García, 2003).

Si bien bajo ciertas configuraciones particulares, se conoce la dinámica asociada al umbral sobre el cual ocurre el arrastre del material del lecho de un río (Dey and Papanicolaou, 2008.), no existe aún una propuesta basada en ecuaciones continuas equivalentes a las ecuaciones de Navier-Stokes, que permita modelar el movimiento incipiente de sedimentos en un lecho de material granular bajo todos los posibles regímenes de escurrimiento.

El mayor desafío para describir adecuadamente la dinámica del arrastre de sólidos está en desarrollar un modelo que considere las diferentes componentes de la mezcla fluido-partículas. Bajo este escenario, parece apropiado utilizar la teoría de mezcla (Truesdell, 1984). Esta teoría es en esencia una aproximación de homogeneización, en donde las componentes de la mezcla son tratadas como un continuo con movimiento propio, que comparten el espacio y que pueden difundirse en el medio. En este caso, las ecuaciones de conservación de masa y momentum son aplicadas a cada componente y la interacción entre componentes se representa a través de leyes constitutivas. Es así como la mayor dificultad en resolver este sistema de ecuaciones está en escoger las relaciones constitutivas que representen adecuadamente las fuerzas de interacción recíproca entre componentes de la mezcla.

En este trabajo se utilizan las ecuaciones continuas de dos fases propuestas por Meruane et al. (2010) para la representación físico-matemática del arrastre de sedimentos en un lecho de material granular homogéneo. El sistema de ecuaciones diferenciales propuesto es resuelto con un esquema implícito de volúmenes finitos, que utiliza el método de corrección de la presión propuesto por Patankar (1980) sobre una grilla alternada. Finalmente, los resultados del modelo conceptual son validados a través de la comparación con la curva de Shields.

2. MODELO DE DOS FASES

En este trabajo se utilizan las ecuaciones continuas de dos fases propuestas por Meruane et al. (2010). Para la deducción de las ecuaciones los autores parten la teoría de mezcla de (Truesdell, 1984), en donde se considera una mezcla compuesta por un fluido y un material granular homogéneo, denotados como especies de la mezcla. Para identificarlas se utiliza un índice f para el fluido y s para el material granular. Cada especie de la mezcla es tratada como un continuo con movimiento propio, que comparte el espacio y puede difundirse en el medio.

Cada especie de la mezcla tiene una densidad material γ_n , concentración volumétrica c_n , y se mueve con velocidad u_n ($n=s,f$). Se define la densidad parcial de cada constituyente como, $\rho_n=c_n\gamma_n$.

Cada especie debe satisfacer la ecuación de conservación de masa y momentum, dadas por (Truesdell, 1984):

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\partial (u_{ni} \rho_n)}{\partial x_i} = 0, \quad n = s, f \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_n u_{ni}}{\partial t} + \nabla (\rho_n u_{ni} u_{nj}) = \rho_n g_i - \frac{\partial p_n}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{nij}}{\partial x_j} + \hat{m}_{ni}; \quad n = f, s \quad (2)$$

donde u_{ni} es la componente i de la velocidad, g_i es la gravedad en la dirección i , p_n es la presión, τ_{nij} es el esfuerzo tangencial en la dirección i actuando sobre la cara del volumen de control cuya normal es j , y \hat{m}_{ni} es la fuerza de interacción recíproca entre las especies en la dirección i , que es igual en magnitud y de sentido contrario entre ellas.

Relación constitutiva para la fuerza de interacción entre fluidos y partículas

La ley constitutiva para la fuerza de interacción recíproca entre el fluido y las partículas es (Meruane et al., 2010):

$$\hat{m}_{si} = -\hat{m}_{fi} = \underbrace{-c_s \frac{\partial p_f}{\partial x_i}}_{\text{fuerza de presión}} + \underbrace{K(u_{fi} - u_{si})}_{\text{arrastré viscoso}}. \quad (3)$$

La función de arrastre K está bien determinada y existen en la literatura muchas relaciones para ella, principalmente porque estas relaciones se derivan de una generalización de la fuerza de arrastre sobre una partícula sólida moviéndose sobre un medio fluido (ver DiFelice (1995) y sus referencias).

En este estudio se adoptará la función propuesta por Foscolo et al. (1983), definida como:

$$K = \left(\frac{17.3}{Re} + 0.336 \right) \frac{\gamma_s |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_s|}{d_s} c_s c_f^{-1.8} \quad (4)$$

donde d_s es el diámetro de las partículas sólidas, y Re es número de Reynolds de las partículas, definido como:

$$Re = \frac{\gamma_f d_s |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_s|}{\mu_f} \quad (5)$$

donde μ_f es la viscosidad dinámica del fluido.

Tensor de esfuerzos del fluido

Considerando que las variables de estado de las ecuaciones corresponden a cantidades medias obtenidas por un promedio de Reynolds de las ecuaciones, y utilizando el concepto viscosidad de remolino propuesto por Boussinesq (1877) como un modelo para las fluctuaciones turbulentas, el tensor de esfuerzos del fluido se puede escribir como (e.g., Rodi, 1984):

$$T_{fij} = -p_f \delta_{ij} + (\mu_f + \mu_T) \left(\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{fj}}{\partial x_i} \right). \quad (6)$$

Siguiendo la propuesta de Meruane et al. (2010) para la representación de la viscosidad turbulenta, μ_T , utilizamos un modelo $k - \varepsilon$ que incorpora el trabajo hecho por las fuerza de arrastre como término de producción:

$$\mu_T = \rho_f c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho_f k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_f u_{fi} k)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \mu_T \left(\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{fj}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} + K |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_s|^2 - \rho_f \varepsilon, \quad (8)$$

$$\frac{\partial(\rho_f \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_f u_{fi} \varepsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \left\{ \mu_T \left(\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{fj}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} + K |\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_s|^2 \right\} - c_{2\varepsilon} \rho_f \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (9)$$

donde k es la energía cinética del movimiento turbulento del fluido, y ε es la tasa de disipación de k . Los valores de las constantes se toman iguales a los valores utilizados para un fluido puro: $c_\mu = 0.09$, $c_{1\varepsilon} = 1.44$, $c_{2\varepsilon} = 1.92$, $\sigma_k = 1.00$, and $\sigma_\varepsilon = 1.30$ (Rodi, 1984).

Tensor de esfuerzos de las partículas sólidas

El tensor de esfuerzos de las partículas sólidas representa las fuerzas transmitidas por los contactos directos entre las partículas sólidas. Estas fuerzas son bien conocidas para dos regímenes opuestos. Por un lado, está el régimen de flujo colisional, en donde las partículas interactúan por colisiones binarias (Campbell, 1990; Goldhirsch, 2003), y por otro lado, está el régimen cuasi-estático denso, en donde el inicio del flujo de partículas se representa por la condición de Mohr-Coulomb (Hutter et al., 2005). Con el fin de tener en cuenta estos tres regímenes, Meruane et. al (2010) siguió el supuesto de Savage (1983) y Johnson & Jackson (1987), quienes propusieron que el tensor de esfuerzos de las partículas sólidas está representado por la suma lineal entre una parte cuasi-estática, T_{sij}^s , y una parte dependiente de la colisión entre partículas, T_{sij}^c , tal que:

$$T_{sij} = T_{sij}^s + T_{sij}^c. \quad (10)$$

La parte cuasi-estática, T_{sij}^s , puede ser descompuesta como:

$$T_{sij}^s = -p_s \delta_{ij} + \tau_{sij}, \quad (11)$$

donde p_s es la presión de sólidos (que se asume isotrópica) y τ_{sij} es el tensor de esfuerzos de corte.

La presión de los sólidos representa las fuerzas que se transmiten entre partículas en los puntos de contacto directo. En consecuencia, si no hay contactos entre partículas, la presión de sólidos desaparece. Para representar este hecho, Meruane et al. (2010) propone un modelo para la presión de sólidos dado por:

$$p_s(c_s) = \begin{cases} p_s & c_s \geq c_o \\ 0 & c_s < c_o \end{cases}, \quad (12)$$

donde c_o es la concentración de empaquetamiento de las partículas sólidas.

Para representar el esfuerzo de corte τ_{sij} , se utiliza la condición de Mohr-Coulomb, en donde los esfuerzos de compresión y de corte actuando en un plano particular están relacionados por (e.g. Goodman and Cowin, 1971):

$$|\tau_{sij}| = (1 - \delta_{ij}) |p_s| \tan \varphi, \quad (13)$$

donde φ es el ángulo de fricción interna.

Para la representación de la parte colisional, T_{sij}^c , usamos la teoría cinética propuesta por Jenkins and Savage (1983):

$$T_{sij}^c = -p_c \delta_{ij} + 2\mu_c \dot{\gamma}_{sij}, \quad (14)$$

donde $\dot{\gamma}_{sij} = (\partial_{xj} u_{si} + \partial_{xi} u_{sj})/2$ es el tensor de corte, $p_c = \gamma_s f_1(c_s, e) T$ es la presión colisional, $\mu_c = \gamma_s d_s f_2(c_s, e) \sqrt{T}$ es la viscosidad colisional, con $T = \langle u_i^2 \rangle / 3$ la temperatura granular, donde u es la desviación instantánea de la velocidad respecto a la media, y $\langle \rangle$ representa un promedio. En este modelo, las parametrizaciones f_1 y f_2 son iguales a:

$$f_1 = 2c_s^2 (1+e) g_o(c_s), \quad f_2 = \frac{2}{5\sqrt{\pi}} c_s^2 (2+\alpha) (1+e) g_o(c_s), \quad (15)$$

donde e es el coeficiente de restitución, α es un parámetro igual a la unidad (Lun et al., 1984), y $g_o(c_s)$ es una función de distribución dada por (Lun et al., 1984):

$$g_o(c_s) = \left[1 - \left(\frac{c_s}{c_M} \right)^{1/3} \right]^{-1}, \quad (16)$$

donde c_M es la máxima concentración de empaquetamiento, igual a 0.64 para esferas (Lun et al. 1984). Finalmente, la temperatura granular se representa como $T = (d_s \dot{\gamma}_s)^2$.

Sistema final de ecuaciones

De acuerdo a los supuestos descritos más arriba, las ecuaciones finales de Meruane et al. (2010) quedan dadas por:

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\partial (u_{ni} \rho_n)}{\partial x_i} = 0, \quad n = s, f \quad (17)$$

$$\frac{\partial \rho_f u_{fi}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_f u_{fi} u_{fj})}{\partial x_j} = \rho_f g_i - c_f \frac{\partial p_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu_f + \mu_T) \left(\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{fj}}{\partial x_i} \right) \right] - K(u_{fi} - u_{si}), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_s u_{si}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_s u_{si} u_{sj})}{\partial x_j} &= \rho_s g_i - \frac{\partial p_s}{\partial x_i} + s_{ij} \frac{\partial p_s}{\partial x_j} \tan \varphi - \frac{\partial p_c}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_c \left(\frac{\partial u_{si}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{sj}}{\partial x_i} \right) \right] \\ &- c_s \frac{\partial p_f}{\partial x_i} + K(u_{fi} - u_{si}), \end{aligned} \quad (19)$$

donde $s_{ij} \equiv \text{sgn}(\partial u_{si} / \partial x_j)$. Este sistema de ecuaciones se cierra con la restricción de saturación: $c_s + c_f = 1$.

3. METODOLOGÍA

Solución numérica

Para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales propuesto, se utilizó el método numérico SIMPLE sobre una grilla alternada de volúmenes finitos (Patankar, 1980), que permite resolver simultáneamente, de forma iterativa, el campo de velocidades y presión para cada especie de la mezcla. Se adoptó un esquema implícito para la solución temporal de las ecuaciones discretizadas, y los términos convectivos en la ecuación de movimiento se resolvieron utilizando un esquema híbrido.

El algoritmo de solución numérica para un paso de tiempo es el siguiente:

1. Dado un campo de concentración de sólidos inicial, suponer valores arbitrarios de presión y velocidades para cada especie.
2. Resolver la ecuación de momentum para el fluido.
3. Resolver la ecuación de corrección de la presión para el fluido. Corregir la presión y velocidades con bajo relajación.
4. Resolver la ecuación de momentum para las partículas sólidas.

5. Resolver la ecuación de corrección de la presión para las partículas sólidas. Corregir la presión y velocidades con bajo relajación.
6. Resolver la ecuación de conservación de masa de las partículas sólidas. Se obtiene un nuevo campo de concentración para cada especie.
7. Repetir el procedimiento desde el punto 2 con los nuevos campos de presión, velocidades, y concentración para cada especie, hasta que se cumpla conservación de masa y momentum lineal para las partículas sólidas y el fluido. Para el paso de tiempo siguiente, se parte en el punto 1 con los campos obtenidos en el ciclo anterior.

Diseño del experimento número

El esquema del experimento numérico se presenta en la **Figura 1**. El experimento numérico consiste en un canal rectangular de 2 m de largo y 0.4 m de alto, con un lecho de granos esféricos de 5 cm de espesor. Como condición de borde aguas arriba, se impone un perfil de velocidad uniforme y constante para el fluido, y se analizan los perfiles de velocidades y la concentración de partículas en el área en donde se desarrolla la capa límite como solución a las condiciones del problema.

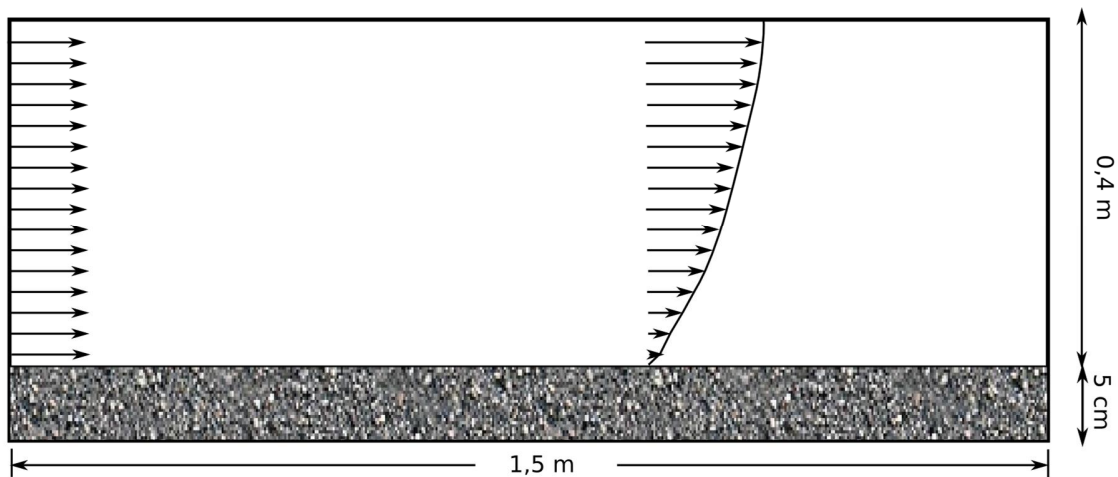


Figura 1. Esquema del experimento numérico.

En la **Tabla 1** se resumen las condiciones de los experimentos numéricos. Para cada tamaño se partículas de diámetro entre 0.05 y 2.00 mm, se varió la velocidad del fluido en un rango de 0.1 a 0.5 m/s. Se asume una densidad de las partículas sólidas de 2500 kg/m^3 , una densidad y viscosidad del fluido de 1000 kg/m^3 y $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, respectivamente.

Tabla 1. Set de experimentos numéricos.

Set	d_s [mm]	u_f [m/s]
S1	0.05	[0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5]
S2	0.10	[0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5]
S3	0.15	[0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5]
S4	0.20	[0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5]
S5	0.25	[0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5]

Set	d_s [mm]	u_f [m/s]
S6	0.30	[0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5]
S7	0.40	[0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5]
S8	0.50	[0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5]
S9	0.70	[0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5]
S10	1.00	[0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5]
S11	1.25	[0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5]
S12	1.50	[0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5]
S13	2.00	[0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5]

Para cada set de experimento se calculó el esfuerzo de corte sobre el fondo, τ_* , la velocidad de corte, u_* , el Reynolds de la partícula, Re_{*p} y R_p , dados por:

$$\tau_* = \mu_T \frac{\partial u_f}{\partial y} \quad (20)$$

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_*}{\rho_f}} \quad (21)$$

$$Re_{*p} = \frac{d_s u_*}{\nu_f} \quad (22)$$

$$R_p = \frac{Re_{*p}}{\sqrt{\tau_*}} \quad (23)$$

Finalmente, los resultados para el arrastre incipiente se compararon con la curva de Brownlie :

$$\tau_{*c} = 0.22R_p^{-0.6} + 0.06 \exp(-17.77R_p^{-0.6}) \quad (24)$$

4. RESULTADOS

En la **Figura 2** se presenta un ejemplo de los resultados para 3 velocidades del set de experimentos S3, en donde se muestra una condición en donde no hay movimiento del lecho, una condición de arrastre incipiente, y finalmente una condición de movimiento general del lecho.

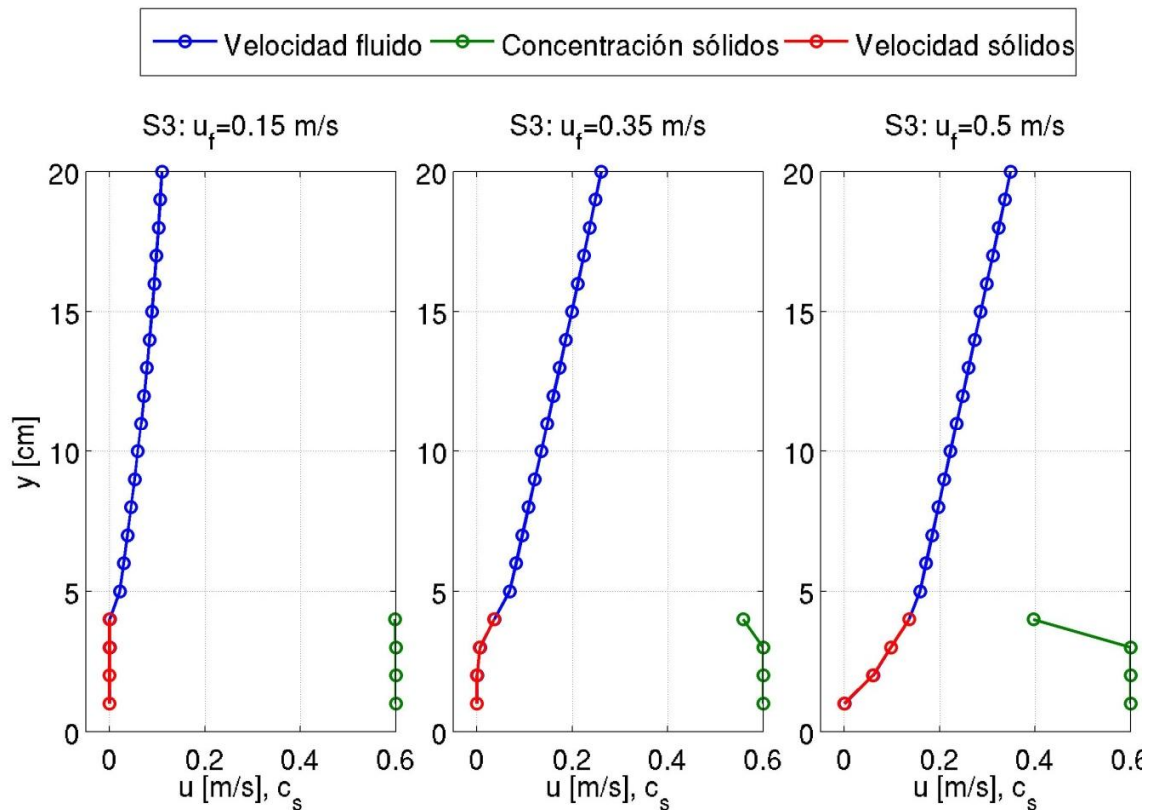


Figura 2. Perfil de velocidades del fluido (línea azul) y de las partículas sólidas (línea roja), y concentración de los sólidos (línea verde), para tres velocidades del set S3.

Un análisis más detallado mostrando el balance de fuerza sobre un volumen de control en la superficie del lecho se presenta en la **Figura 3**. En esta figura se presenta cada uno de los términos de la ecuación de momentum horizontal de los sólidos (ecuación (19)): gradiente horizontal de presión de sólidos (línea azul), fuerza de Coulomb (línea verde), gradiente horizontal de presión del fluido (línea roja), fuerza de arrastre (línea celeste), gradiente de presión por colisiones (línea morada), y esfuerzo de corte por colisiones (línea amarilla). El inicio del movimiento ocurre producto del esfuerzo de corte del fluido, y una vez que las partículas sólidas entran en movimiento (ver línea vertical en Figura 3), la fuerza de Coulomb disminuye producto de la suspensión de las partículas (i.e. producto de la pérdida del contacto entre partículas). La fuerza de arrastre, por otra parte, aumenta conforme aumenta la velocidad del fluido. Los términos asociados a las colisiones entre partículas, por otra parte, parecen no tener mayor relevancia en el balance de fuerzas.

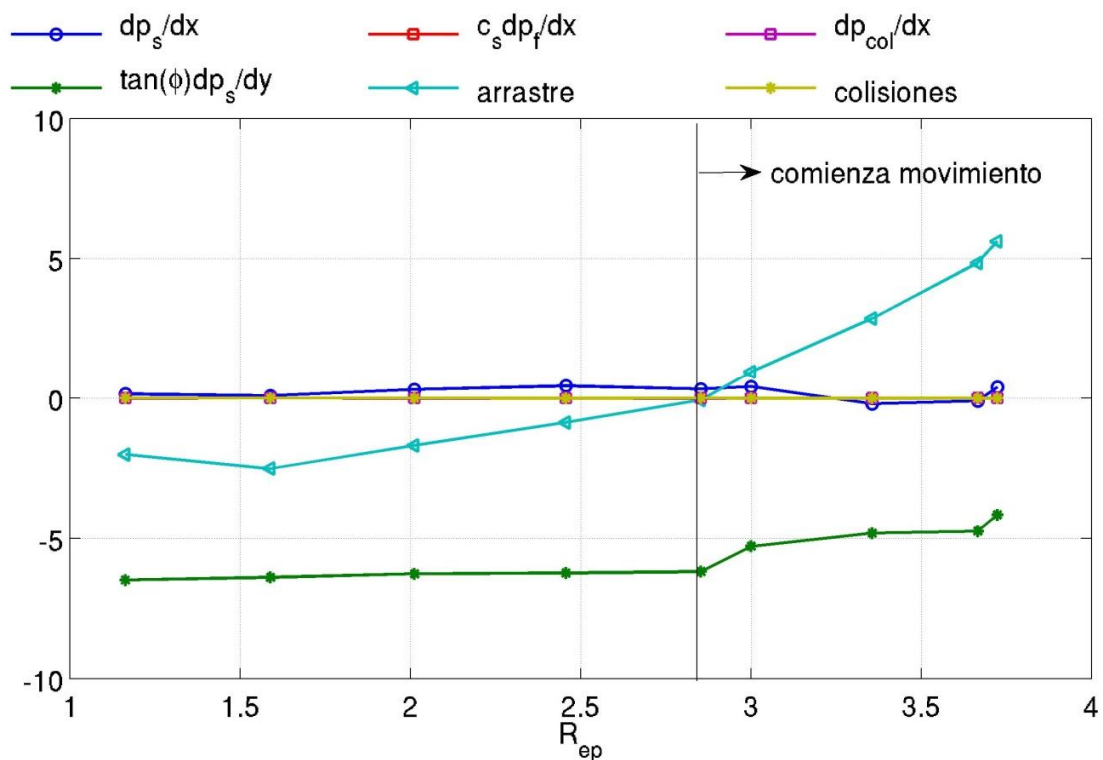


Figura 3. Fuerzas sobre un volumen de control del lecho de partículas sólidas, como función del R_{e*} , para el set de experimentos S3: gradiente horizontal de presión de sólidos (línea azul), fuerza de Coulomb (línea verde), gradiente horizontal de presión del fluido (línea roja), fuerza de arrastre (línea celeste), gradiente de presión por colisiones (línea morada), y esfuerzo de corte por colisiones (línea amarilla).

Finalmente en la **Figura 4** se presenta una comparación entre la curva de Shields y los resultados para los set de experimentos numéricos desarrollados. Se observa un buen ajuste para Reynolds bajos; sin embargo, a medida que el flujo se hace más turbulento, los resultados numéricos se separan bastante de la curva de Shields. Probablemente las discrepancias se deban al cierre utilizado para representar la fuerza de arrastre (ecuación (4)), el cual tiene directa relación con la producción de turbulencia en las ecuaciones del modelo $k - \varepsilon$ (7) – (9), en donde se incorpora el término asociado al trabajo hecho por las fuerza de arrastre como término de producción.

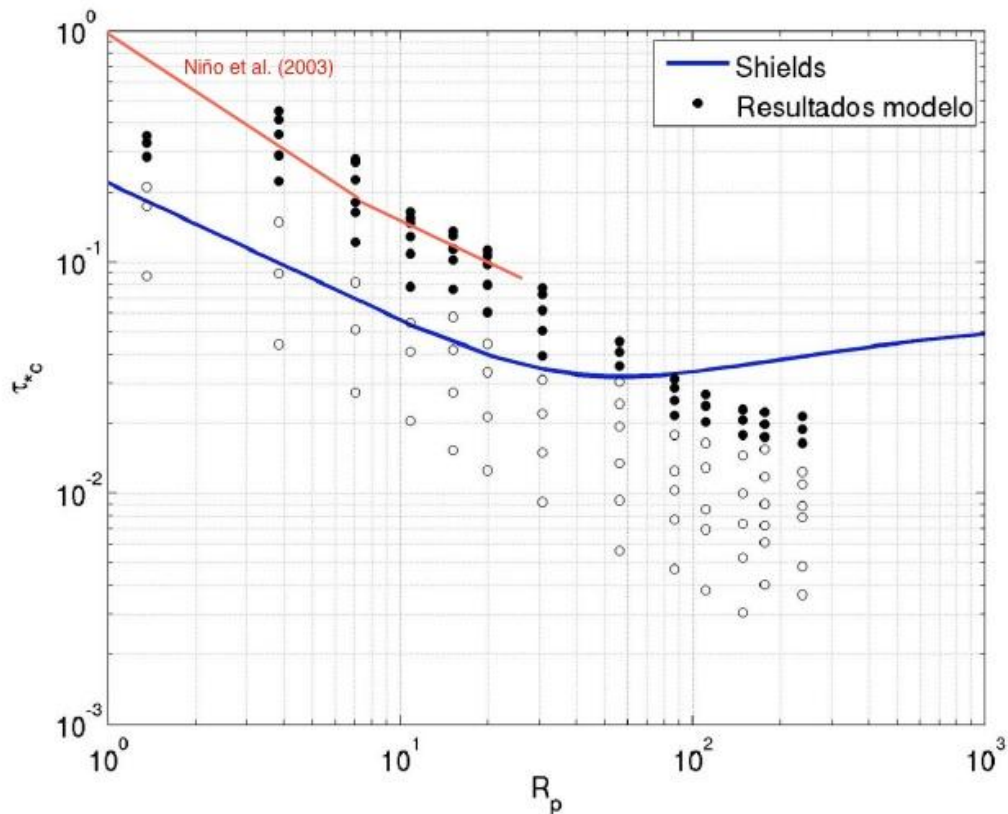


Figura 4. Comparación entre la parametrización de Brownlie(1981) para la curva de Shields, los resultados experimentales de Niño et al. (2003), y los resultados numéricos de este estudio. Los círculos negros indican partículas del lecho en movimiento, mientras que los blancos indican que no hay movimiento.

5. DISCUSIÓN

En este trabajo se presentó una aplicación de las ecuaciones continuas de dos fases propuestas por Meruane et al. (2010), para estudiar el arrastre incipiente de sedimentos en un lecho de material granular homogéneo. Los resultados del modelo se compararon con la curva de Shields, mostrando la bondad la aproximación.

Un análisis detallado del balance de fuerza sobre un volumen de control en la superficie del lecho mostró que el inicio del movimiento ocurre producto del esfuerzo de corte del fluido, y una vez que las partículas sólidas entran en movimiento, la fuerza de Coulomb disminuye producto de la suspensión de las partículas (i.e. producto de la pérdida del contacto entre partículas). La fuerza de arrastre, por otra parte, aumenta conforme aumenta la velocidad del fluido. Los términos asociados a las colisiones entre partículas, por otra parte, parecen no tener mayor relevancia en el balance de fuerzas.

Finalmente, la comparación entre la curva de Shields y los resultados para los set de experimentos numéricos desarrollados en este estudio mostró que existe un buen ajuste para

los Reynolds bajos; sin embargo, a medida que el flujo se hace más turbulento, los resultados numéricos se separan de esta curva. Probablemente las discrepancias se deban al cierre para la fuerza de arrastre representado por la ecuación (4), la cual tiene directa relación con la producción de la turbulencia en las ecuaciones del modelo $k - \varepsilon$ (7) – (9), dado que se incorpora el término asociado al trabajo hecho por las fuerza de arrastre como término de producción en el modelo.

En el trabajo en desarrollo estamos haciendo un análisis de sensibilidad para distintas parametrizaciones para la fuerza de arrastre. También, estamos desarrollando el modelo 3D para estudiar la socavación en pilas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de los proyectos FONDECYT 1140821, 1130910 y 1140767.

REFERENCIAS

Campbell, C. 1990. Rapid granular flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 22, 57-92.

Dey, S. and Papanicolaou, A. 2008. Sediment Threshold under Stream Flow: A State-of-the-Art Review. *Journal of Civil Engineering*, 12, 45-60.

Di Felice, R. (1995). "Hydrodynamics of liquid fluidisation". *Chemical Engineering Science*, Vol. 50, 1213–1245.

Foscolo, P. U., L. G. Gibilaro, and S. P. Waldram (1983). "A unified model for particulate expansion of fluidised beds and flow in fixed porous media". *Chem. Engng Sci.* Vol. 38, 1251-1260.

Goldhirsch, I. 2003. Rapid granular flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 35, 267-293.

Goodman, M. and S. Cowin (1971). "Two problems in the gravity flow of granular materials". *J. Fluid Mech.*, Vol. 45, 321–339.

Hutter, K. Wang, Y. and Pudasaini, S. 2005. The Savage-Hutter avalanche model: how far can it be pushed? *Phil. Trans. R. Soc. A* 363, 1507-1528.

Johnson, P.C. and Jackson, R. 1987. Frictional-collisional constitutive relations for granular materials, with application to plane shearing. *J. Fluid Mech.* 176, 67-93.

Meruane, C., Tamburrino, A. & Roche, O. 2010. On the role of the ambient fluid on gravitational granular flow dynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, 648: 381-404. doi:10.1017/S0022112009993181.

Niño, Y., Lopez, F. and García, M. 2003. Threshold for particle entrainment into suspension. *Sedimentology*, 50, 247-263.

Patankar, S. (1980). "Numerical heat transfer and fluid flow". *Hemisphere Publishing Corporation, Taylor and Francis Group*.

Savage, S.B. 1983. Mechanical of granular materials: new models and constitutive relations. In *Granular Flows Down Rough Inclines: Review and Extension* (ed. J. T. Jenkins and M. Satake), pp. 261-282. Elsevier.

Truesdell, C. (1984). "Rational thermodynamics". *Springer-Verlag*.