

**SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA**  
**XXII CONGRESO CHILENO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA**

**IMPLEMENTACIÓN DE UNA TÉCNICA EXPERIMENTAL  
PARA LA MEDICIÓN DE LA ALTURA EN ONDAS RODANTES**

**ALFREDO ARANDA N.<sup>1</sup>**  
**NICOLÁS AMIGO A.<sup>2</sup>**  
**CHRISTIAN IHLE B.<sup>3</sup>**  
**ALDO TAMBURRINO T.<sup>4</sup>**

**RESUMEN**

El conocimiento de los detalles de mezclas sólido-líquidas tales como arcillas es relevante, pues está relacionado con la modelación de flujos industriales tales como los de relaves mineros. En el presente artículo se propone una técnica experimental que determina la deformación fuera del plano a partir de una ecuación geométrica que involucra la deformación en el plano, y esta última se determina a través de la correlación digital de imágenes (DIC). El principio fundamental de la técnica se basa en comparar dos imágenes obtenidas de la proyección de un patrón sobre un mismo cuerpo deformado (imagen de referencia) y no deformado (imagen deformada). En particular, mostramos su aplicación en la descarga en un canal confinado de la mezcla de bentonita en agua a una concentración del 11% en peso. Para ello se libera el fluido a través de una tubería sobre un canal con inclinación del 1.95% y un caudal de 79,3 cm<sup>3</sup>/s, donde se generan ondas rodantes (*roll waves*) cuya altura es determinada mediante esta técnica, la cual es comparada con el perfil lateral obtenido, pudiendo así validar el método.

---

<sup>1</sup>Doctorante en Fluidodinámica, Depto. de Ingeniería Civil, Universidad de Chile - [alfredo.aranda@ing.uchile.cl](mailto:alfredo.aranda@ing.uchile.cl)

<sup>2</sup>Doctorante en Fluidodinámica, Depto. de Ingeniería Civil, Universidad de Chile - [nicolas.amigo@ing.uchile.cl](mailto:nicolas.amigo@ing.uchile.cl)

<sup>3</sup>Profesor Asistente, Depto. de Ingeniería en Minas, Universidad de Chile - [chle@ing.uchile.cl](mailto:chle@ing.uchile.cl)

<sup>4</sup>Profesor Asociado, Depto. de Ingeniería Civil, Universidad de Chile - [atamburr@ing.uchile.cl](mailto:atamburr@ing.uchile.cl)

## 1. INTRODUCCIÓN

Actualmente la minería es la industria que aporta el mayor beneficio monetario para Chile y es indispensable el desarrollo de nuevas técnicas de medición que permitan reducir gastos y colaborar en la protección del medio ambiente. De particular interés es el traslado de los relaves hacia sus respectivos tranques. Estos tienen el potencial de ser altamente contaminantes. En particular, el caso de posibles inestabilidades generadas durante su transporte pueden desembocar en la contaminación del medio ambiente.

Para estudiar las deformaciones generadas en los fluidos, se propone utilizar la correlación digital de imágenes que es una técnica óptica de campo completo. Según lo explicado por Crammond et al. (2013), ésta se basa en la comparación de una imagen inicial de la muestra y una imagen después de la deformación de una máscara proyectada sobre la superficie del flujo. Las imágenes se adquieren mediante una cámara CCD monocromática, donde la resolución espacial y la precisión de los desplazamientos están limitados por el número total de píxeles en la imagen, ya sea por la resolución de la cámara o por la capacidad computacional de análisis. El campo de desplazamiento provocado por la deformación es obtenido a través de un algoritmo de correlación que identifique el cambio en el patrón.

En el presente trabajo se describe brevemente un modelo adaptado a la visualización de ondas rodantes, la técnica de correlación digital de imágenes utilizada, el montaje y la metodología empleada y se finaliza con la aplicación de la técnica aplicada a descargas de mezclas de bentonita y agua fluyendo en un canal inclinado.

## 2. DESCRIPCIÓN DE LAS ONDAS RODANTES

Los flujos delgados en canales empinados frecuentemente exhiben inestabilidades en su superficie que crecen hasta formar las conocidas ondas rodantes (generalmente conocidas como *roll waves*). Éstas se desplazan como trenes de ondas desde su inicio hasta la zona de descarga, ocurriendo comúnmente en conductos construidos por el hombre, tales como los acueductos y desagües. Según Huang et al. (1997) este tipo de flujo puede ser modelado empleando aproximaciones de capa límite, tal como se indica en la figura 1. Existen dos fases claras dentro de este modelo, la zona de abajo es la llamada flujo cizallado y presenta una distribución parabólica de velocidades, y la zona superior se conoce como flujo tipo tapón y presenta un perfil constante de velocidades. Las ondas rodantes son soluciones oscilatorias de pequeñas perturbaciones de flujo no uniforme respecto de un estado base uniforme (Yih 1963, 1965). En el caso de fluidos no newtonianos, su aparición depende de un número de Reynolds crítico que es, a su vez, función del esfuerzo de fluencia (Balmforth & Liu 2004).

Existen dos modelos comunes para definir el modelo constitutivo de un fluido no newtoniano, éstos son

- Modelo de Bingham

$$K_B \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{cases} 0, & |\tau| < \tau_0 \\ \tau - \tau_0 \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), & |\tau| \geq \tau_0 \end{cases} \quad (1)$$

Donde  $\tau_0$  es el esfuerzo de fluencia,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  es la tasa de deformación y  $K_B$  la viscosidad plástica de Bingham.

- Modelo de Herschel-Bulkley

$$K_H \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^n = \begin{cases} 0, & |\tau| < \tau_0 \\ \tau - \tau_0 \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), & |\tau| \geq \tau_0 \end{cases} \quad (2)$$

Donde  $n$  designa el índice del flujo y  $K_H$  la viscosidad plástica de Herschel-Bulkley.

En ocasiones estos modelos de las ecuaciones (1) y (2) permiten dar soluciones a las ecuaciones que gobiernan el sistema, dependiendo de la complejidad de éste.

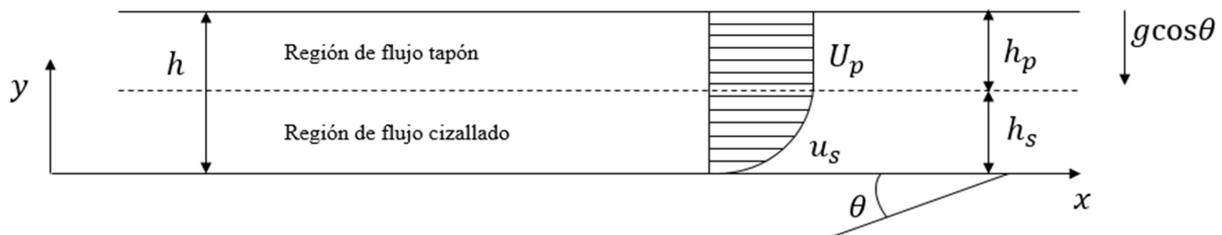
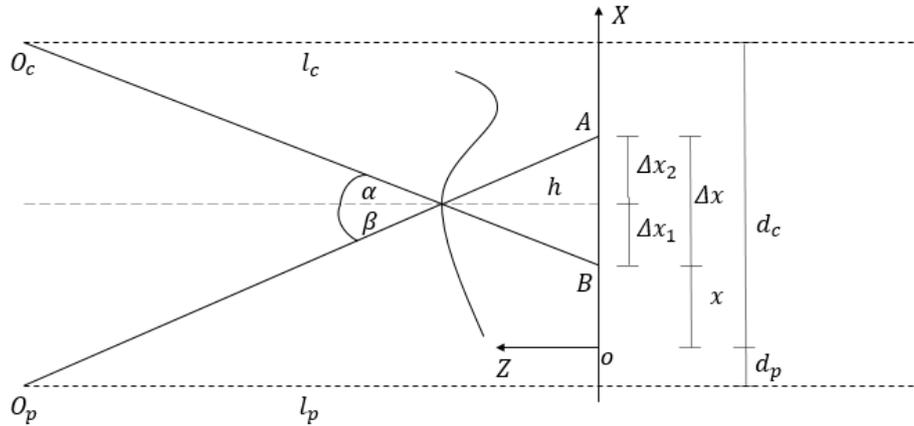


Figura 1. Descripción de una onda rodante.

### 3. TÉCNICA DE CORRELACIÓN DIGITAL DE IMAGENES

La correlación digital de imágenes es una efectiva y práctica técnica óptica de campo completo que permite medir desplazamientos y deformaciones en el plano. Esta se basa en proyectar algún patrón sobre un objeto en estudio y capturar una imagen en su estado inicial y una en su estado final o deformado. Las imágenes obtenidas son divididas digitalmente en ventanas de interrogación conteniendo un número finito de píxeles (Pan et al. 2009). Luego mediante un criterio de correlación se puede obtener el desplazamiento en el plano del patrón. Sin embargo es posible realizar mediciones fuera del plano gracias a unas ecuaciones geométricas que dependen de este campo de desplazamiento. Para ello, se seguirá el desarrollo geométrico propuesto por Pan et al. (2008).



**Figura 2.** Geometría utilizada para determinar la deformación fuera del plano. La dirección de escurrimiento de la onda es en la dirección  $-X$ .

De la geometría de la figura 2 se tiene que  $O_p$  y  $O_c$  son los puntos desde el proyector y el centro óptico de la cámara hacia el plano  $x$  respectivamente,  $l_p$  es la distancia del punto  $O_p$  al plano  $X$ ,  $l_c$  es la distancia del punto  $O_c$  hacia el mismo plano, el punto  $O$  es escogido de forma aleatoria en una parte del borde de la imagen digital,  $d_p$  es la distancia desde el proyector al origen y  $d_c$  la distancia del cámara al origen, ambas distancias suman lo mismo que la distancia entre el proyector y la cámara. Para determinar la deformación fuera del plano se debe determinar  $h$  como función de variables que puedan ser medidas directamente de la geometría tales como  $l_p$ ,  $l_c$ ,  $d_p$  y  $d_c$ . A partir de la figura 2 se puede obtener el siguiente resultado (Pan et al. 2008)

$$h = \frac{Mu}{D_0 + D_1 Mu} \quad (3)$$

Donde  $M$  es la magnificación de la cámara,  $u$  el campo de desplazamiento en la dirección  $x$ ,  $D_0 = d_c / l_c + d_p / l_p$ ,  $D_1 = 1 / l_p$ ,  $d_c$  y  $d_p$  son distancias cualquiera tal que sumen la separación de ambos focos y que coincidan con el punto  $o$ .

Según la ecuación (3) se puede obtener la deformación fuera del plano que depende de ciertos parámetros geométricos, y especialmente, de la deformación en el plano donde ésta se obtiene a partir de la correlación digital de imágenes. El principio básico es seguir algún patrón localizado en la imagen de referencia y compararlo con el patrón de la imagen deformada. Cada ventana de interrogación tiene una dimensión de  $n \times n$  y el punto central se conoce como  $(x_0, y_0)$ . El punto vecino de este punto central se conoce como  $(x, y)$ , por lo que en la imagen deformada se le conoce como  $(x', y')$ . A través de una función de forma (*shape function*) se pueden relacionar los parámetros anteriores de la siguiente manera

$$x' = x_0 + \Delta x + u + u_x \Delta x + u_y \Delta y + \frac{1}{2} u_{xx} \Delta x^2 + \frac{1}{2} u_{yy} \Delta y^2 + u_{xy} \Delta x \Delta y \quad (4)$$

$$y' = y_0 + \Delta y + v + v_x \Delta x + v_y \Delta y + \frac{1}{2} v_{xx} \Delta x^2 + \frac{1}{2} v_{yy} \Delta y^2 + v_{xy} \Delta x \Delta y \quad (5)$$

Donde  $u$  y  $v$  son las componentes del desplazamiento para el centro de la ventana de interrogación en la dirección  $x$  y  $y$  respectivamente. Los términos  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son las distancias desde el centro  $(x_0, y_0)$  al punto  $(x, y)$ ;  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $v_x$  y  $v_y$  son las componentes del gradiente de desplazamiento; y  $u_{xx}$ ,  $u_{yy}$ ,  $v_{xx}$ ,  $v_{yy}$  y  $v_{xy}$  son los gradientes de desplazamiento de segundo orden. Dadas las variables anteriores se define el siguiente vector

$$p = [u, v, u_x, u_y, v_x, v_y, u_{xx}, u_{yy}, v_{xx}, v_{yy}, u_{xy}, v_{xy}] \quad (6)$$

Para obtener la solución del vector  $p$  se usa el método de Newton-Raphson tal como se indica en la ecuación (7) (Pan et al. 2007).

$$p - p_0 = -(\nabla C(p_0))(\nabla \nabla C(p_0))^{-1} \quad (7)$$

donde el valor -1 indica la matriz inversa,  $p_0$  son los valores iniciales de  $p$ ,  $\nabla \nabla C(p_0)$  es la matriz Hessiana de la función  $C$  y  $C$  la función correlación cuyo criterio es el ZNSSD (*zero-mean normalized sum of squared differences*) desarrollado por Pan (2011). A partir de la ecuación (7) se obtienen las variables del vector  $p$  y con ello el campo de desplazamiento  $u$ . Éste es encontrado a través de un código abierto de Matlab realizado por J. Blaber et al. (2015). Además esta GUI permite interpolar los resultados a todo el campo estudiado a través de una función bicúbica.

Por otro lado se generó el tipo de máscara que se proyecta en la capa superficial del flujo mediante una función aleatoria ya implementada en Matlab. El patrón proyectado correspondía a una densidad de 7,3% que representa el espacio ocupado por los puntos blancos en la ventana de interrogación cuyas dimensiones son de 42 x 42 píxeles. Esta densidad fue calculada mediante la siguiente expresión

$$\zeta = \frac{A_s N_s}{A_c} \quad (8)$$

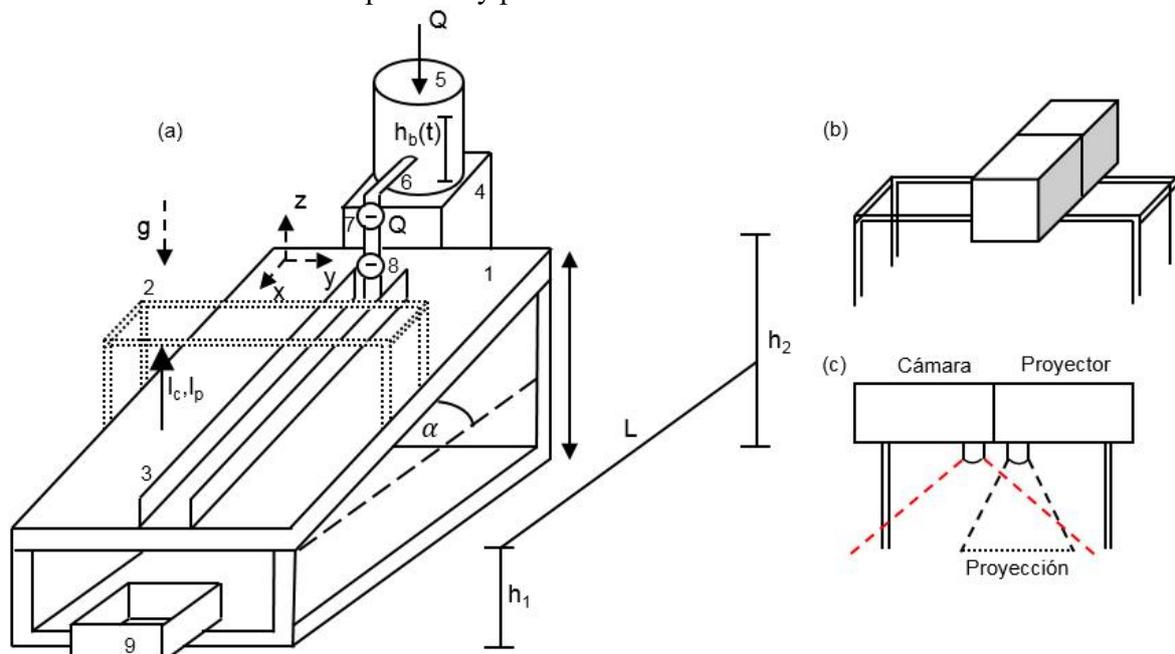
Donde  $A_s$  representa el área de un punto (son todos del mismo tamaño),  $N_s$  el número de puntos que hay en la ventana de interrogación y  $A_c$  el área de la ventana de interrogación.

#### 4. MÉTODO EXPERIMENTAL Y METODOLOGÍA

Un esquema del montaje experimental utilizado se muestra en la figura 3, consistente en una base (1) 208,4x100 cm<sup>2</sup> de melamina, con una rugosidad suficientemente baja para permitir flujo

uniforme (con presencia de ondas rodantes), e impermeable al fluido. Sobre la estructura metálica mostrada en (2) se posicionan una cámara DSLR Nikon modelo D3200, para la captura instantánea del paso de las ondas, y un proyector marca BENQ modelo MS517F que presenta un patrón de puntos aleatorios sobre el fluido (donde el área de cada punto es de 11 pixeles con un diámetro asociado de 4 pixeles aproximadamente.), permitiendo la utilización de la técnica de correlación de imágenes descrita en la sección anterior. Sobre la base (1) se coloca un canal de dimensiones  $190 \times 15 \times 1,7 \text{ cm}^3$ , también de melamina. En sus bordes laterales se pegaron con Agorex dos paredes transparentes de policarbonato, las que permitieron la grabación lateral del perfil de escurrimiento y las ondas rodantes, empleando una cámara digital marca Sony modelo DSC-wx300. Las imágenes obtenidas se convirtieron a escala de grises, cuyo rango se encuentra entre 0 y 1, y se realizó una detección de bordes en Matlab. A partir de ellas se encontró en la interface del fluido el valor de 0,4. Por otro lado, (4) es una base de madera que contiene el estanque de acrílico (5) 19 cm de diámetro y 40 cm de altura, con una capacidad de 12 litros, donde se vierte el fluido hasta una altura de 22 cm. Mediante los tubos de PVC (6), se hizo fluir la mezcla hasta el canal (2). En estos tubos existen dos válvulas que cierran o permiten el paso del fluido. La válvula (7) controla el caudal de salida de la mezcla y la (8) inicia o detiene la descarga. Finalmente, el fluido es recuperado en el receptáculo (9).

El proceso de medición es el siguiente. Antes de descargar la mezcla, se inicia la grabación del video. Luego la válvula de paso es abierta completamente para iniciar el flujo, siendo el caudal controlado mediante su respectiva válvula. Se esperan 5 segundos para obtener el régimen permanente, para posteriormente capturar 8 imágenes de las diferentes ondas rodantes formadas mediante la cámara fotográfica. El proceso se repite tres veces para obtener un total de 24 imágenes para una concentración del 11% en peso de bentonita en agua. Cabe destacar que todas las mediciones se realizaron a temperatura y presión ambiente.

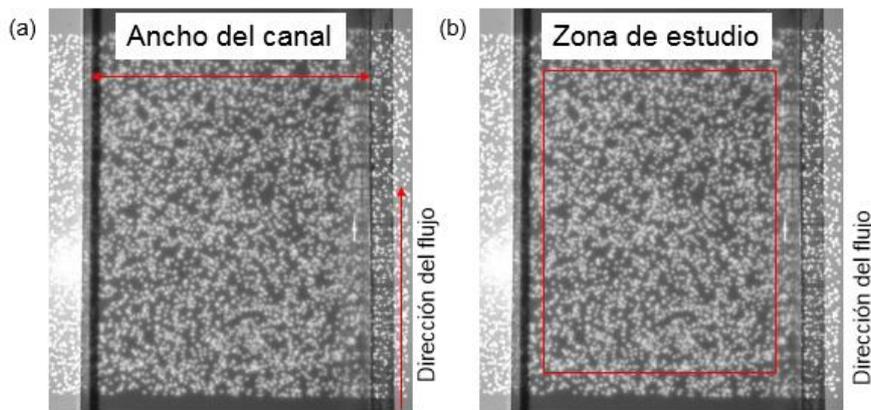


**Figura 3.** (a) Montaje experimental para la medición de la altura de ondas rodantes a través de la correlación digital de imágenes. (b) Riel de soporte para la cámara y proyector. (c) Vista lateral de la cámara y el proyector.

## 5. ANÁLISIS Y RESULTADOS

El uso de esta técnica puede implementarse sobre cualquier objeto, independiente si es sólido o líquido, donde permite encontrar los campos de deformación y desplazamiento en tiempo real si es que el sistema es automatizado.

Una vez obtenidas todas las fotos laterales para los tres sets de experimentos junto con su respectiva foto vertical, se procedió a obtener el campo de desplazamiento en la dirección del flujo usando la ecuación (7), para ello se correlacionó la imagen de referencia con la imagen deformada tal como se indica en la figura 4.



**Figura 4.** (a) Muestra la imagen de referencia y (b) indica la imagen deformada (con el paso de la onda)

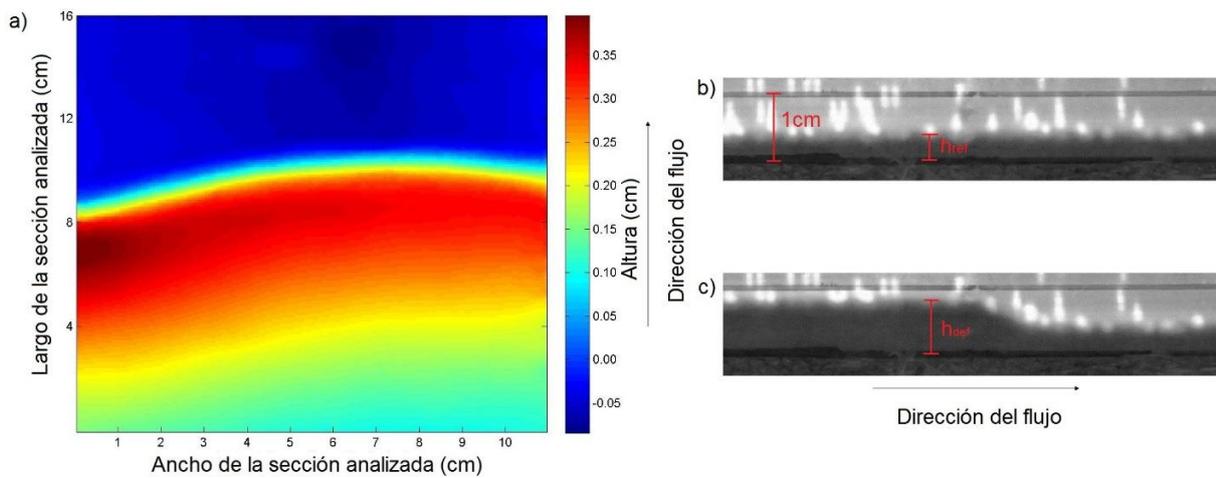
Una vez encontrado este campo, se reemplaza en la ecuación (3) para obtener el campo escalar de alturas de la onda rodante. En la figura 5 se muestra el procedimiento para obtener la comparación de la altura entregada por la técnica junto con la fotografiada lateralmente.

La figuras 5b y 5c muestran las capturas laterales cuando el flujo está completamente detenido y cuando pasa la onda rodante, respectivamente. Esta altura se obtiene mediante la diferencia de pixeles entre las dos imágenes en el software Matlab. Luego se escaló empleando una regla de tres la distancia en pixeles que corresponde a 1 cm señalada en la misma figura.

**Tabla 1.** Alturas obtenidas mediante técnica y cámara lateral.

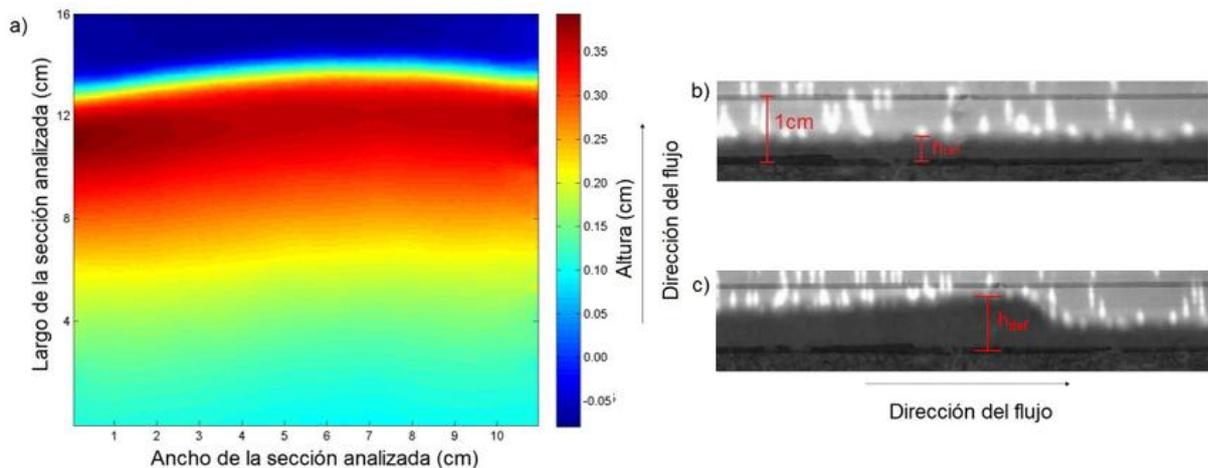
| N° onda | Caso 1     |            |              | Caso 2     |            |              | Caso 3     |            |              |
|---------|------------|------------|--------------|------------|------------|--------------|------------|------------|--------------|
|         | $h_l$ (cm) | $h_t$ (cm) | Dif. %       | $h_l$ (cm) | $h_t$ (cm) | Dif. %       | $h_l$ (cm) | $h_t$ (cm) | Dif. %       |
| 1       | 0,372      | 0,397      | <b>6,297</b> | 0,480      | 0,524      | <b>8,397</b> | 0,587      | 0,544      | <b>7,325</b> |
| 2       | 0,405      | 0,386      | <b>4,922</b> | 0,345      | 0,319      | <b>8,150</b> | 0,430      | 0,394      | <b>8,372</b> |
| 3       | 0,446      | 0,413      | <b>7,990</b> | 0,483      | 0,532      | <b>9,211</b> | 0,471      | 0,435      | <b>7,643</b> |
| 4       | 0,455      | 0,433      | <b>5,081</b> | 0,446      | 0,434      | <b>2,765</b> | 0,339      | 0,332      | <b>2,065</b> |
| 5       | 0,430      | 0,402      | <b>6,965</b> | 0,479      | 0,446      | <b>7,399</b> | 0,223      | 0,202      | <b>9,417</b> |
| 6       | 0,289      | 0,285      | <b>1,404</b> | 0,421      | 0,399      | <b>5,514</b> | 0,372      | 0,352      | <b>5,376</b> |
| 7       | 0,471      | 0,451      | <b>4,435</b> | 0,587      | 0,603      | <b>2,653</b> | 0,372      | 0,343      | <b>7,796</b> |
| 8       | 0,413      | 0,423      | <b>2,364</b> | 0,463      | 0,462      | <b>0,216</b> | 0,297      | 0,273      | <b>8,081</b> |

De la figura 5a se obtiene la altura máxima y ésta es comparada con la medida con la cámara dispuesta lateralmente. En la tabla 1 se muestran todos los resultados para los campos escalares de altura para todos los sets de experimentos, donde  $h_l$  representa la altura medida lateralmente y  $h_t$  la altura medida por la técnica. Además se muestra la diferencia porcentual de ellas. Tal como se aprecia en la tabla 1 todos los valores de las diferencias porcentuales son menores al 10%, encontrándose que la mínima diferencia porcentual entre la técnica y el análisis lateral es de 0,216% y la máxima de 9,417%. Vale decir, las alturas medidas por la técnica se encuentran en un rango tolerable de error, por lo que se puede validar el uso de la técnica para la medición de deformaciones de un fluido fuera del plano.



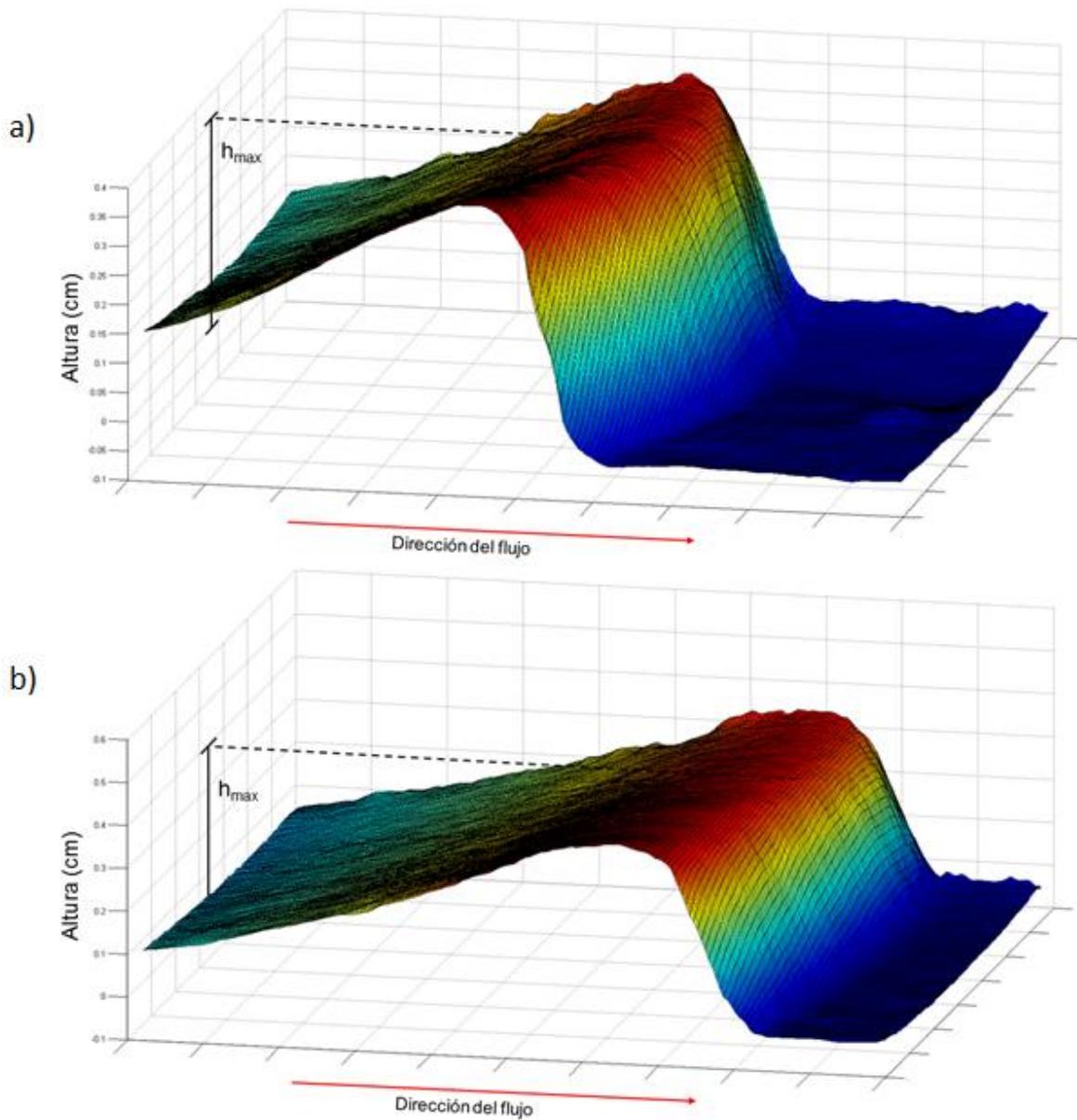
**Figura 5.** a) Distribución de alturas de la onda rodante obtenida por DIC para el caso 1, b) foto lateral de referencia y c) foto lateral al paso de la onda rodante vista en a).

En la figura 6 se muestra otro resultado del campo escalar de alturas tomado del caso 2 de medición



**Figura 6.** a) Distribución de alturas de la onda rodante obtenida por DIC para el caso 2, b) foto lateral de referencia y c) foto lateral al paso de la onda rodante vista en a).

Como se aprecia en la figura 7a y 7b, se pueden obtener un campo tridimensional de la altura de escurrimiento de la onda. En el caso de tener varias fotos continuas para una misma onda se podría estudiar la dinámica de la superficie libre del fluido.



**Figura 7.** a) Distribución de alturas tridimensional para una onda rodante en el caso 1, b) Distribución de alturas tridimensional para una onda rodante en el caso 2.

## 6. CONCLUSIONES

Al finalizar el presente trabajo se pudo obtener el campo de altura de las ondas rodantes a través de relaciones geométricas que dependían de la deformación en el plano cuyo valor se determinó a partir de la DIC. La técnica se logró validar mediante una comparación empírica con la medición

de la altura de cada onda usando una cámara lateral en donde la diferencia porcentual en todos los casos fue menor al 10%. Cabe destacar que una ventaja de esta técnica es que no es invasiva, vale decir, no perturba al medio en cuestión y se logra medir independiente de las condiciones del objeto, no dañando la instrumentación.

Un estudio interesante sería estudiar las deformaciones superficiales de los flujos granulares dada su alta complejidad analítica.

## **AGRADECIMIENTOS**

Alfredo Aranda y Nicolás Amigo agradecen a la beca de doctorado nacional CONICYT año 2014 Nro. 21140180 y año 2015 Nro. 21151448 respectivamente. Además se agradece el financiamiento entregado por el AMTC de la Universidad de Chile y al proyecto FONDECYT 1130910 del profesor Aldo Tamburrino para el apoyo completo del montaje experimental.

## **REFERENCIAS**

Balmforth, N., J. Lui, 2004. Roll waves in mud, *Journal of Fluid Mechanics*, 519, 33-54.

Blaber, J., B. Adair y A. Antoniou, 2015. Ncorr: Open-Source 2D Digital Image Correlation Matlab Software, *Experimental Mechanics*, 55, 1105-1122.

Crammond, G., S. W. Boyd y J. M. Dulieu-Barton. 2013. Speckle pattern quality assessment for digital image correlation, *Optics and Lasers in Engineering*, 51, 1368-1378.

Huang. X. y M. Garcia. 1997. A perturbation solution for Bingham-plastic mudflows, *Journal of Hydraulic Engineering*, 123, 986-994.

Pan, B. 2011. Recent progress in digital image correlation, *Experimental Mechanics*, 51, 1223-1235.

Pan, B., A. Asundi, H. Xie y J. Gao. 2009. Digital image correlation using iterative least squares and pointwise least squares for displacement field and strain field measurements, *Optics and Lasers in Engineering*, 47, 865-874.

Pan, B., H. Xie, J. Gao y A. Asundi. 2008. Improved speckle projection profilometry for out-of-plane shape measurement, *Applied Optics*, 47, 5527-5533.

Pan, B., H. Xie, Z. Guo y T. Hua. 2007. Full-field strain measurement using a two dimensional Savitzky-Golay digital differentiator in digital image correlation, *Optical Engineering*, 46, 1-10.

Yih, C. 1963. Stability of liquid flow down an inclined plane, *Physics of Fluids*, 6, 321-334.

Yih, C. 1965. Stability of a Non-Newtonian liquid film flowing down an inclined plane, *Physics of Fluids*, 8, 1257-1263.