

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA
XX CONGRESO CHILENO DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

**DETERMINACIÓN TEORICA DEL NIVEL UMBRAL ENTRE NAPA
SUPERFICIAL Y SUMERGIDA EN ENSANCHES BRUSCOS DE CANALES**

LUDWIG STOWHAS B.¹
FELIPE CELIS M.²

RESUMEN

Se propone y valida mediante comparación con datos experimentales, el uso de una altura crítica basada en el concepto de Momenta mínima, como valor umbral para distinguir entre el flujo con napa superficial y resalto de ondas, respecto a napa sumergida con resalto incompleto, en el caso de canales en régimen de río con grada de bajada con o sin ensanche basal. Los mejores resultados se obtienen al introducir una corrección en la ecuación clásica de la función Momenta para corregir por efectos de curvatura de filetes y distribución no hidrostática de presiones, aunque en el caso que incluye ensanches basales, dicha corrección pierde preponderancia.

ABSTRACT

The use of a critical depth based on the concept of minimum Momentum is proposed for the establishment of the threshold limit between a superficial flow followed by a waved hydraulic jump and a submerged flow followed by an incomplete jump, in the case of channels in subcritical regimen including a bottom drop and/or a base enlargement. Theoretical values are validated by comparison with experimental data. Best results are obtained introducing a correction factor in the classical Momentum equation, in order to consider for the flow surface curvature and the non hydrostatical pressure distribution, even when in the cases of basal enlargement, this correction is less important.

¹ Profesor Departamento de Obras Civiles, UTFSM – mail: ludwig.stowhas@usm.cl

² Ingeniero Civil, UTFSM

1. INTRODUCCIÓN

El comportamiento hidráulico de gradas de bajada en canales en régimen de río ha sido extensamente estudiado a nivel mundial y en particular en Chile, por parte de F.J. Domínguez (1999).

Esta singularidad, que puede incluir un ensanche del canal junto a la grada, genera cuatro escenarios de escurrimiento que se condicionan por el nivel de energía específica existente aguas abajo. Estas situaciones son las siguientes: Grada influenciada, grada no influenciada con napa superficial aguas abajo de la singularidad, napa sumergida con resalto incompleto y resalto rechazado.

En el caso de la grada influenciada, que corresponde a un eje hidráulico ligado, se ha demostrado la validez de la hipótesis de constancia de la función Momenta en su forma clásica, lo que permite determinar el nivel de escurrimiento aguas arriba de la singularidad, conocido el nivel de aguas abajo. Los casos de napa superficial, napa sumergida y resalto rechazado con napa aireada o no aireada han sido abordados principalmente en forma experimental debido a la complejidad de incorporar los efectos de la distribución no hidrostática de presiones y de la curvatura de las líneas de flujo en la determinación de la altura crítica o energía crítica, así como también en la función Momenta. Los trabajos más importantes al respecto están incorporados como ábacos en el libro "Hidráulica" de Francisco Javier Domínguez. El caso de un resalto rechazado con napa aireada ha sido tratado por White (1943) y por Rand (1955), y las caídas no aireadas han sido estudiadas por F. J. Domínguez. (1999)

Actualmente entonces, salvo el caso de eje hidráulico ligado, los ejes hidráulicos límites de un canal con grada de bajada se han abordado mediante el uso de ábacos experimentales. En este trabajo se intentará generar expresiones teóricas de las condiciones límites del escurrimiento, en particular, el límite entre napa superficial y napa sumergida, con el fin de facilitar el procedimiento para la obtención de estos datos.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema a resolver consiste en generar analíticamente las expresiones del eje hidráulico límite entre napa superficial y napa sumergida que puede ocurrir en un canal con pendiente suave y sección prismática regular, al que se le incorpora en una de sus secciones transversales una grada de bajada con o sin un ensanche. Para verificar su validez se deberán comparar sus resultados con valores experimentales. Sin pérdida de generalidad, se analiza el caso de la sección rectangular por su simplicidad algebraica.

Realizando un análisis desde la condición de aguas abajo para un valor fijo de la altura de la grada se puede observar que al variar esta condición se van generando los distintos tipos de ejes hidráulicos que pueden ocurrir en este canal. Si se toma un valor alto de la condición de aguas abajo que sea capaz de generar una corriente tranquila en toda su extensión se tiene el cumplimiento de la ley hidrostática de presiones con las líneas de flujo rectas y paralelas lo que indica que se cumple la función Momenta en su forma clásica. Esta situación se denomina grada influenciada y es válida hasta el momento en que se genera en la sección aguas arriba de la grada una condición de crisis o energía mínima con una altura correspondiente a un escurrimiento con líneas de flujo rectas y paralelas.

$$B = h + \frac{v^2}{2g} \rightarrow \frac{\partial B}{\partial h} = 0 \rightarrow h_{cp} = \left(\frac{Q^2}{g \cdot b^2} \right)^{1/3} \quad (1)$$

Al seguir disminuyendo el valor de la condición de aguas abajo se produce un flujo con una napa viva superficial que se caracteriza por poseer en las cercanías de la grada una aceleración del flujo produciendo una condición de crisis que no corresponde a la dada por la ecuación (1), debido a que se genera una curvatura de las líneas de flujo y pérdida de la distribución hidrostática de presiones. Si se continúa disminuyendo la condición de aguas abajo se genera una napa sumergida y posteriormente un resalto rechazado. Por lo tanto se puede observar que dos situaciones condicionan los cuatro tipos de ejes hidráulicos que se pueden generar en el canal: La altura crítica clásica definida por la ecuación (1), (límite grada influenciada – napa superficial) y una nueva condición umbral que se ve afectada por las condiciones locales debido al funcionamiento de la singularidad (límite napa superficial – napa sumergida).

Se postula que el límite entre napa superficial y napa sumergida queda definido por la condición de Momenta mínima en la sección del ensanche.

En lo que sigue, se tratará de incorporar en el análisis teórico del límite Napa Superficial – Napa Sumergida esta nueva condición umbral o altura crítica, con el fin de representar de mejor forma lo que sucede en la realidad y poder generar así una expresión teórica confiable.

2.1.- Altura Crítica en la Singularidad [h_c].

En presencia de una singularidad como son las gradas de bajada (discontinuidad en la cota de fondo) y los ensanchamientos con o sin existencia de grada, para el cálculo del eje hidráulico, es difícil plantear la conservación de energía pero no la conservación de cantidad de movimiento, la cual debe cumplirse.

La ecuación de la Momenta resulta de aplicar el tercer principio que rige el comportamiento de los fluidos, el cual expone que la variación en la cantidad de movimiento percibida por un fluido en régimen permanente es igual a la suma de las fuerzas externas aplicadas sobre un volumen de control para una dirección específica, es decir,

$$\sum \vec{F}_{\text{externas}} = \frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot (\beta_2 \cdot \vec{V}_2 - \beta_1 \cdot \vec{V}_1) \quad (2)$$

Donde:

- $\vec{F}_{\text{externas}}$ = Fuerzas externas al volumen de control, en [Kg].
- γ = Peso específico del fluido, en este caso 1000 [Kg/m³].
- g = Gravedad específica, en este caso 9,8 [m/s²].
- Q = Caudal, en [m³/s].
- β_i = Coeficiente de Boussinesq en la sección i.
- V_i = Velocidad media del fluido en la sección i, en [m/s].

Despreciando las fuerzas de roce y la componente del peso en el sentido del escurrimiento, las fuerzas externas se reducen a las fuerzas de presión, con lo que la ecuación (2) se reduce a

$$\frac{\gamma}{g} \cdot Q \cdot (\beta_2 \cdot V_2 - \beta_1 \cdot V_1) = F_{p1} - F_{p2} \quad (3)$$

Si se acepta que las presiones que ejerce el agua son hidrostáticas, las fuerzas resultantes en cada sección transversal se pueden expresar de la siguiente manera:

$$F_{pi} = \gamma \cdot \eta_i \cdot A_i \quad (4)$$

donde: γ es el peso específico del fluido, η_i es la distancia desde la superficie al centro de gravedad de la sección i y A_i es el área de la sección transversal en donde actúan las presiones.

Reemplazando la expresión de la fuerza resultante en la **Ecuación 3** y ordenando a cada lado de la ecuación los términos correspondientes a la sección transversal, se obtiene la Momenta o fuerza específica general de una sección del canal.

$$Momenta (M) = \beta_1 \cdot \frac{Q}{g} \cdot V_1 + \eta_1 \cdot A_1 = \beta_2 \cdot \frac{Q}{g} \cdot V_2 + \eta_2 \cdot A_2 = \beta_i \cdot \frac{Q}{g} \cdot V_i + \eta_i \cdot A_i = Cte. [m^3] \quad (5)$$

La ventaja del uso de la Momenta radica en el hecho de que no es necesario conocer las pérdidas de energía y fuerzas internas que puedan existir entre dos secciones transversales del canal haciendo a este concepto una herramienta muy potente en el estudio de singularidades.

En el caso de una sección prismática (rectangular) afectada por un ensanchamiento brusco en su cota de fondo (grada de bajada) y en sus paredes laterales (aumento de ancho), según el esquema de la figura 1, el área por donde escurre el fluido es el área viva [A_v] y el área donde actúan las presiones es el área total [A_t].

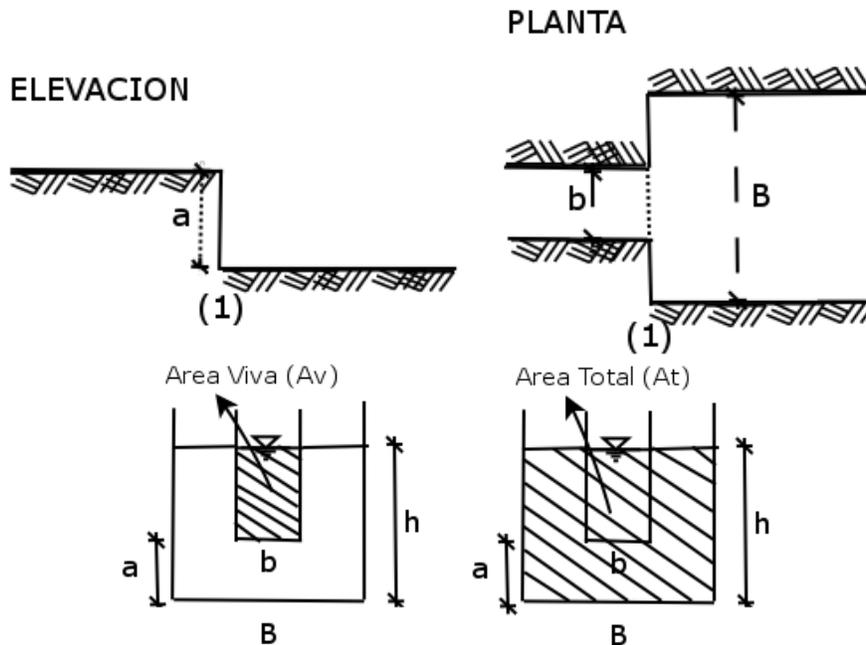


Figura 1: Esquema de las singularidades a utilizar

Para obtener la Momenta de la sección en estudio, se adoptaron en principio los siguientes supuestos simplificadorios y valores:

- 1) Las líneas de flujo son paralelas al fondo del canal, es decir, no se consideró el efecto de curvatura del flujo.
- 2) El coeficiente de Boussinesq es igual a uno, debido a que la sección transversal por donde escurre el fluido es turbulento, regular y el alineamiento del flujo es recto minimizando el efecto de la distribución no uniforme de velocidades.
- 3) El valor del área viva, que influye en el cálculo de la velocidad media, es $A_v = b \cdot (h - a)$.

- 4) El valor del área total, que influye en el cálculo de la fuerza de presión, es $A_t = B \cdot h$.
- 5) El valor de la altura de presión hidrostática en el centro de gravedad de la sección, es $\eta = 0,5 \cdot h$.

Bajo estas consideraciones, a partir de la **Ecuación 5**, se obtiene la siguiente expresión para la Momenta o fuerza específica de la sección en estudio.

$$M_1 = \frac{Q^2}{g \cdot [(h - a) \cdot b]} + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot B \quad [m^3] \quad (6)$$

2.2.- Análisis de la Función Momenta

La función Momenta se comporta en forma análoga a la energía específica, es decir, posee su valor mínimo en la condición de escurrimiento crítico que coincide con el valor que entrega la energía mínima para que el sistema funcione. Luego, derivando la ecuación 6 e igualando a cero se llega a las siguientes expresiones para evaluar la altura crítica en la singularidad, ante diferentes escenarios, según se indica en la tabla siguiente.

Tabla 1: Ecuaciones de la h_c , para distintos escenarios.

A	B	Ecuación
0	b	$h_c = \left(\frac{Q^2}{gb^2} \right)^{1/3} = h_{cp}$
$\neq 0$	b	$(h_c - a)^2 \cdot h_c = \frac{Q^2}{gb^2}$
0	$\neq b$	$h_c = \left(\frac{Q^2}{gbB} \right)^{1/3}$
$\neq 0$	$\neq b$	$(h_c - a)^2 \cdot h_c = \frac{Q^2}{gbB}$

Para una sección que no posee ninguna singularidad se obtiene la expresión clásica de la altura crítica (h_{cp}). Para una sección con ensanche pero sin grada esta altura crítica resulta ser el medio geométrico entre las alturas críticas de la sección de aguas arriba y la sección de aguas abajo. El caso con grada obliga a resolver una ecuación cúbica.

Si se adimensionaliza h_c en función de la altura crítica de aguas abajo $h_{c2} = \left(\frac{Q^2}{gb^2} \right)^{1/3}$, la expresión más general de la Tabla 1 se reduce a

$$(x - k)^2 x = n \quad (7)$$

donde $x' = h_c' / h_{c2}$ $k = a / h_{c2}$ $n = B / b$

Se postula que este valor de h_c' , que corresponde a la condición de Momenta mínima a plomo de la singularidad, corresponde al límite entre napa superficial con un resalto de ondas en superficie respecto a napa sumergida, que corresponde a un resalto incompleto; es decir, si la Momenta del río de aguas abajo es superior a la Momenta mínima en la singularidad, existe solución para el problema y la napa es superficial. En caso contrario, la napa se sumerge generando un resalto incompleto que podrá llegar a ser rechazado si la Momenta de aguas abajo continúa disminuyendo.

En la figura 2 se comparan los valores de la altura crítica o umbral al pie de la grada dados por la ecuación (7) con valores experimentales obtenidos por diferentes autores (4,5) y presentados por en el libro “Hidráulica” de F. J. Domínguez (FJD), para el caso de gradas sin ensanche ($n=1$).

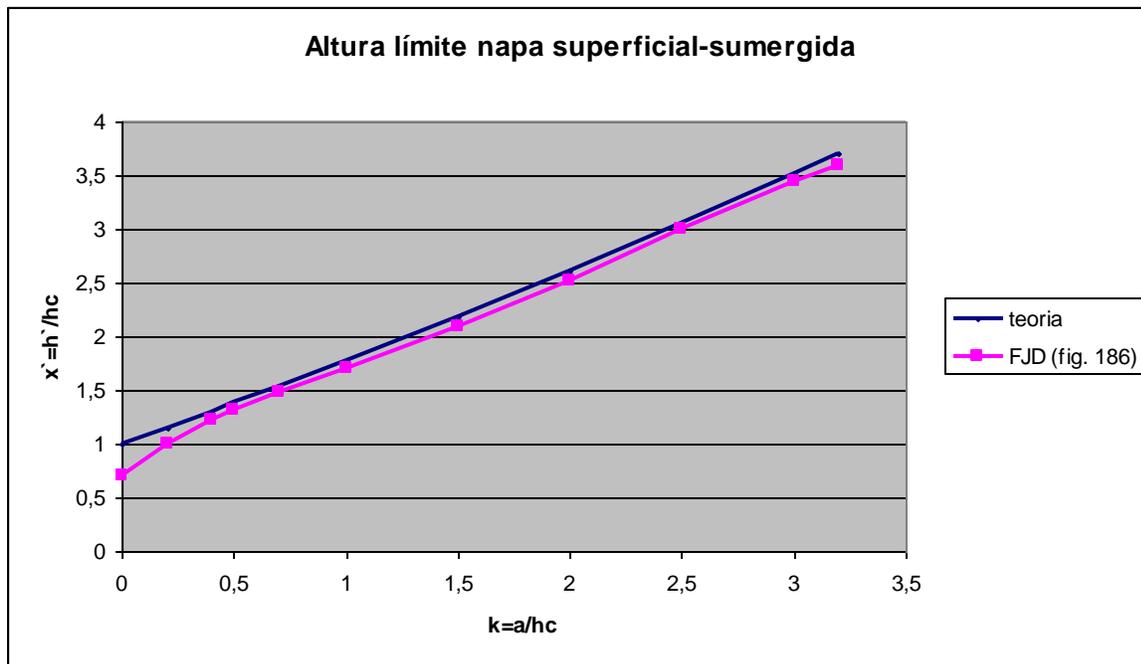


Figura 2 Altura límite entre napa superficial y napa sumergida.

Se observa una muy buena concordancia, mostrando los valores teóricos un exceso del orden del 3 al 4% respecto a los experimentales, excepto para gradas de muy pequeña altura donde la lectura de los ábacos experimentales se hace muy incierta.

Conocido el valor crítico o límite al pie de la grada, igualando Momenta, es posible obtener el valor límite del río aguas abajo mediante la ecuación adimensionalizada,

$$\frac{1}{m(x_c' - k)} + \frac{1}{2} x_c'^2 = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{2} x_2^2 \quad (8)$$

donde $x_2 = h_2 / h_{c2}$, siendo h_2 la altura del río aguas abajo que fija el límite entre napa superficial y napa sumergida.

En la figura 3 se comparan los valores teóricos de la altura h_2 límite resultante de la teoría, con los valores experimentales presentados por FJD para el caso de gradas sin ensanche ($n=1$).

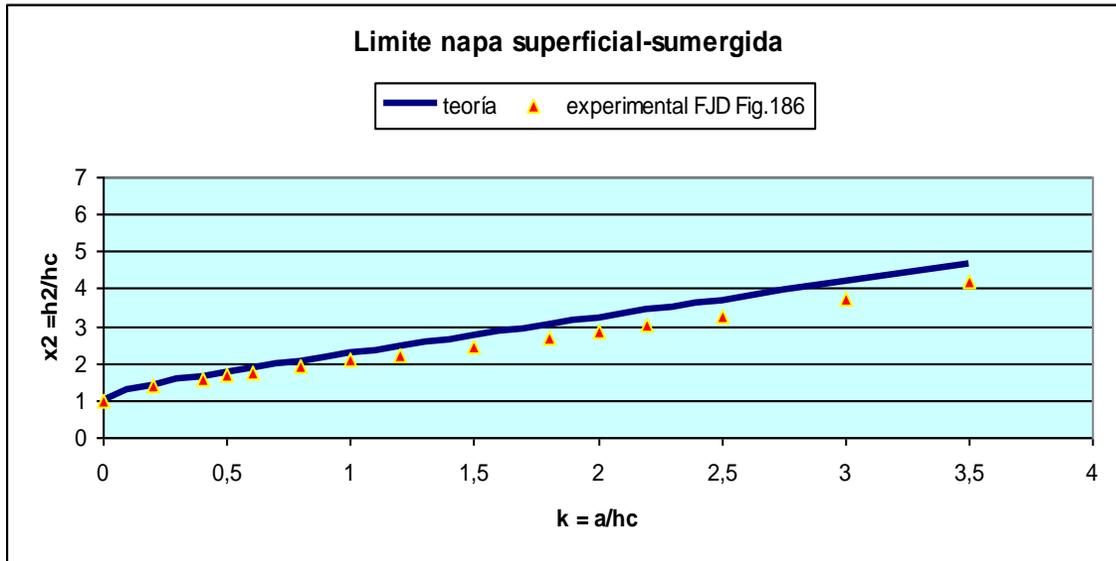


Figura 3 Altura de aguas abajo límite entre napa superficial y sumergida.

En este caso, las diferencias resultan algo mayores, dando la teoría errores crecientes con la altura de la grada, entre un 4 y un 12%.

En ambos casos, los errores se atribuyen al no cumplimiento de las hipótesis de filetes paralelos y distribución hidrostática de presiones, por lo que se intenta introducir estos factores en la ecuación de la Momenta.

2.3.- Ecuación de Momenta generalizada.

La curvatura que experimentan las líneas de flujo debido a la presencia de un ensanchamiento brusco son de la forma cóncava hacia abajo. Este efecto interfiere en los dos términos que posee la función Momenta de la sección transversal.

En el siguiente esquema se muestra el ángulo de curvatura de las líneas de flujo indicando la diferencia entre un área que es perpendicular al flujo y otra que es perpendicular al fondo del canal

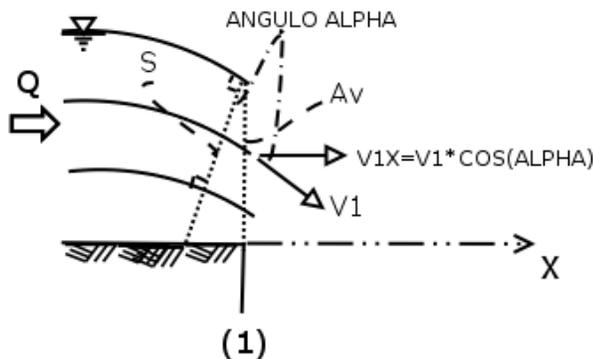


Figura 4: Esquema de la curvatura de las líneas de flujo.

Para obtener el primer término de la Momenta en la sección de estudio, se adoptaron los siguientes supuestos y valores:

- 1) La velocidad del flujo en la dirección de análisis es $V_{1x} = V_1 \cdot \cos \alpha$.
- 2) La velocidad del flujo es $V_1 = \frac{Q}{S}$.
- 3) S y A_v se relacionan de la siguiente manera: $S = \frac{A_v}{\cos \alpha}$.

Haciendo uso de las consideraciones descritas en el párrafo anterior y del primer término de la **Ecuación 5**, se obtiene la siguiente expresión:

$$\text{Fuerza de Momentum} = \frac{\beta \cdot Q^2}{g \cdot S^2} \cdot A_v = \frac{\beta \cdot Q^2}{g \cdot A_v} \cdot (\cos \alpha)^2 \quad (9)$$

Por otra parte, la distribución no hidrostática de presiones se puede considerar introduciendo un factor de corrección ξ al término de las fuerzas de presión, con una expresión del tipo

$$F_{np} = \xi \cdot F_p = \xi \cdot \frac{1}{2} \cdot h^2 \quad (10)$$

Con esto, la Momenta en la singularidad se representa por la expresión,

$$M_1 = \beta \cdot \frac{Q^2 \cdot (\cos \alpha)^2}{g \cdot [(h - a) \cdot b]} + \xi \cdot \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot B \quad (11)$$

Derivando la ecuación 11 se obtienen las ecuaciones de la nueva altura crítica o umbral para diferentes escenarios, que se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 2 Ecuaciones de la h_c , para distintos escenarios.

A	B	B	$\cos(\alpha)$	ξ	Ecuación
0	b	1	1	1	$h_c = \left(\frac{Q^2}{g b^2} \right)^{1/3} = h_{cp}$
$\neq 0$	b	1	1	1	$(h_c - a)^2 \cdot h_c = \frac{Q^2}{g b^2}$
$\neq 0$	b	$\neq 1$	$\neq 1$	$\neq 1$	$(h_c - a)^2 \cdot h_c = \frac{\beta \cdot (\cos \alpha)^2 Q^2}{\xi g b^2}$
$\neq 0$	$\neq b$	1	1	1	$(h_c - a)^2 \cdot h_c = \frac{Q^2}{g b B}$

Para evaluar los valores de los factores correctivos, se intentaron los siguientes criterios:

- i) Para el coeficiente de Boussinesq se adoptó un valor promedio constante $\beta = 1.05$ recomendado en la literatura. (Ven Te Chow, 2004)
- ii) Suponiendo un valor de $\xi = 1$, se ajustó un modelo geométrico para el ángulo α suponiendo filetes con trayectoria circular según se indica en el siguiente esquema:

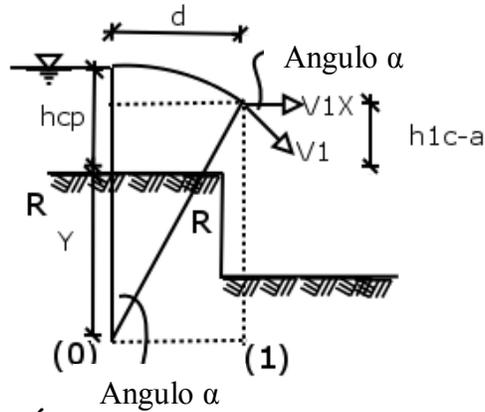


Figura 5: Ángulo de curvatura de las líneas de flujo.

La variable “d” es la distancia a la cual se obtiene el valor de la altura crítica con filetes paralelos. Geométricamente se obtiene para $\cos \alpha$ la siguiente expresión:

$$\cos \alpha = \frac{D^2 - [(X_1 - K) - 1]^2}{D^2 + [(X_1 - K) - 1]^2} \quad (12)$$

donde $D = d/hc_2$

D varía en teoría en función de la altura de la grada y la condición de aguas abajo, es decir, según la aceleración del flujo. En ausencia de mayor información se adopta un valor igual a 1.5 recomendado por F. J. Domínguez (1999).

iii) Establecimiento de una relación correctiva analítica para el factor $\cos^2 \alpha / \xi$ que acomode la teoría a la evidencia experimental. Se determinó el valor requerido para $\cos \alpha$, para compatibilizar la expresión teórica con los valores experimentales, obteniéndose los siguientes resultados en función de x_2 o k, según cual sea la variable conocida:

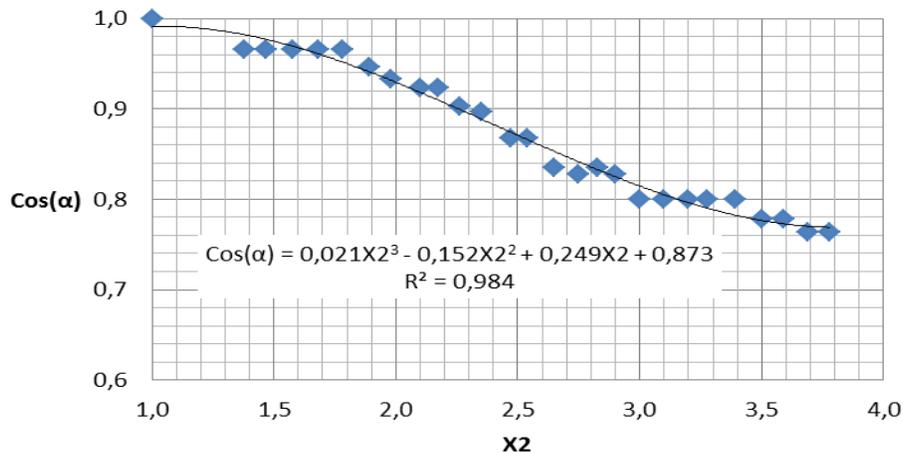


Figura 6: Ajuste del Ángulo de Curvatura de las Líneas de Flujo Versus la Condición de Aguas Abajo.

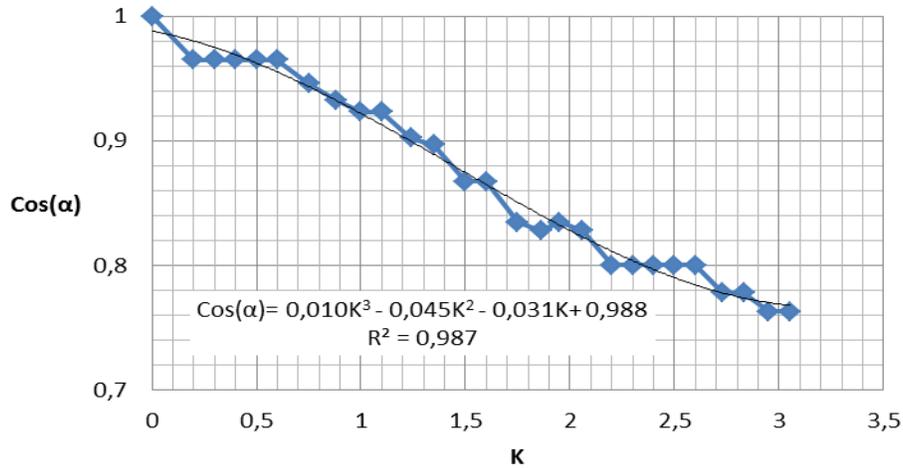


Figura 7: Ajuste del Ángulo de Curvatura de las Líneas de Flujo Versus La Altura de la Grada.

2.4.- Comparación con datos experimentales

A continuación se presentan los resultados obtenidos, para las tres expresiones del ángulo de curvatura de las líneas de flujo ($\text{Cos}(\alpha)$).

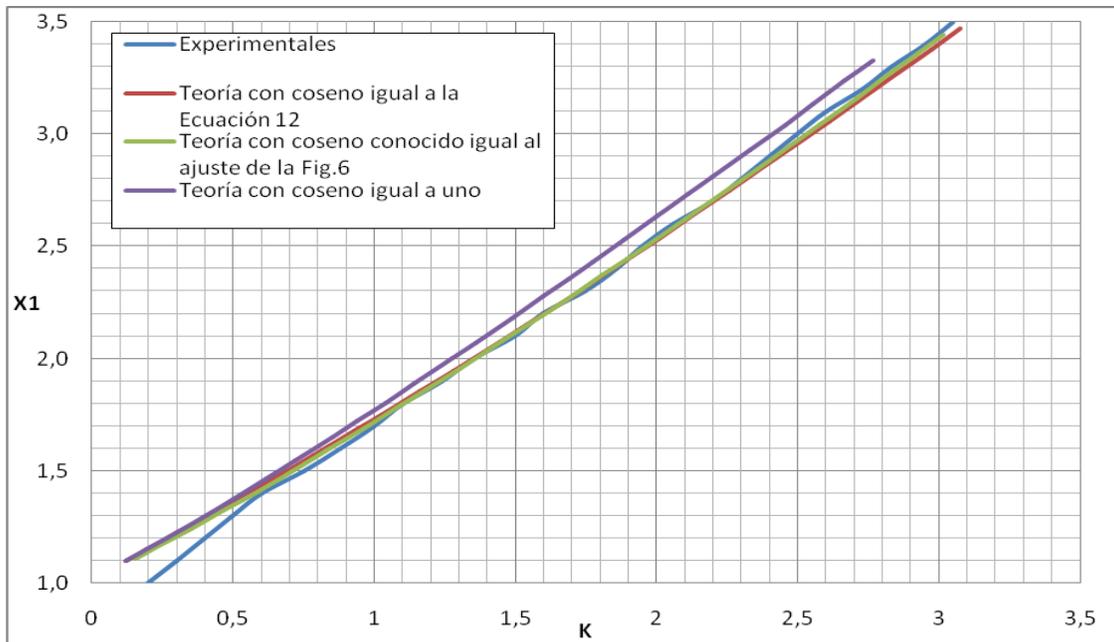


Figura 8: Comparación Teórica – Experimental de las variables K y X_1 .

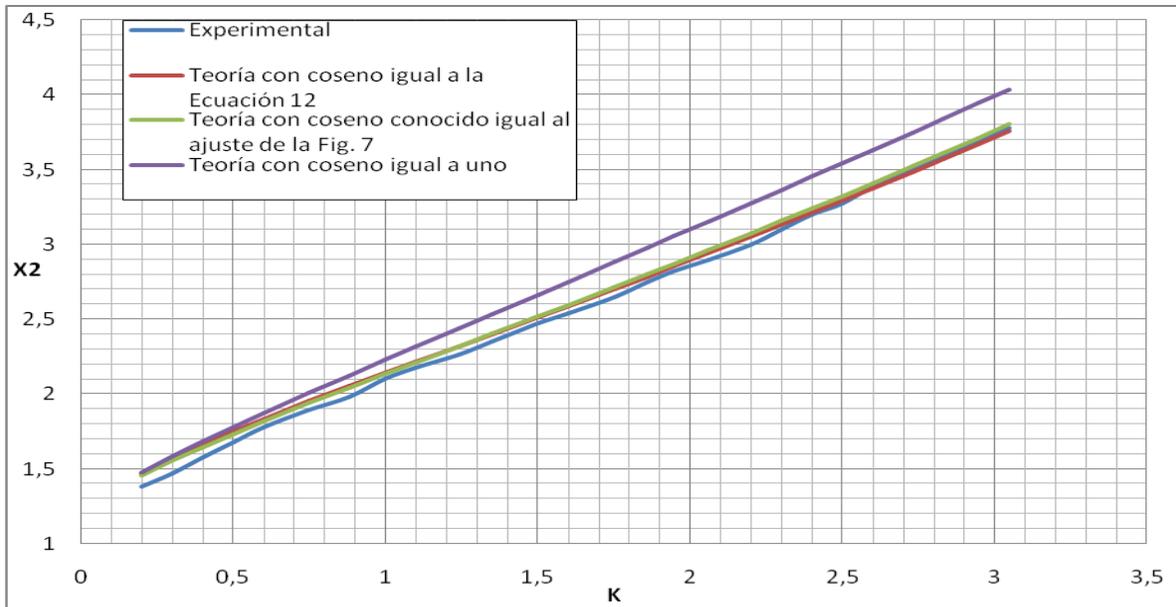


Figura 9: Comparación Teórica – Experimental de la variable X_2 .

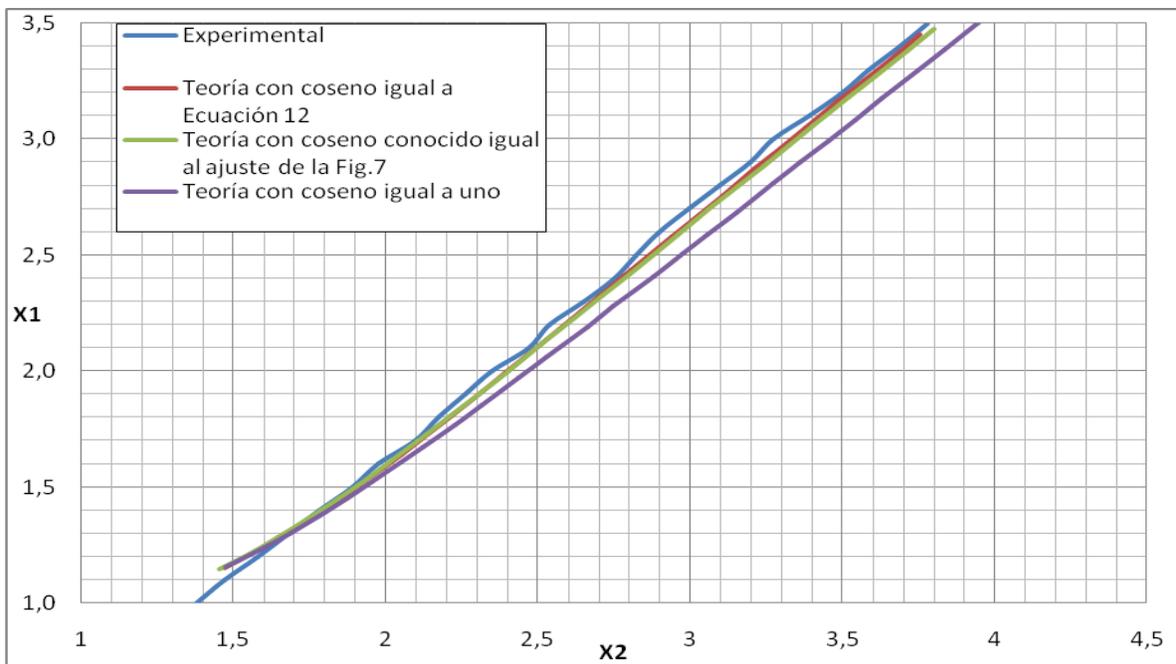


Figura 10: Comparación Teórica – Experimental de la variable X_2 vs X_1 .

Observando los resultados anteriores se comprueba que el uso de la nueva altura crítica en la constancia de la función Momenta genera una muy buena aproximación de lo que ocurre en la realidad, para todos los modelos utilizados.

2.5.- Canal con variación de la cota de fondo y de sus paredes laterales ($a \neq 0 \wedge B > b$).

Se incorporó esta situación en el análisis con el fin de validar la teoría propuesta para el caso general de ensanchamientos bruscos. Debido a la falta de información experimental, fue necesario generar valores experimentales que fueron obtenidos en el Laboratorio de Termo -

Fluidos de la U.T.F.S.M, para el caso de un ensanchamiento de paredes laterales igual a $n = \frac{B}{b} = 3$. (Celis, 2009)

Para estimar los factores de corrección y recordando que la relación entre las alturas críticas de aguas arriba y aguas abajo se relacionan según la ecuación

$$h_{cp0} = \left(\frac{B}{b}\right)^{2/3} \cdot h_{cp2} \quad (13)$$

el modelo geométrico para estimar el ángulo α resulta

$$\cos \alpha = \frac{D^2 - [(X_1 - K) - n^{2/3}]^2}{D^2 + [(X_1 - K) - n^{2/3}]^2} \quad (14)$$

En cuanto al ajuste de los valores teóricos con los experimentales, las relaciones resultantes se presentan en los siguientes gráficos:

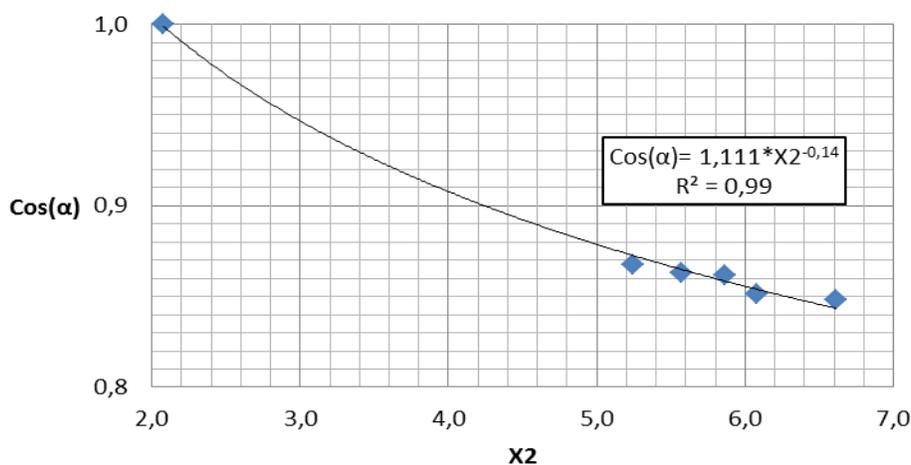


Figura 11: Ajuste del Ángulo de Curvatura de las Líneas de Flujo Versus la Condición de Aguas Abajo para $n = 3$.

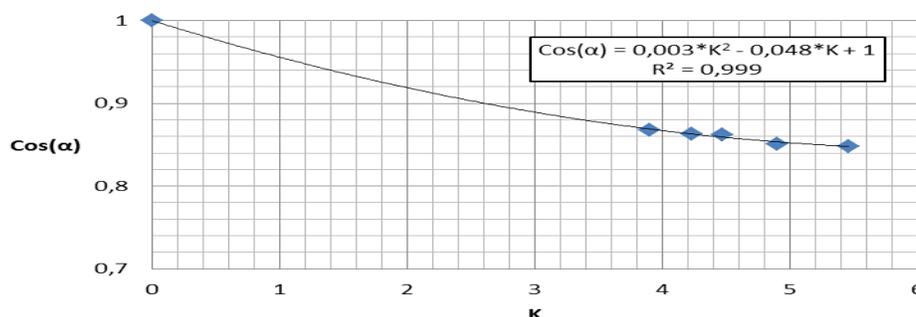


Figura 12: Ajuste del Ángulo de Curvatura de las Líneas de Flujo Versus La Altura de la Grada para $n = 3$.

A continuación se procederá a comparar los valores obtenidos mediante el análisis presentado en este ítem con los valores experimentales indicados anteriormente.

El canal utilizado para generar los valores experimentales no poseía el largo necesario para que la condición de aguas abajo se desarrollara completamente, por lo que no fue posible medir con la precisión necesaria la variable X_2 .

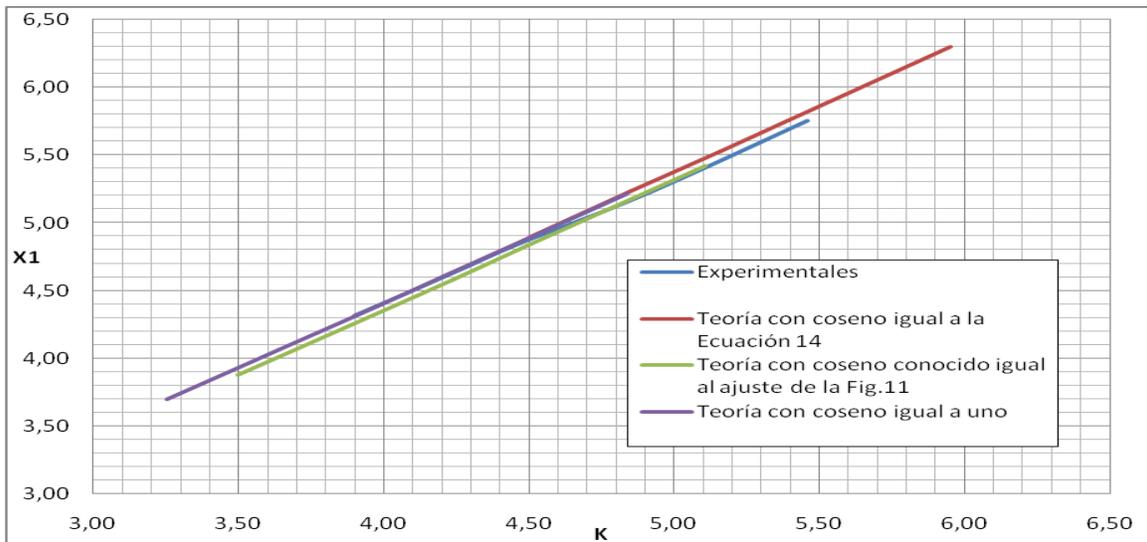


Figura 13: Comparación Teórica – Experimental de las variables K y X_1 para $n = 3$.

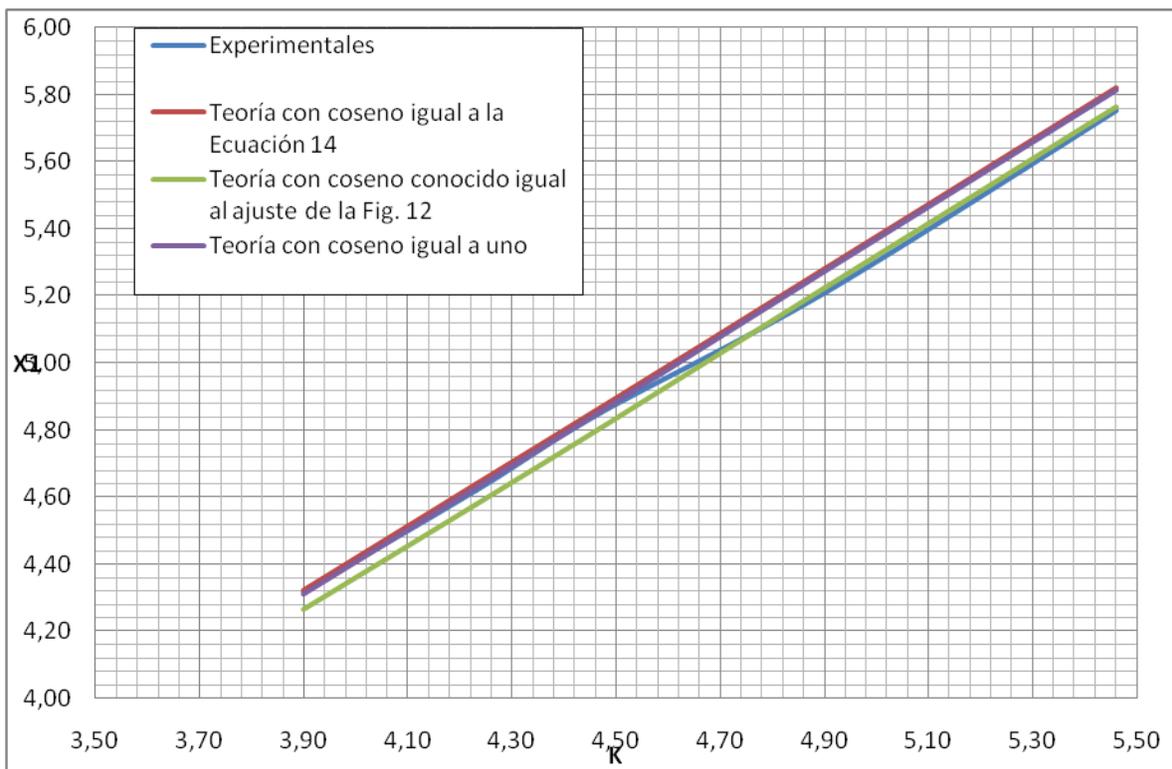


Figura 14: Comparación Teórica – Experimental de las variables K y X_1 para $n = 3$.

De los resultados obtenidos se observa nuevamente un muy buen ajuste entre la teoría y la realidad, con errores del orden del 1% incluso en el caso de postular filetes horizontales y paralelos y distribución hidrostática de presiones, esto porque al producirse un ensanche además de la grada, los términos en que la curvatura de filetes interviene van perdiendo preponderancia.

3. CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos se pueden plantear las siguientes conclusiones:

- 1) Se comprueba que el uso de la nueva altura crítica basada en la ocurrencia de una Momenta mínima, genera una muy buena aproximación de lo que ocurre en la realidad, para estimar el límite entre napa superficial y napa sumergida en la singularidad provocada por una grada de bajada con o sin ensanche basal, corrigiendo por un factor que corrija por la curvatura de filetes.
- 2) Incluso en el caso que incluye ensanches basales, lo anterior es válido aun si no se considera la curvatura de las líneas de flujo.
- 3) La expresión del $\cos(\alpha)$ que arroja los mejores resultados es la corrección de los valores teóricos en función de los valores experimentales, lo que era de esperarse. Sin embargo no está demostrada la validez universal de dicha corrección.
- 4) Como alternativa a lo anterior, el modelo geométrico para estimar el ángulo de curvatura entrega igualmente resultados con casi la misma precisión.
- 5) Además, se recomienda ingresar en esta teoría la variable K como variable conocida, debido a que genera una mejor representación de lo que ocurre realmente.
- 6) En caso de utilizar esta teoría para otra relación de n se recomienda utilizar la condición sin incorporar la curvatura de las líneas de flujo ($\cos(\alpha) = 1$) debido a que es más fácil de utilizar, no se necesita información experimental y entrega resultados con poco error.

REFERENCIAS

1. **Celis Felipe**, (2009), “Análisis teórico de los ejes hidráulicos límites en un Canal con Grada de Bajada”, Memoria para Optar al Título de Ingeniero Civil, Universidad Federico Santa María, Valparaíso.
2. **Dominguez, G. y H. Lambeth**.(1963) “*Altura a plomo de una caída*”, Tesis de Título, Universidad de Chile, Santiago
3. **Dominguez, Francisco Javier**. (1999) “*Hidraulica*”, Editorial Universitaria, Santiago.
4. **Millán, A. y J. Anwandter**.(1955), “*Canales con grada y napa al pie*”, U. de Chile, [aut. libro] F. J. Dominguez. “*Hidraulica*”. Santiago : s.n., 1999.
5. **Rand, Walter**,(1955),”*Flow geometry at straight drop Spillways.*” 791, s.l. : A.S.C.E., 1955, Vol. 81.
6. **Te Chow, Ven**.(2004), ”*Hidraulica de Canales Abiertos*”. s.l. : Mc Graw - Hill, 2004.
7. **White, M. P**.(1943), “*Energy Loss at the base of a Free Overfalls.* : A.S.C.E., 1943,