

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

XX CONGRESO CHILENO DE HIDRAULICA

DESCARGAS PUNTUALES DE FLUJOS NO-NEWTONIANOS EN PLANOS INCLINADOS

CHRISTIAN F. IHLE^{1,2}
ALDO TAMBURRINO^{1,3}
FABIÁN VALENZUELA⁴

RESUMEN

En el presente trabajo se estudia algunas características de la descarga sobre planos inclinados de flujos de mezclas hiperconcentradas. A diferencia de los flujos en canales, en este caso, no hay escalas de longitud externas que controlen la dinámica de flujo. Estos flujos se ordenan espacialmente según sus propiedades reológicas y la inclinación del plano de flujo. Para conocer aspectos específicos de este proceso, se ha realizado una serie de experimentos con preparaciones de bentonita a distintas concentraciones, con una variedad de inclinaciones. Para condiciones de flujo prescritas, se observa que estos lodos escurren como flujos delgados y tienden a expandirse hasta un cierto límite. Por otro lado, se encuentra que para ciertas condiciones críticas, se forman ondas rodantes. Se propone una formulación adimensional para describir condiciones de escurrimiento locales.

¹Investigador Asociado, Advanced Mining Technology Center, Universidad de Chile

²Instructor Adjunto, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile – mail: cihle@ing.uchile.cl

³Profesor Asociado, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile – mail: atamburr@ing.uchile.cl

⁴Estudiante Memorista, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile

1. INTRODUCCIÓN

Los flujos de mezclas sólido-líquido con esfuerzo de fluencia son ampliamente encontrados en una serie de entornos naturales, industriales y tecnológicos. Cuando se trata de mezclas a una alta concentración, es frecuente que estos flujos, sean laminares (Wan y Wang 1994, Coussot, 1997). A pesar de ello, la descripción de los mismos tiene una riqueza de fenómenos, incluyendo la presencia de zonas con comportamiento tipo sólido en coexistencia con otras donde el fluido se encuentra completamente deformado. Por otra parte, a concentraciones altas, más específicamente cuando el espacio entre las partículas es del orden del radio de las mismas, la interacción entre estas cambia, dando lugar a comportamientos dependientes del tiempo que condicionan las propiedades reológicas y la dinámica general de organización de las partículas, por medio de mecanismos de segregación hidrodinámica (Stickel y Powell 2005). En particular, este tipo de mezcla se encuentra en fluidos de interés en la minería chilena, tales como relaves espesados y concentrados, incluyendo cobre, hierro y bauxita. En varias clases de este tipo de mezcla se emplean el modelo de Herschel-Bulkey para conmensurar la relación esfuerzo-deformación. En una dimensión, la relación esfuerzo-deformación se puede escribir como

$$\tau_{xy} = \tau_0 + K\dot{\gamma}^n, \quad (1)$$

donde τ y $\dot{\gamma}$ son el esfuerzo de corte y la tasa de deformación del fluido. Por otro lado, τ_0 es el esfuerzo de fluencia, K es el coeficiente de consistencia y n es el índice de flujo. Para el caso de fluidos newtonianos, $\tau_0 = 0$ y $n = 1$. Cuando el esfuerzo de fluencia es distinto de cero y $n = 1$ el coeficiente K tiene unidades de viscosidad dinámica y el fluido se denomina plástico de Bingham. La presencia de un esfuerzo de fluencia no nulo puede tener implicancias significativas en la dinámica de flujo, ya que induce la generación de una zona que se desplaza con el resto del fluido como si se tratara de un sólido. En el caso de flujos con superficie libre muy anchos, corresponde en general a la zona aladaña a la superficie libre (Hulme 1974), mientras que en flujos confinados tipo Poiseuille (inducidos por diferencias de presión), la zona sin deformar, influida por la existencia de un esfuerzo de fluencia, se encuentra en una zona central, cuya forma depende de la curvatura de las paredes de la tubería. En el caso de descargas sin confinamiento lateral, existe además un efecto del esfuerzo de fluencia en el máximo ancho que alcanza el flujo. Cuando los fluidos son Newtonianos, el único mecanismo físico que se opone al incremento del ancho de la corriente de densidad es la tensión superficial. Despreciando este efecto, lejos de la fuente, si el avance de un flujo no confinado con aporte de masa constante es creciente en el tiempo tanto en el ancho como en la coordenada que apunta hacia aguas abajo (Lister 1992). En el presente artículo se formula y justifica el problema de la descarga de un plástico de Bingham en un plano inclinado con un conjunto de simplificaciones. Además se presenta el resultado de una serie de mediciones experimentales para comparar, a la luz de números adimensionales de uso común, el escurrimiento de este tipo de lodos con descargas puramente viscosas.

2. ESCURRIMIENTO NO CONFINADO DE PLÁSTICOS DE BINGHAM

El escurrimiento no confinado de plásticos de Bingham representa una buena aproximación a una serie de flujos observables en la naturaleza (Bird 1976). Sin embargo, la presencia de un esfuerzo de fluencia agrega complejidad a su estudio debido al comportamiento dual que debe ser modelado. A diferencia del caso de flujos en canales, en este caso el ancho del escurrimiento no es constante ni impuesto por restricciones externas, por lo que su forma está exclusivamente condicionada por el balance tridimensional momentum. En el caso de flujos mucho más largos que anchos y altos, como es el caso de descargas de lava en laderas de volcanes o relaves en muros de tranques, el problema se puede formular desde la perspectiva de teoría de lubricación. Considérese un plano inclinado de ángulo θ medido desde la horizontal como el que se muestra en la Figura 1. En éste, (u,v,w) son las componentes de la velocidad en los ejes (x,y,z) , respectivamente.

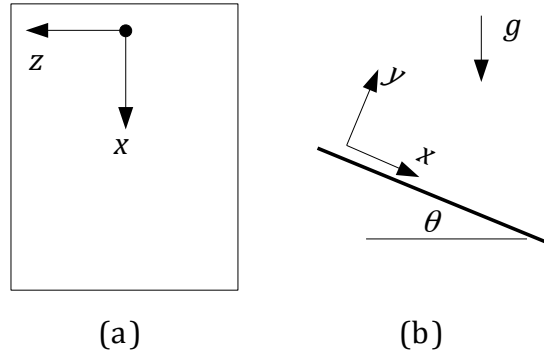


Figura 1: Sistema de coordenadas en plano inclinado. (a) Vista superior. (b) Elevación. El lodo se descarga en la dirección positiva del eje x .

En términos del sistema de coordenadas del plano inclinado mostrado, las ecuaciones de momentum en régimen permanente y continuidad corresponden a:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \theta + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \theta + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (3)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

en que g es la magnitud de la aceleración de gravedad y ρ es la densidad del fluido. τ_{ij} es la componente ij del tensor de esfuerzos ($i, j = 1, 2, 3$ representando las componentes x, y, z , respectivamente) y p es la presión. Para el caso de un fluido de Bingham, esta se expresa, empleando notación tensorial, de la siguiente forma (Bird 1987):

$$e_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad II_T^{1/2} < \tau_0 \quad (6)$$

$$\tau_{ij} = e_{ij} \left(2\mu + \frac{\tau_0}{II_E^{1/2}} \right) \quad \text{si} \quad II_T^{1/2} > \tau_0, \quad (7)$$

con

$$II_T^{1/2} = \frac{1}{2} [\tau_{ij}\tau_{ij} - (\tau_{kk})^2] \quad (8)$$

$$II_E^{1/2} = \frac{1}{2} [e_{ij}e_{ij} - (e_{kk})^2]. \quad (9)$$

II_T y II_E corresponden al segundo invariante del tensor de esfuerzos viscosos (τ_{ij}), y de deformación (e_{ij}), respectivamente. e_{ij} está definido como

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right), \quad (10)$$

en que q_i es la componente i del vector de velocidad. En general, se supone que los términos de esfuerzos viscosos y de fluencia son del mismo orden.

Para efectos de la presente configuración, se supone que el escurrimiento es mucho más largo que ancho y alto. Si L , Z y δ son escalas típicas asociadas estas dimensiones, se supone que $L \gg Z \gg \delta$, respectivamente. Si U es una escala de velocidad de escurrimiento aguas abajo del plano inclinado, se deduce de la ecuación de continuidad, que las velocidades en las direcciones y y z deben ser mucho menores que la velocidad en el eje x . En particular, Si V y W son escalas de velocidad en las direcciones y y z , respectivamente, entonces se tiene que $V \sim U\delta/L$ y $W \sim UZ/L$, de donde se concluye que $U \gg W \gg V$. En particular, la expresión (9) se puede simplificar considerablemente en esta configuración de flujo notando, en virtud de las escalas anteriores, que

$$II_E \approx \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (11)$$

Con esto, se tiene que, cuando $II_T^{1/2} > \tau_0$:

$$\tau_{xx} \approx 2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\mu + \frac{\tau_0}{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} \right) \quad (12)$$

$$\tau_{yy} \approx 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(\mu + \frac{\tau_0}{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} \right) \quad (13)$$

$$\tau_{zz} \approx 2 \frac{\partial w}{\partial z} \left(\mu + \frac{\tau_0}{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} \right) \quad (14)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \approx \frac{\partial u}{\partial y} \left(\mu + \frac{\tau_0}{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} \right) \quad (15)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \approx \frac{\partial u}{\partial z} \left(\mu + \frac{\tau_0}{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} \right) \quad (16)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \approx \frac{\partial w}{\partial y} \left(\mu + \frac{\tau_0}{\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|} \right) \quad (17)$$

y $e_{ij} = 0$ cuando $II_T^{1/2} < \tau_0$.

En particular, para cada uno de los términos de la divergencia de las componentes direccionales del tensor de esfuerzos, estas escalas implican, para las componentes x, y, z de las ecuaciones de momentum que:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \gg \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \gg \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \sim \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \sim \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial y} \gg \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \sim \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (20)$$

Las relaciones (18) y (20) permiten descartar cuatro términos del tensor de esfuerzos. Sin embargo, los términos en (19) son del mismo orden. Estos términos no son despreciables en (3) si se tornan del orden de la componente de la fuerza de gravedad paralela al plano de escurrimiento. Por ejemplo, considerando $L \sim 1$ m, y esfuerzos viscosos (del mismo orden que el esfuerzo de fluencia) tales que $\delta \sim 1$ cm, $\mu \sim 10$ mPa·s, $U \sim 1$ cm/s, entonces los términos que involucran la ley constitutiva del fluido son del orden de $\mu U / L \delta \sim 10^{-2}$ Pa. Por otro lado, suponiendo que la densidad del fluido es del orden de los $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, se tiene que estos esfuerzos son comparables con el segundo término del lado derecho de (3) siempre y cuando θ es tal que $\cos \theta \sim 10^{-6}$, lo que requiere que el plano sea prácticamente vertical. En consecuencia, para la mayoría de las condiciones de escurrimiento viscoso observables en entornos naturales e industriales es posible despreciar los tres términos del lado derecho de (3).

Por otro lado, en general los escurrimientos viscosos son laminares, lo que implica que es razonable despreciar el lado izquierdo de las ecuaciones (2)-(4) frente a su lado derecho. Considerando como ejemplo las escalas mencionadas para el caso del eje x , correspondiente a la componente principal de la velocidad, se tiene que cada uno de los términos advectivos son del orden de $\rho U^2 / L$, lo que será conmensurable con el término del lado izquierdo de (18) para una viscosidad del orden de $1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$, correspondiente

aproximadamente con la del agua. Para espesores de escurrimiento menores, viscosidades o distancias de flujo mayores, los términos advectivos pueden ser despreciados. Con este conjunto de suposiciones se obtiene el siguiente conjunto simplificado de ecuaciones (Coussot y Proust 1996, Osmond y Griffiths 2001):

$$0 = \rho g \sin \theta - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (21)$$

$$0 = -\rho g \cos \theta - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (22)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad (23)$$

En particular, a la luz de esta aproximación, resulta que la componente de velocidad v , normal al plano $y=0$, es despreciable frente a las componentes lateral (w) y principal (u). Las condiciones de borde para estas ecuaciones son de no deslizamiento en la superficie del plano y superficie libre.

$$(u, w) = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \quad (24)$$

$$(-p\mathbf{I} + \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{para} \quad y = h(x, z), \quad (25)$$

donde \mathbf{I} y \mathbf{T} son los tensores identidad y de esfuerzos, respectivamente. \mathbf{n} es la normal exterior a la superficie definida por la corriente de densidad y h corresponde a la superficie de este flujo no confinado. En general, si se impone un caudal constante Q en la descarga, es conveniente expresar el la ecuación de continuidad en términos de Q a través del teorema de la divergencia. Para el caso simple de una descarga en el origen, paralela al eje x , centrada en $z=0$, basta considerar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \iint u dy dz = Q. \quad (26)$$

El sistema de ecuaciones (21)-(23) puede ser expresado en términos de la posición de la superficie libre $h(x,z)$. Integrando la presión en (22) entre h e y usando la condición de borde (25) se obtiene:

$$p = (h - y)\rho g \cos \theta + \hat{p}(x, z), \quad (27)$$

en que \hat{p} es la componente no hidrostática de la presión. Introduciendo (27) en (21) y (23) resulta el siguiente sistema de ecuaciones promediadas en la vertical:

$$0 = \rho g \cos \theta \left(\tan \theta - \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (28)$$

$$0 = -\rho g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad (29)$$

Respecto de h , se puede afirmar que por simetría es horizontal en $z=0$. Siendo además la descarga en este mismo eje, se puede afirmar que es máxima ahí. Por simetría también,

$w=0$ en este plano. Por otro lado, de (29) se tiene que la presión es del orden de $\mu UZ/\delta L$. Empleando esta relación en (28), se concluye que, en términos prácticos, la pendiente de la superficie libre a lo largo del eje x puede ser mucho mayor que la pendiente del plano solamente si éste es vertical. Si, por el contrario, la pendiente del plano $y=0$ es mucho mayor que $\partial h/\partial x$, entonces $\partial \hat{p}/\partial x$ puede ser despreciado a menos que $\theta \approx 0$. Con estas suposiciones, puede omitirse el término $\partial h/\partial x$ y $\partial \hat{p}/\partial x$ en una amplia variedad de flujos no confinados lentos (Coussot y Proust 1996).

La resolución de del sistema (27)-(29) con sus respectivas condiciones de borde puede ser realizada numéricamente (Wilson y Burgess 1998). Dentro de los requerimientos de la resolución está la necesidad de identificar la zona donde los esfuerzos están por debajo del de fluencia, marcando una transición entre fluido deformado e indeformado, lo que define distintas formas del perfil de velocidad y , consecuentemente, modifica la altura h respecto de una situación de escurrimiento de un fluido Newtoniano viscoso. En particular, (29), que representa el equilibrio de fuerzas en la dirección z , da cuenta de la importancia de los términos $\partial u/\partial y$ y $\partial w/\partial y$, según se expresa en (17), en el balance de fuerzas del sistema que limita el ancho del flujo. Si el flujo fuera bidimensional (infinitamente ancho), entonces (29) desaparece y la velocidad resulta uniforme (ej. Huang y García 1997). Integrando (28) para el caso flujo bidimensional y uniforme se obtiene:

$$\text{Fr}^2 = \frac{\text{Re} \sin \theta}{3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{h_0}{h} + \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{h} \right)^3 \right], \quad (30)$$

donde el número de Froude, Fr , se define a partir de la velocidad media como $\bar{U}/(gH)^{1/2}$ y el número de Reynolds, $\text{Re} = \rho \bar{U} H / \eta$. Por otro lado, $h_0 = \tau_0 / \rho g \sin \theta$ corresponde a la mínima profundidad requerida para que pueda haber escurrimiento. Se obtiene como resultado de un balance estático de fuerzas en el plano inclinado. De esta expresión se obtiene en particular el conocido resultado para fluidos newtonianos ($h_0 = 0$). La expresión (30) refleja que cuando el escurrimiento es bidimensional y uniforme, rige un balance dinámico que relaciona ambos números. Cuando la reología es no newtoniana, sin embargo, aparecen términos que están relacionados con el esfuerzo de fluencia. Es común representar la importancia relativa de éste respecto de los esfuerzos viscosos a través del número de Bingham, $B = \tau_0 H / \eta U$. Reemplazando la viscosidad por una *equivalente*, definida a partir del componente xy de la ley constitutiva del fluido (15) como:

$$\eta_e = \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-1}, \quad (31)$$

es posible re-escribir el balance Froude-Reynolds incluyendo el efecto del esfuerzo de fluencia de la siguiente manera:

$$\frac{\text{Fr}^2}{\sin \theta} \sim \frac{\text{Re}}{1 + B}, \quad (32)$$

Una versión similar de esta definición ha sido utilizada por Haldenwang y otros (Masalova et al. 2006, Haldenwang y Slatter 2006, Burger et al. 2010). En el caso de una descarga puntual, hay un cambio gradual en el ancho producto de la existencia de un gradiente transversal de presiones, por lo que no es claro que una relación de escalas como (32) sea aplicable. Para conocer un poco más sobre qué tan viable es el uso de este tipo de escala simplificada en la descripción de flujos lentos y delgados con esfuerzo de fluencia, se ha realizado una serie de experimentos, que se describe a continuación.

3. MEDICIONES EXPERIMENTALES

Generalidades

Para reproducir el comportamiento de un lodo con una ley constitutiva parecida a la de Bingham se ha decidido emplear bentonita, una arcilla que posee una estructura cristalina con partículas con forma de placas, uno de cuyos atributos principales es su potencial para generar mezclas con una alta viscosidad debido a su alta capacidad de absorción de agua (Besq *et al.* 2003). Así, con bajas concentraciones de mezcla (inferiores al 10% en peso) es posible generar mezclas con viscosidades varias veces superior a la del agua. El tamaño medio en este tipo de mezclas es del orden del 10 μm , lo que hace que la sedimentación de partículas sea un fenómeno irrelevante en la escala de tiempo tanto de las mediciones de propiedades reológicas como de flujo de las mismas. En el presente estudio se ha considerado mezclas bentonita-agua con concentraciones en peso iguales a 4%, 6%, 8%, 8% y 10%, respectivamente. Se ha descargado estas mezclas, con flujo constante, en planos inclinados con pendientes de 20%, 35%, 50% y 65%, respectivamente. Para ello se ha empleado un estanque de carga constante provisto de un rebalse, con una válvula de paso en el fondo. Para la serie de experimentos descrita en el presente trabajo, se ha utilizado caudales de entre $2 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ y $1.4 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. En general se condiciones de flujo permanentes por la vía de la recirculación de los lodos, efectuada con una bomba centrífuga. Todas las mediciones fueron realizadas en esta condición o en su defecto en condiciones de flujo estacionarias, donde se encontró la aparición de ondas rodantes. Las mediciones fueron realizadas en el plano central de flujo, procurando medir a las distancias más lejanas posibles del punto de descarga. En general, se obtuvo datos de velocidad y altura de escurrimiento a una distancia de 150 cm aguas abajo del punto de descarga. Para determinar alturas se midió el desplazamiento aparente de planos láser colimados proyectados en diagonal sobre la superficie de escurrimiento. Por otro lado, se tomó fotografías de la formas del escurrimiento en estado permanente para los distintos casos desde un punto de vista localizado 3 metros sobre la mesa de medición. La curvatura del flujo en planos transversales (yz) no pudo ser detectada con la técnica referida. En todos los casos, resultó ser muy pequeña. En los casos de flujo estable, se midió alturas de escurrimiento del orden de 1 cm, mientras que donde aparecieron ondas rodantes el promedio bajó a cerca de 1 cm. Las velocidades medias de escurrimiento encontradas fueron del orden de 1 cm/s.

Reología

La caracterización reológica fue realizada empleando un reómetro de cilindros concéntricos Rheometrics RM-180, con radios interno y externo de 15 y 16.27 mm, respectivamente. Luego de una etapa de cuidadosa homogeneización de las suspensiones, se dejaron descansar por espacio de 60 segundos en vasos precipitados de 600 ml antes del comienzo

de cada una de las mediciones. Las mediciones de esfuerzo de corte fueron realizadas individualmente a cada muestra, después de ser re-homogeneizadas. Para cada tasa de deformación escogida, se realizó las mediciones de esfuerzo de corte algunos segundos después del comienzo de la rotación del cilindro interior, una vez que la señal esfuerzo de corte entregada por el instrumento se estabilizó. Se encontró que las mediciones ajustaron el modelo reológico de Bingham a lo largo de aproximadamente un orden de magnitud de datos, confirmándose así el diagnóstico reológico de trabajos previos (Liu y Mei 1989, Huang y García 1997, Burger *et al.* 2010). En particular, no se encontró efectos de adelgazamiento por corte significativos en el rango de flujo laminar en la celda de Couette empleada. De un análisis de sensibilidad realizado se encontró una incertidumbre de aproximadamente un 5% en la medición del esfuerzo de fluencia y la viscosidad Bingham. En la Figura 2 se puede apreciar un ejemplo de estos reogramas. Para distintas concentraciones, se logró un buen ajuste mediante un modelo exponencial.

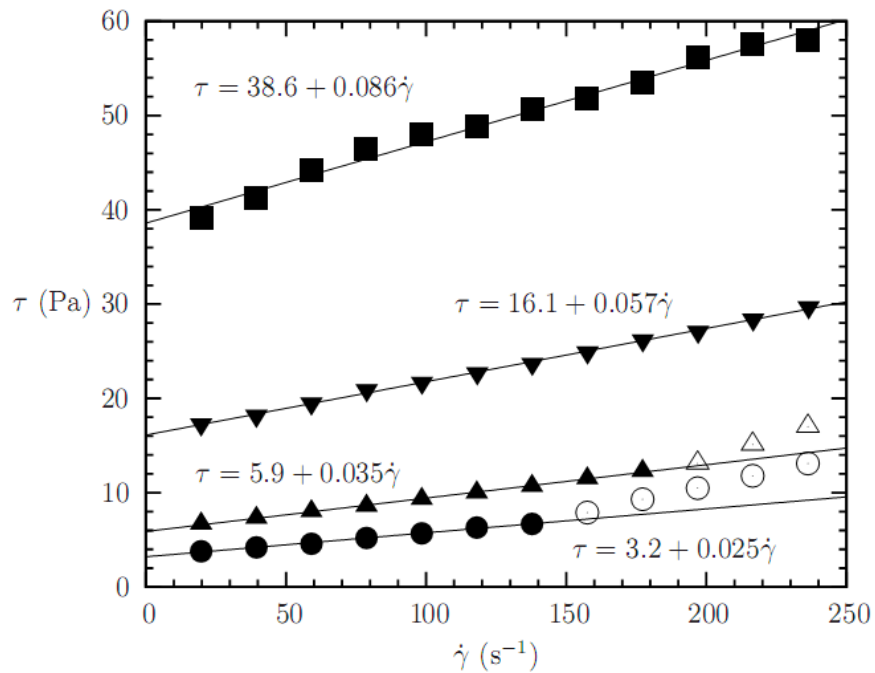


Figura 2: Reogramas típicos obtenidos de las mediciones. De abajo hacia arriba, concentraciones en peso de 4% 6%, 8% y 10%, respectivamente. Los símbolos sólidos representan datos en régimen laminar dentro de la celda de Couette.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se ha encontrado condiciones de flujo con y sin ondas rodantes. En el primer caso, se encontró una superficie de escurrimiento uniforme, mientras que en el segundo caso, se observó un fuerte incremento en la aparición de ondas rodantes con el aumento del caudal, con una frecuencia de formación (cerca del punto de descarga), del orden de 1 Hz. En la Figura 3 se puede apreciar una secuencia de imágenes asociadas a tres experimentos.

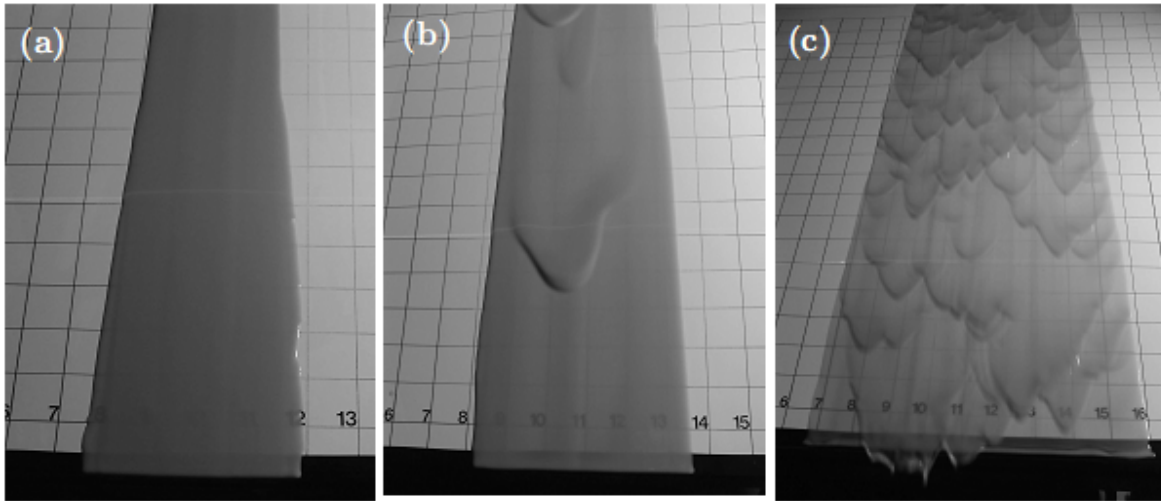


Figura 3: Visualización de experimentos con y sin la presencia de ondas rodantes. Para todos los casos, el ángulo de inclinación fue de 19.3° . (a) $Q = 5.4 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, $\eta = 3.67 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\tau_y = 6.67 \text{ Pa}$, (b) $Q = 9.3 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, $\eta = 3.67 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\tau_y = 6.67 \text{ Pa}$ y (c) $Q = 1.44 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, $\eta = 2.43 \times 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\tau_y = 2.8 \text{ Pa}$.

De los resultados de velocidad, altura de escurrimiento y reología se ha obtenido un conjunto de números de Froude y Reynolds característicos y, a través de ellos, una relación para el número de Reynolds basada en el valor equivalente, según lo expresado en (32). Esto se puede apreciar en la Figura 4. Para el caso de los datos estables, el ajuste es cercano a $1/3$, mientras que se produce una mayor dispersión para los datos donde se observó la aparición de ondas rodantes. Por otro lado, a estos casos se asocia una mayor incertidumbre en las mediciones, motivada, en primer lugar, por las menores alturas de escurrimiento (se estima un error de medición de alrededor de 1 mm en ellas), y por otro lado, a la naturaleza oscilante de estos flujos, donde los puntos presentados en el gráfico representan en realidad un promedio temporal de la altura de escurrimiento medida. No obstante las limitaciones en las condiciones de medición, se ha encontrado un ajuste razonable para el escalamiento (32), al menos en el caso de los puntos experimentales sin aparición de ondas rodantes. Sin embargo, es importante tener en cuenta que los prefactores encontrados pueden depender de la posición donde se ha efectuado de la medición y por lo tanto, a la luz del presente trabajo, tienen sólo validez local. Actualmente se están realizando experimentos adicionales para esclarecer este punto. En particular, la forma de estas corrientes de densidad tiende a ser creciente con la distancia x y por lo tanto la velocidad, el número de Reynolds y la altura de escurrimiento, que cambian en distintas proporciones a lo largo de este eje. Coussot y Proust (1996), simplificando las ecuaciones (27)-(29) considerando que la velocidad en la componente principal es la de un flujo uniforme, predicen que una relación

$Z \sim L^a$ con $a \approx 0.41$ y $H \sim L^b$, con $b \approx -0.17$. Para los casos analizados, se encuentra que a está entre 0.1 y 0.25. Esto se puede apreciar en la Figura 5. Dichos autores no realizaron una comprobación experimental de sus resultados en el caso de lodos de Bingham. Aún en las experiencias realizadas con fluidos de Herschel-Bulkley, las pendientes analizadas fueron mucho menores que las empleadas en el presente trabajo.

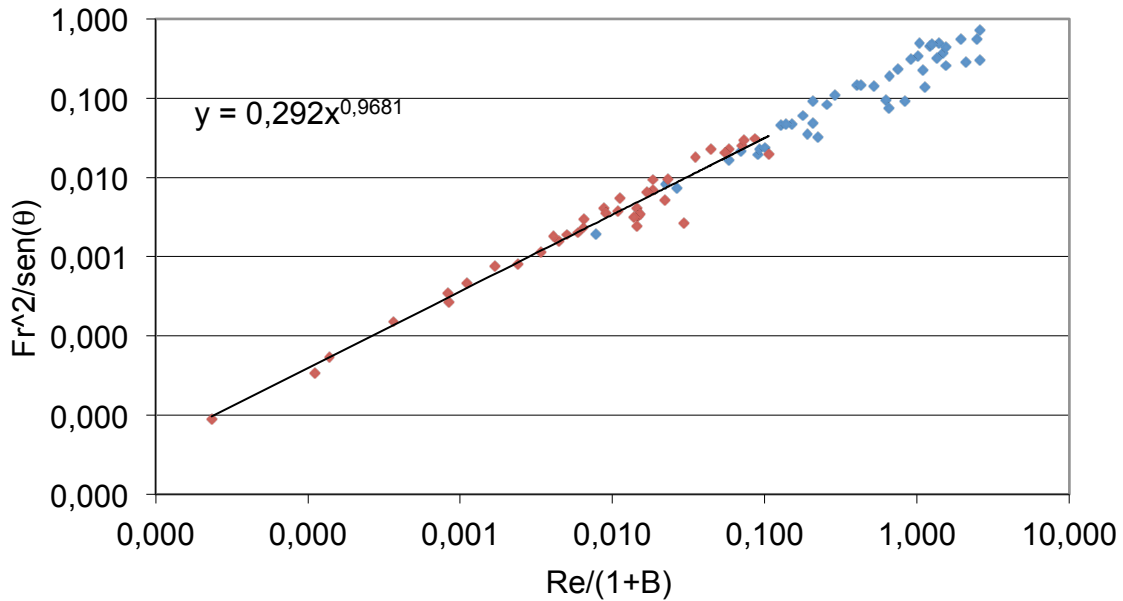


Figura 4: Valores de número de Reynolds basados en viscosidad equivalente de acuerdo al modelo reológico de Bingham en función de los números de Froude y la pendiente de escurrimiento. Los símbolos color rojo representan eventos de flujo estable, mientras los puntos azules denotan la aparición de ondas rodantes.

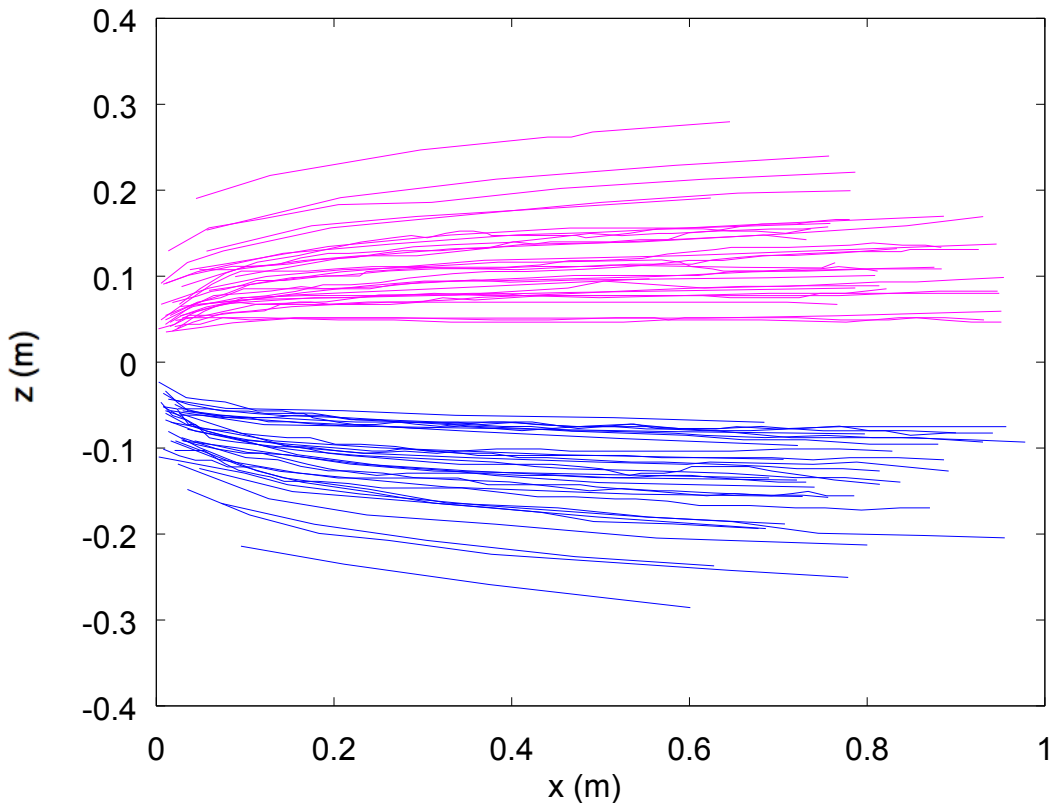


Figura 5: Vista en planta de perfil $Z(L)$ de la corriente de densidad para los casos analizados. Para los escurrimientos más angostos, se encontró un ajuste $Z \approx L^a$, con $a \approx 0.1$, mientras que para los escurrimientos más abiertos, correspondientes a las líneas de los extremos superior e inferior, $a \approx 0.25$. El valor promedio global en las mediciones es de 0.15.

5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha formulado y justificado el problema de escurrimiento de lodos con reología de tipo plástico de Bingham para el caso de descargas con caudal constante en planos inclinados. Este problema, a diferencia de flujos en canales, no tiene ninguna escala de longitud impuesta externamente, y por lo tanto atributos como la forma y el ancho de escurrimiento obedecen al resultado del equilibrio de momentum en una reología tridimensional. Con el propósito de comprobar la aplicabilidad de escalamientos que relacionen los números de Froude y Reynolds, se ha medido estas variables encontrándose que, mediante la definición de una versión modificada de este último parámetro, dando lugar al empleo de un número adimensional adicional, se puede describir la relación clásica disponible, localmente, de manera análoga, mientras que se encuentra pendiente una posible generalización de la misma. Para ello, se debe verificar la validez de la relación encontrada para distintas locaciones aguas abajo del punto de descarga.

REFERENCIAS

Besq, A.; Malfoy, C.; Pantet, A.; Monnet, P. & Righi, D. (2003), Physicochemical characterisation and flow properties of some bentonite muds, *Applied Clay Science* **23**(5-6), 275-286.

Bird, R. (1976), Useful non-Newtonian models, *Annual Review of Fluid Mechanics* **8**, 13-34.

Bird, R.; Armstrong, R. & Hassager, O. (1987), *Dynamics of Polymeric Liquids. Volume 1: Fluid Mechanics*.

Burger, J.; Haldenwang, R. & Alderman, N. (2010), Experimental database for non-Newtonian flow in four channel shapes, *Journal of Hydraulic Research* **48**(3), 363-370.

Coussot, P. & Proust, S. (1996), Slow, unconfined spreading of a mudflow, *Journal of Geophysical Research* **101**(B11), 25217--25229.

Coussot, P. (1997), *Mudflow Rheology and Dynamics*, Balkema.

Haldenwang, R. & Slatter, P. (2006), Experimental procedure and database for non-Newtonian open channel flow, *Journal of Hydraulic Research* **44**(2), 283-287.

Huang, X. & García, M. H. (1997), A perturbation solution for Bingham-Plastic mudflows, *J. Hydr. Eng., ASCE* **123**, 986-994.

Hulme, G. (1974), The interpretation of lava flow morphology, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **39**(2), 361--383.

Liu, K. F. & Mei, C. C. (1989), Slow spreading of a sheet of Bingham fluid on an inclined plane, *Journal of Fluid Mechanics* **207**, 505--529.

Lister, J. R. (2006), Viscous flows down an inclined plane from point and line sources, *Journal of Fluid Mechanics* **242**, 631.

Masalova, I.; Malkin, a.; Kharatiyan, E. & Haldenwang, R. (2006), Scaling in pipeline flow of Kaolin suspensions, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **136**(1), 76-78.

Osmond, D. I. & Griffiths, R. W. (2001), The static shape of yield strength fluids slowly emplaced on slopes, *Journal of Geophysical Research* **106**(B8), 16241-16250.

Stickel, J. J. & Powell, R. L. (2005), Fluid Mechanics and Rheology of Dense Suspensions, *Annual Review of Fluid Mechanics* **37**(1), 129--149.

Wan, Z. y Wang, Z. 1994. *Hyperconcentrated Flow*. A.A. Balkema.

Wilson, S. & Burgess, S. (1998), The steady, spreading flow of a rivulet of mud, *Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics* **79**(1), 77-85.