

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

XIX CONGRESO CHILENO DE HIDRAULICA

**MODELO ANALÍTICO PARA EL ANÁLISIS HIDROLÓGICO
DE CUENCAS URBANAS BASADO EN EL USO CÓPULAS**

**MACARENA ZEGPI S.¹
BONIFACIO FERNÁNDEZ L.²**

RESUMEN

Se propone un modelo analítico para estimar la curva de frecuencia del volumen y caudal máximo de escorrentía a partir la función de probabilidad conjunta del volumen y duración de tormentas e información física de las cuencas. La función de probabilidad conjunta del volumen y la duración es derivada utilizando la teoría de cópulas, examinando y evaluando cuatro familias de cópulas Arquimedeanas para encontrar la que mejor reproduce la estructura de dependencia de las variables. Las curvas de frecuencia del volumen y caudal máximo de escorrentía se obtienen integrando la función de densidad de probabilidad conjunta en regiones apropiadas del plano $v-t$ delimitadas por condiciones derivadas del proceso lluvia-escorrentía. El modelo es probado en la ciudad de Chillán, Chile, aplicándolo a dos cuencas con distinto grado de desarrollo urbano. Los resultados se compararon con los provenientes de simulación continua en SWMM 5.0, obteniendo un buen ajuste, y con los de un modelo analítico que asume la duración y volumen de tormentas como variables exponenciales estadísticamente independientes.

¹Ing. Civil, MS, Pontificia Universidad Católica de Chile - mail: mdzegpi@ing.puc.cl.

²Ing. Civil, MS, PhD, Profesor Titular, DIHA, Pontificia Universidad Católica de Chile - mail: bfemand@ing.puc.cl.

1. INTRODUCCIÓN

El análisis del funcionamiento de los sistemas de drenaje de aguas lluvias de cuencas urbanas es fundamental en las etapas de su planificación, diseño y operación. Lamentablemente, la gran mayoría de las cuencas urbanas no está instrumentalizada y los datos de escurrimiento son muy escasos. Además, gran parte de la planificación y diseño se desarrollan en etapas anteriores al desarrollo urbano propiamente tal. Por lo que el análisis hidrológico basado en observaciones resulta normalmente impracticable y se debe recurrir a otras metodologías. Habitualmente se recurre a modelos simples lluvia-escorrentía aplicados a eventos aislados, como tormentas de diseño con periodo de retorno de 2 a 100 años. Este procedimiento permite encontrar los parámetros de diseño para condiciones poco habituales, pero no entrega información sobre el comportamiento de las aguas lluvias en condiciones habituales. Como solución a dicho problema se han desarrollado herramientas computacionales que permiten simular la respuesta hidrológica de una zona urbana en forma continua, representándola por sus parámetros geomorfológicos y usando una serie continua de precipitaciones como variable de excitación del sistema. Una alternativa a la simulación continua son los modelos analíticos, los que permiten obtener las funciones de distribución de probabilidad de las variables características de los eventos de escorrentía a partir de las propiedades estadísticas de las lluvias y las propiedades físicas de la cuenca. Los modelos analíticos tienen la ventaja de ser compactos y simples de usar y permiten evaluar la sensibilidad de la respuesta hidrológica a cada una de las variables físicas de la cuenca.

Los modelos analíticos difieren en la forma de modelar las lluvias y el proceso lluvia-escorrentía. Usualmente las tormentas se han modelado bajo supuestos de independencia entre sus características (Eagleson, 1972; Díaz-Granados et al., 1984) o bien se ha reproducido la dependencia utilizando funciones de distribución de probabilidad conjunta con limitaciones en cuanto al grado de dependencia (Córdova and Rodríguez-Iturbe, 1985; Kurothe et al., 1997; Goel et al., 2000). Para la transformación lluvia-escorrentía, la mayoría de los trabajos consideran la aplicación de tasas de infiltración constante (Eagleson, 1972; Kurothe et al., 1997; Goel et al., 2000), el método de la curva número (Raines and Valdés, 1993) o la ecuación de Philips (Díaz-Granados et al., 1984). Guo y Adams (1998 a,b) desarrollaron un modelo para cuencas urbanas en el que se caracterizan las tormentas a través de su duración y volumen asumiéndolas como variables exponenciales estadísticamente independientes, estiman las pérdidas por infiltración con la ecuación de Horton y emplean un hidrograma triangular para obtener el caudal máximo. En la misma línea, Rivera et al. (2005) propusieron un modelo similar, intentando reproducir la dependencia entre el volumen y duración a través de la intensidad media.

Los modelos desarrollados hasta ahora tienen el inconveniente de no representar adecuadamente la estructura de dependencia entre las características de las tormentas: algunos asumen independencia y otros tienen restricciones respecto de la estructura de dependencia que son capaces de representar. En los últimos años se ha introducido al campo de la hidrología el concepto de “cópula” para representar la dependencia entre variables, herramienta que permite evitar las restricciones antes expuestas. Una cópula es una función que ensambla funciones de distribución unidimensionales para formar funciones de distribución multivariadas (Nelsen, 2006). En este trabajo se desarrolla un modelo analítico que permite estimar la curva de frecuencia del volumen de escorrentía y del caudal máximo en cuencas urbanas a partir de un modelo estocástico de lluvias desarrollado de acuerdo a la teoría de cópulas y una definición de la cuenca basada en el trabajo de Guo y Adams (1998 a,b).

1. MODELACIÓN DE LAS TORMENTAS

2.1. Tiempo mínimo entre tormentas

Para utilizar un registro continuo de precipitaciones en modelos analíticos éste debe ser discretizado en tormentas independientes. Un criterio muy usado para distinguir entre dos tormentas consecutivas consiste en definir un periodo mínimo de tiempo sin precipitación (IETD). Así, periodos de lluvia separados por un tiempo entre tormentas TET mayor que IETD corresponden a tormentas distintas, mientras que aquellos separados por un TET menor que IETD pertenecen a un mismo evento. Una vez definido el IETD es posible estimar las características de las tormentas (duración, magnitud, intensidad media y TET), a las que se debe ajustar una función de distribución de probabilidad.

Dentro de las metodologías disponibles en la literatura para determinar el IETD se encuentra el método exponencial (Restrepo-Posada y Eagleson, 1982), métodos basados en el coeficiente de autocorrelación de la serie de intensidad media o volumen de precipitación (Bonta y Rao, 1988) y métodos basados en que para el IETD se debe adoptar un valor tal que para valores mayores de él no se observen variaciones importantes en el número promedio de eventos por año. Sin embargo, es posible que no se observe el comportamiento asintótico esperado y no se pueda aplicar el método (Adams y Papa, 2000). Las metodologías anteriores han sido objetadas por diferentes motivos. Por un lado, el método exponencial asume una distribución de probabilidad predeterminada para TET. Por otro lado, en los tests de correlación se tiene que el autocorrelograma de las distintas variables se anula para diferentes desfases, obteniendo más de un valor para IETD. Ante esto, Zegpi (2008) propuso utilizar una metodología basada en la modelación de la lluvia horaria como una cadena de Markov. El fenómeno se representa por un proceso con dos estados, lluvia (1) y no lluvia (0), y una matriz de transición de estado. En este tipo de proceso las probabilidades de transición después de muchas etapas se independizan del estado inicial y tienden a un valor igual a la probabilidad libre, tal como muestra la ecuación (1). Así, se propone adoptar IETD como el valor de n a partir del cual se acepta que $P_{ij}=P_j$, con un cierto nivel de tolerancia ε .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n = P_j = \frac{N_j}{N_i + N_j} \quad (1)$$

Donde P_{ij} es la probabilidad de transición del estado i al estado j , n es el número de etapas de transición (en este caso horas) y P_j es la probabilidad de que en una hora ocurra el estado j .

Para el cálculo de las probabilidades de transición se utilizan las ecuaciones del grupo (2), las que se disponen en la llamada matriz de probabilidades de transición P de la ecuación (3). Para calcular las probabilidades de transición en n etapas se utiliza otra propiedad de las cadenas de Markov consistente en que la matriz de probabilidades de transición en n etapas es igual a la matriz de transición en una etapa multiplicada n veces por si misma.

$$P_{00} = \frac{N_{00}}{N_{00} + N_{01}}; \quad P_{01} = \frac{N_{01}}{N_{00} + N_{01}}; \quad P_{10} = \frac{N_{10}}{N_{10} + N_{11}}; \quad P_{11} = \frac{N_{11}}{N_{10} + N_{11}} \quad (2)$$

$$P^n = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} \quad (3)$$

2.2. Función de distribución conjunta de v y t utilizando cópulas

Para encontrar la función de distribución conjunta del volumen y la duración de las tormentas se propone hacer uso de la teoría de cópulas, concepto empleado por primera vez por Abe Sklar (1959). El uso de cópulas en hidrología es relativamente reciente, pero cada vez se están aplicando con mayor frecuencia en el desarrollo de modelos multivariados para analizar la estructura probabilística de eventos hidrológicos (Favre, et al., 2004; Salvadori and De Michele, 2004; Salvadori and De Michele, 2006).

Limitando la aplicación de las cópulas al caso bidimensional, se tiene que la función de probabilidad conjunta $H_{X,Y}(x,y)$ de cualquier par de variables aleatorias continuas (X,Y) puede ser escrita como se muestra en la ecuación (4), donde $F_X(x)$ y $G_Y(y)$ son las distribuciones marginales y $C: (0,1)^2 \rightarrow (0,1)$ es la cópula.

$$H_{X,Y}(x,y) = C(F_X(x), G_Y(y)) \quad (4)$$

La gran ventaja del uso de esta herramienta es que la estructura de la cópula es la que reproduce la relación de dependencia entre las variables, sin importar las distribuciones marginales adoptadas. El proceso se resume en estimar: (1) distribuciones marginales por separado y (2) la función de dependencia (Zhang y Singh, 2007).

Muchos autores han trabajado en el desarrollo de familias de cópulas. Nelsen (2006) presenta un extenso listado de éstas. Las más populares en aplicaciones hidrológicas son las Arquimedeanas, pues poseen propiedades que las hacen fáciles de construir y permiten reproducir correlación positiva y negativa. En este trabajo se hace uso de cópulas Arquimedeanas de un parámetro, las que para un par de variables aleatorias cualquiera, X e Y , pueden ser expresadas como:

$$C_\theta(u,v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)) = H(x,y) \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (5)$$

Donde, U y V son las funciones de probabilidad acumulada de X e Y , $F_X(x)$ y $G_Y(y)$ respectivamente. ϕ es el generador de la cópula, una función decreciente y convexa que cumple con: $\phi(1)=0$ y $\phi^{-1}=0$ cuando $\phi(0) \leq u$ ó v . θ es el parámetro de la cópula. Para estimar el parámetro θ se utiliza el método de momentos basado en el coeficiente de correlación Kendall (τ). Así, dada dos muestras aleatorias X e Y , la estimación empírica de τ viene dada por (6) (Genest and Favre, 2007).

$$\tau_n = (P_n - Q_n) / \binom{n}{2} \quad (6)$$

Donde P_n es el número de pares concordantes, Q_n el número de pares discordantes y n el tamaño de la muestra. Dos pares son concordantes cuando $(X_i - X_j) \cdot (Y_i - Y_j) > 0$ y discordantes en caso contrario. Para pares tales que $(X_i - X_j) \cdot (Y_i - Y_j) = 0$ la posibilidad de ser concordante o discordante es la misma.

Genest y MacKay (1986) demostraron que para cópulas Arquimedeanas existe una relación teórica entre τ y la función generadora de cópula, ϕ , dada por la ecuación (7). Luego, para obtener el parámetro θ basta con igualar el coeficiente muestral (τ_n) con el coeficiente paramétrico (τ_θ) del modelo.

$$\tau_\theta = 4 \cdot \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt + 1 \quad (7)$$

Para este trabajo se escogieron las cuatro familias presentadas en la Tabla 1, las que se ajustan a los datos de volumen y duración disponibles. Luego, para identificar la que mejor representa la estructura de dependencia de los datos se aplica el procedimiento descrito por Genest y Rivest (1993).

Para la implementación del modelo analítico se requiere conocer la función de densidad de probabilidad conjunta $h_{x,y}(x, y)$, la que se obtiene diferenciando en ambas variables a la función de probabilidad acumulada $H_{x,y}(x, y) = C_\theta(u, v)$, obtenida de los pasos descritos anteriormente.

$$h_{x,y}(x, y) = \frac{\partial^2 H_{x,y}(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial F_x(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial G_y(y)}{\partial y} \quad (8)$$

Tabla 1.- Familias de cópulas Arquimedeanas consideradas en este trabajo.

Familia	Generador, $\phi(t)$	Rango de θ	Referencia
Cook – Johnson	$\phi(t) = t^{-\theta} - 1$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$	Genest and Mackay (1986)
Frank	$\phi(t) = -\ln \left[\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \right]$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$	Frank (1979)
Gumbel- Hougaard	$\phi(t) = [-\ln(t)]^\theta$	$[1, \infty)$	Hutchinson and Lai (1990)
Ali- Miqhail- Haq	$\phi(t) = \ln \left(\frac{1 - \theta(1-t)}{t} \right)$	$[-1, 1)$	Hutchinson and Lai (1990)

2. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DEL VOLUMEN DE ESCORRENTÍA

Siguiendo la metodología de Guo y Adams (1998 a, b) el volumen de escorrentía se modela como la diferencia entre el volumen de precipitación y las pérdidas producidas debido a almacenamiento superficial e infiltración. Para ello, la cuenca urbana se divide en dos tipos de superficies: permeable e impermeable, con alturas de detención superficial S_{dp} y S_{di} respectivamente y las pérdidas por infiltración ocurren sólo en las áreas permeables y se calculan según la ecuación de de Horton:

$$f_p(t) = f_c + (f_o - f_c) \cdot e^{-kt} \quad (9)$$

Donde f_p es la capacidad de infiltración en el instante t , f_c es la capacidad de infiltración última y f_o es la capacidad de infiltración al inicio de la tormenta, todas en (mm/hr). t es el tiempo desde el inicio de la tormenta (hr) y k es el coeficiente de decaimiento de la capacidad de infiltración (h^{-1}).

Las pérdidas por infiltración se deben a dos mecanismos: infiltración inicial hasta la saturación e infiltración a tasa constante. Así, el máximo volumen infiltrable durante un evento se calcula como:

$$S_{mf} = \int_0^t (f_c + (f_o - f_c) \cdot e^{-kT}) dT = \frac{f_o - f_c}{k} [1 - \exp(-k \cdot t)] + f_c \cdot t = S_{iw} + f_c \cdot t \quad (10)$$

Además, se considera que entre tormentas el suelo puede recuperar su capacidad de infiltración. La recuperación se modela según la ecuación usada en SWMM:

$$f_o(b) = f_m - (f_m - f_c) \cdot e^{-k_d \cdot b} \quad (11)$$

Donde, b es el tiempo seco entre tormentas (hr), f_m es la capacidad de infiltración máxima (mm/h) y k_d es el coeficiente de recuperación (hr^{-1}), calculado como una fracción de k : $k_d = R \cdot k$. Sustituyendo (11) en (10) se obtiene la siguiente expresión para S_{iw} :

$$S_{iw} = \frac{(f_m - f_c)}{k} [1 - e^{-k \cdot t}] [1 - e^{-k_d \cdot b}] \quad (12)$$

Dado que b y t son variables aleatorias S_{iw} también lo es. Sin embargo, este parámetro es tratado como constante, igual a su valor esperado calculado según (13). Donde $f_{B,T}(b, t)$ es la fdp conjunta del tiempo entre eventos y la duración de las tormentas, determinada siguiendo la teoría de cópulas.

$$E(S_{iw}) = \int_{IETD} \int_0^{\infty} S_{iw} \cdot f_{B,T}(b, t) dt db \quad (13)$$

Considerando que tanto S_{di} , S_{dp} y S_{iw} deben ser satisfechos para que se genere escurrimiento y que la fracción de área impermeable de la cuenca es h , el volumen de escurrimiento total se define como la suma ponderada por área (la permeable y la impermeable) de los aportes de escorrentía:

$$v_r = \begin{cases} 0 & v \leq S_{di} \\ h(v - S_{di}) & S_{di} < v \leq S_{il} + f_c t \\ v - S_d - f_c(1-h)t & v > S_{il} + f_c t \end{cases} \quad (14)$$

Donde S_{iw} se reemplaza por $E(S_{iw})$, $S_{il} = S_{dp} + S_{iw}$ y $S_d = hS_{di} + (1-h)S_{il}$.

Luego, la función de probabilidad de v_r se estima integrando la función $h_{v,T}(v,t)$ en regiones del plano $v-t$ definidas por (17). Para esto se consideran los siguientes tres casos:

a) No se produce escurrimiento en la cuenca ($v_r=0$)

No se genera escurrimiento ($v_r = 0$) si $v \leq S_{di}$. Así, la probabilidad de tener escurrimiento nula es:

$$P(v_r = 0) = P(v \leq S_{di}) = \int_0^{\infty} \int_0^{S_{di}} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad (15)$$

b) El escurrimiento se genera sólo en áreas impermeables

Este caso se da cuando $S_{di} < v \leq S_{il}$, lo que determina que v_r es menor que $h \cdot S_{dd}$, con $S_{dd} = S_{il} - S_{di}$. Así, la probabilidad de ocurrencia de estos eventos se calcula como:

$$P(v_r \leq v_o) = P(v \leq \frac{v_o}{h} + S_{di}) = \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{v_o}{h} + S_{di}} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad v_o \leq h \cdot S_{dd} \quad (16)$$

c) El escurrimiento se puede generar también en áreas permeables

Cuando $v > S_{il}$, las áreas permeables también pueden contribuir a la generación de escurrimiento. En este caso, el volumen de escurrimiento es mayor que $h \cdot S_{dd}$ y la probabilidad de que v_r sea menor que un cierto valor v_o corresponde a la suma de las probabilidades de ocurrencia de dos grupos de eventos. En el primer grupo ocurre cuando el área permeable no genera escurrimiento debido a la alta capacidad de infiltración del suelo ya que $v \leq S_{il} + f_c t$. Mientras que el grupo 2 incluye aquellos eventos que cumplen $v > S_{il} + f_c t$. De acuerdo a estas consideraciones, la probabilidad para este caso se calcula como:

$$P(v_r \leq v_o) = \int_0^{\infty} \int_{S_{il}}^{\frac{v_o}{h} + S_{di}} h_{v,T}(v,t) dv dt - \int_0^{t^*} \int_{f_c \cdot (1-h) \cdot t + v_o + S_{di}}^{\frac{v_o}{h} + S_{di}} h_{v,T}(v,t) dv dt + P(v_r \leq h \cdot S_{dd}) ; v_o > h \cdot S_{dd} \quad (17)$$

$$\text{Donde, } P(v_r \leq h \cdot S_{dd}) = \int_0^{\infty} \int_0^{S_{il}} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad \text{y} \quad t^* = \frac{1}{f_c} \left[\frac{v_o}{h} - S_{dd} \right] \quad (18)$$

Resumiendo, la función de probabilidad acumulada para v_r , definida por tramos es:

$$\begin{aligned} F_{V_r}(v_r) &= \int_0^{\infty} \int_0^{S_{di}} h_{v,T}(v,t) dv dt & v_o = 0 \\ F_{V_r}(v_r) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{v_o}{h} + S_{di}} h_{v,T}(v,t) dv dt & v_o \leq h \cdot S_{dd} \\ F_{V_r}(v_r) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{v_o}{h} + S_{di}} h_{v,T}(v,t) dv dt - \int_0^{t^*} \int_{f_c \cdot (1-h) \cdot t + v_o + S_{di}}^{\frac{v_o}{h} + S_{di}} h_{v,T}(v,t) dv dt & v_o > h \cdot S_{dd} \end{aligned} \quad (19)$$

3. FUNCIÓN DE PROBABILIDAD DEL CAUDAL MÁXIMO

La relación entre el caudal máximo y las variables v y t no es tan directa como para el caso del volumen de escurrimiento. En teoría, para la estimación de Q_p se debe conocer la distribución de la lluvia durante la tormenta, calcular el hidrograma de respuesta y de ahí obtener el caudal máximo. En la práctica, se han usado métodos como el de la onda cinemática, hidrograma unitario e hidrogramas triangulares. En particular, Guo y Adams (1998) utilizaron un hidrograma triangular con tiempo base igual a la duración de la lluvia más el tiempo de concentración de la cuenca (t_c). En este trabajo se opta por utilizar el hidrograma del SCS (Soil Conservation Service, 1972) que tiene una zona de ascenso que corresponde al 37% del volumen escurrido y considera que el tiempo base es igual a $1.8 \cdot t_c$, quedando totalmente definida la relación entre el Q_p y v_r en la ecuación (20).

$$0.5 \cdot Q_p \cdot 1.8 \cdot t_c = v_r \quad (20)$$

Reemplazando la ecuación (20) en (14) se obtiene:

$$Q_p = \begin{cases} 0 & v \leq S_{di} \\ 1.1 \cdot h(v - S_{di})/t_c & S_{di} < v \leq S_{di} + f_c \cdot t \\ 1.1 \cdot [v - S_{di} - f_c(1-h)t]/t_c & v > S_{di} + f_c \cdot t \end{cases} \quad (21)$$

Así, la probabilidad de Q_p nulo es equivalente a la probabilidad de escurrimiento nulo:

$$P(Q_p = 0) = P(v \leq S_{di}) = \int_0^{\infty} \int_0^{S_{di}} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad (22)$$

Para el cálculo de $P(Q_p \leq q_p)$, para $q_p > 0$, $h_{v,T}(v,t)$ se integra en las siguientes regiones:

Región 1:

$$v \leq S_{di} + f_c \cdot t = v_1$$

$$v \leq \frac{q_p \cdot t_c}{1.1 \cdot h} + S_{di} = v_2$$

Región 2:

$$v > S_{di} + f_c \cdot t = v_1$$

$$v \leq \frac{q_p \cdot t_c}{1.1} + S_{di} + f_c(1-h) \cdot t = v_3$$

La posición relativa de las rectas que definen las regiones de integración depende las magnitudes de los parámetros de la cuenca y q_p . Así, se diferencian dos tipos de eventos, cuyas regiones de integración se muestran gráficamente en la Figura 1 y la Figura 2.

Caso 1: $q_p \leq 1.1 \cdot h \cdot S_{di} / t_c$

$$P(Q_p \leq q_p) = \int_0^{\infty} \int_0^{v_2} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad (23)$$

Caso 2: $q_p > 1.1 \cdot h \cdot S_{di} / t_c$

$$P(Q_p \leq q_p) = \int_0^{t^{**}} \int_0^{v_3} h_{v,T}(v,t) dv dt + \int_0^{t^{**}} \int_0^{v_2} h_{v,T}(v,t) dv dt \quad (24)$$

$$\text{Donde, } t^{**} = \left[q_p \cdot t_c / (1.1 \cdot h) - S_{di} \right] / f_c \quad (25)$$

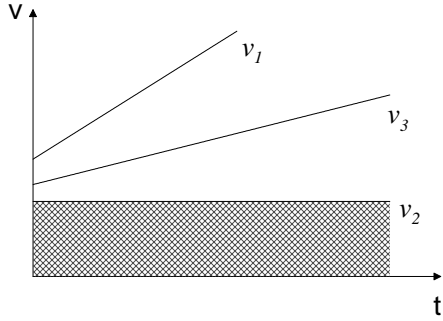


Figura 1.- Región de integración para encontrar $P(Q_p < q_p)$ cuando $q_p \leq 1.1 \cdot h \cdot S_{dd} / t_c$.

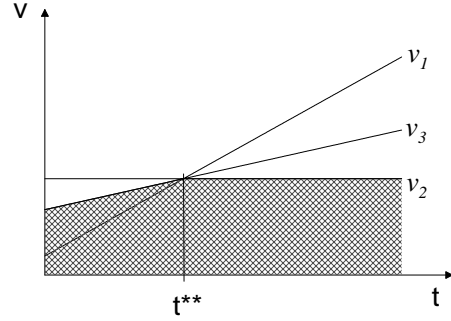


Figura 2.- Región de integración para encontrar $P(Q_p < q_p)$ cuando $q_p > 1.1 \cdot h \cdot S_{dd} / t_c$.

Resumiendo, la función de probabilidad acumulada para Q_p , definida por tramos es:

$$\begin{aligned}
 F_{Q_p}(q_p) &= \int_0^{\infty} \int_0^{S_{di}} h_{v,T}(v,t) dv dt & q_p = 0 \\
 F_{Q_p}(q_p) &= \int_0^{\infty} \int_0^{v_2} h_{v,T}(v,t) dv dt & q_p \leq 1.1 \cdot h \cdot S_{dd} / t_c \\
 F_{Q_p}(q_p) &= \int_0^{t^{**}} \int_0^{v_3} h_{v,T}(v,t) dv dt + \int_{t^{**}}^{\infty} \int_0^{v_2} h_{v,T}(v,t) dv dt & q_p > 1.1 \cdot h \cdot S_{dd} / t_c
 \end{aligned} \tag{26}$$

4. APLICACIÓN DEL MODELO Y COMPARACIÓN CON SIMULACIÓN CONTINUA

El modelo se aplica en dos cuencas de la ciudad de Chillán ubicada en la VIII región de Chile. El registro de precipitaciones continuo consiste en mediciones de volumen caído cada 15 minutos para el periodo 1998 - 2006. Para determinar el IETD y discretizar el registro continuo se aplicó la metodología descrita en la sección 2 de este artículo, encontrando un valor de IETD de 18 horas. Los principales estadígrafos de las tormentas obtenidas se indican en la Tabla 2.

Tabla 2.- Principales estadísticos de las tormentas.

Propiedad	Volumen (mm)	Duración (hr)	Int. media (mm)	TET (hr)
Promedio	15.1	17.7	0.748	98.5
Máximo	333.5	311.5	18.9	2254.8
Mínimo	0.115	0.250	0.014	18.0
Desv. Est	32.3	28.9	1.0	187.0

Tabla 3.- Parámetros de la función gamma-2 ajustada a cada una de las variables.

Variable	Volumen	Duración	TET
α	47.0	39.7	161.5
β	0.32	0.45	0.5
Rango	$v \geq 0$	$t \geq 0$	$b \geq \text{IETD}$

Las fdp marginales del volumen, duración y TET resultan gamma-2 con los parámetros ajustados por método de máxima verosimilitud que se indican en la Tabla 3.

Para encontrar la fdp conjunta de v y t se ajustó el parámetro θ de las cópulas de la Tabla 1, considerando que para este caso se obtuvo $\tau_n = 0.69$, lo que representa un alto grado de dependencia. De acuerdo al procedimiento descrito por Genest y Rivest (1993) se concluyó que el mejor ajuste corresponde a la familia Cook-Johnson, resultado que se confirmó con el criterio de información de Akaike. Los resultados de la Tabla 4 muestran que dicha familia presenta el menor AIC. Las ecuaciones (27) y (28) muestran la función de probabilidad conjunta y función de densidad de probabilidad conjunta del volumen y duración obtenida.

$$H_{v,t}(v,t) = \left(F_T(t)^{-4.52} + F_V(v)^{-4.52} - 1 \right)^{-\frac{1}{4.52}} \quad (27)$$

$$h_{v,t}(v,t) = \left(1 + \frac{1}{4.52} \right) \left[F_V(v)^{-4.52} + F_T(t)^{-4.52} - 1 \right]^{-\frac{1}{4.52}-2} \cdot F_V(v)^{-4.52-1} \cdot F_T(t)^{-4.52-1} \cdot f_V(v) \cdot f_T(t) \quad (28)$$

Donde, $F_V(v)$, $F_T(t)$, $f_V(v)$ y $f_T(t)$ corresponden a las funciones marginales de probabilidad acumulada y de densidad de probabilidad con los parámetros indicados en la Tabla 2.

Siguiendo el mismo procedimiento se obtuvo que la cópula que mejor representa la fdp de la duración y TET, variables con $\tau = 0.051$, corresponde a la familia Ali-Mikhail-Haq con parámetro $\theta = 0.63$. La función $f_{b,t}(b,t)$ es utilizada para calcular S_{iv} según la ecuación (13).

Tabla 4.- Valores de AIC de las cópulas

Cópula	MSE	AIC
Cook - Johnson	0.014	-894
Frank	0.064	-578
Gumbel- Hougaard	0.015	-884

El modelo se aplica a dos cuencas de la ciudad de Chillán con detallada información disponible en la consultoría DP.ALL-27 (MOP, 2007). La información se encuentra organizada de acuerdo a la subdivisión de subcuencas adoptada para cada cuenca analizada en dicho trabajo, la que para ser utilizada en el modelo analítico se agrega bajo un criterio de promedio ponderado por área (Quader and Guo, 2006). Para cada subcuenca se tiene información de área total, área impermeable con y sin detención, ancho equivalente, pendiente, coeficiente de rugosidad de Manning para superficies permeable e impermeable, altura de detención para superficies permeable e impermeable y parámetros de infiltración. Además, para las calles se cuenta con información de largo, sección, pendiente y rugosidad. Las figuras a continuación muestran un esquema general de la configuración de las subcuencas de la cuenca 1 y 2. La **Tabla 5** muestra las propiedades de las cuencas agregadas.

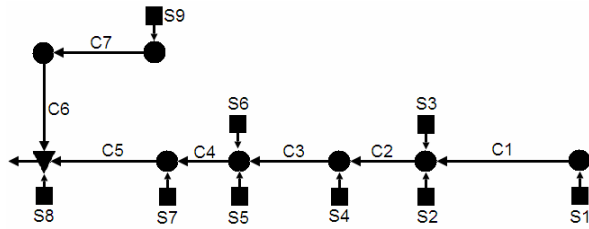


Figura 3.- Configuración de las subcuencas y calles de la cuenca 1.

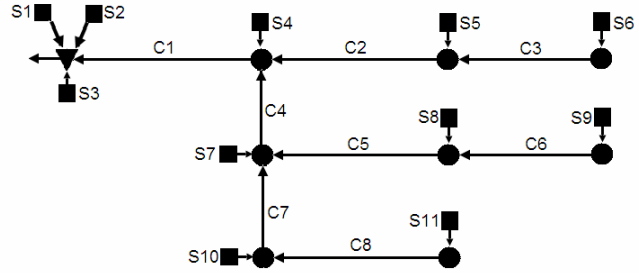


Figura 4.- Configuración de las subcuencas y calles de la cuenca 2.

Tabla 5.- Características agregadas de las cuencas modeladas.

Cuenca	Área (há)	h	S _{di} (mm)	S _{dp} (mm)	f _m (mm/hr)	f _c (mm/hr)	k (hr-1)	R	S _{iw} (mm)*	S _{il} (mm)
1	380.2		2.4	12	73.4	5.0	2.0	0.0005	2.8	14.8
2	100.5		2.0	10	46.5	4.7	2.0	0.0005	1.7	11.6

* Calculado con las propiedades de la cuenca agregada.

Para el cálculo del tiempo de concentración se estimó el tiempo de concentración de cada subcuenca y calle. Para el caso de las subcuencas se utilizó la fórmula de Morgali y Linsley (1965) de la ecuación (29), considerando dos planos paralelos, permeable e impermeable, conectados directamente a la salida de la subcuenca. Para el caso de las calles, se estimó la velocidad de flujo con la ecuación (30) (Urban Drainage and Flood Control District, 2008). Luego se calculó el tiempo completo de viaje asociado a cada camino posible que pudiese seguir el agua hasta el punto de salida de la cuenca.

$$t_c = \frac{7 L^{0.6} n^{0.6}}{60 i^{0.4} S^{0.3}} \quad (29)$$

$$V = 0.3048 \cdot C_v \cdot S^{0.5} \quad (30)$$

Donde L es el largo del plano de escurrimiento (m), n su rugosidad, i la precipitación efectiva (mm/hr), S la pendiente de la cuenca y C_v el coeficiente de transporte, igual a 20 para calles pavimentadas.

Para determinar el valor de precipitación efectiva a reemplazar en la ecuación (29) se sigue la metodología usada por Guo y Adams (1998 b) que consiste en calcular el promedio de la intensidad de lluvia eliminando los eventos que no cumplen las condiciones para generar escorrentía. La Tabla 6 muestra el tiempo de concentración calculado para ambas cuencas.

Tabla 6.- Tiempo de concentración de las cuencas.

Cuenca	t_c (horas)	Camino asociado
1	10	S1-C1-C2-C3-C4-C5
2	5	S6-C3-C2-C1

Luego, calculando numéricamente las integrales de (29) y (26) se obtienen las curvas del modelo analítico. Como una forma de validar este modelo se comparan estos resultados con los obtenidos de la simulación continua en SWMM 5.0 de la EPA y el modelo de Guo y Adams (1998 a,b). Las figuras (5), (6), (7) y (8) muestran las curvas de frecuencia obtenidas en términos de periodo de

retorno del modelo analítico basado en teoría de cópulas, modelo analítico de Guo y Adams (1998) y análisis estadístico de los resultados de simulación continua.

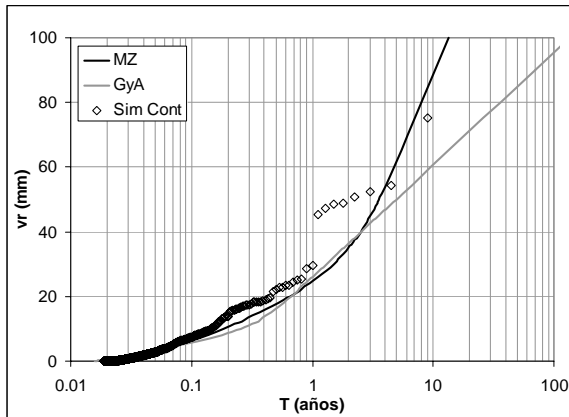


Figura 5.- $F(v_r)$ para la cuenca 1.

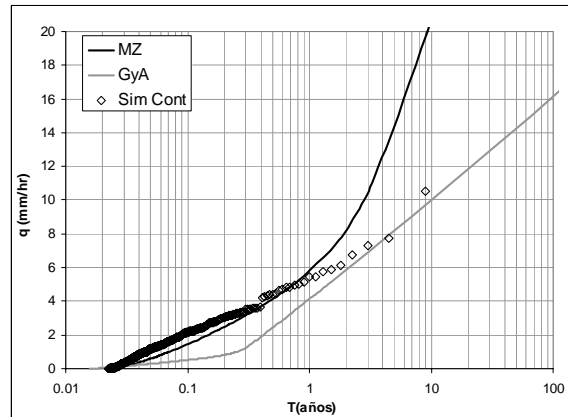


Figura 6.- $F(Q_p)$ para la cuenca 1.

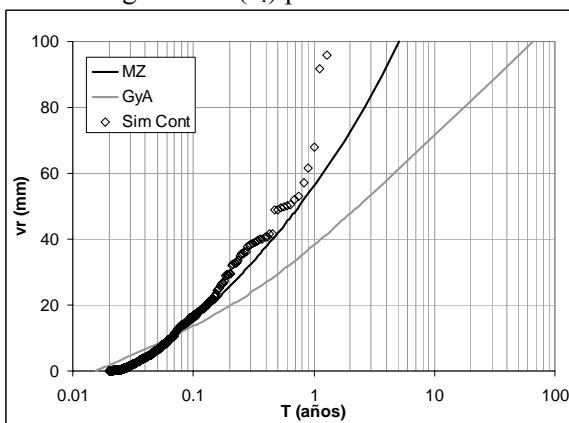


Figura 7.- $F(v_r)$ para la cuenca 2.

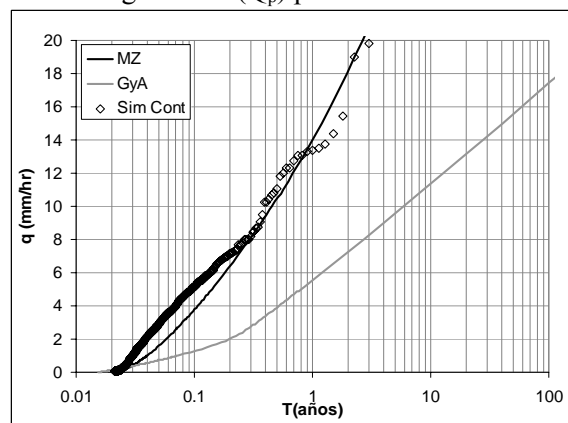


Figura 8.- $F(Q_p)$ para la cuenca 2.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En las figuras (5), (6), (7) y (8) se observa que en términos generales el modelo analítico desarrollado en este trabajo presenta un buen ajuste a los resultados provenientes de la simulación continua en SWMM.

Respecto al volumen de escorrentía, el nuevo modelo presenta un mejor ajuste a los resultados de simulación continua que el modelo de Guo y Adams (1998 a), lo que comprueba que una adecuada representación de la estructura de dependencia de la duración y volumen de tormentas incide en la estimación del periodo de retorno del volumen de escorrentía. Para la cuenca 1, el nuevo modelo presenta un comportamiento similar al de Guo y Adams (1998 a) para eventos con periodo de retorno (T) de hasta 3 años aproximadamente, pero para T superiores este último sobreestima el periodo de retorno calculado de la simulación continua y el nuevo modelo analítico. Por otro lado, en la cuenca 2 ambos modelos analíticos presentan resultados similares para eventos con volumen de escorrentía con T menores que 0.1 años pero para valores mayores el modelo de Guo y Adams (1998 a) tiende a sobreestimar el periodo de retorno. Cabe destacar que la mayor diferencia entre las cuencas modeladas es el nivel de desarrollo urbano. Así, se tiene que el modelo es capaz de reproducir la curva de frecuencia del volumen de escorrentía

obtenida de los resultados de simulación continua en SWMM para cuencas con distintos porcentajes de área impermeable.

Respecto al caudal máximo se observa que para la cuenca 1, con $h=0.2$, el modelo analítico presenta un buen ajuste a los resultados de la simulación continua hasta $T = 1$ año. Para T mayores a 1 año los resultados de SWMM continúan con la tendencia que mostraban hasta dicho valor mientras que la curva del modelo analítico presenta un marcado aumento de pendiente, tendiendo a sobreestimar el caudal máximo respecto a los resultados de SWMM. Sin embargo, los resultados para la cuenca 2, con $h=0.5$, muestran que el modelo analítico se ajusta bastante bien a los resultados de la simulación continua para todo el rango de T . Así, el modelo analítico presenta un mejor desempeño en la estimación de la curva de frecuencia de caudales máximos para cuencas con un mayor nivel de desarrollo urbano. Un parámetro que permite explicar la diferencia entre los resultados provenientes de SWMM y el modelo analítico es el tiempo de concentración de las cuencas, parámetro que siempre presenta una gran incertidumbre al depender de muchos factores, entre ellos la intensidad de lluvia efectiva que varía de tormenta a tormenta y en este caso se ha considerado un valor constante igual al promedio. Por otro lado, el hidrograma de salida de la cuenca depende de la distribución de la lluvia y en este caso, al igual que Guo y Adams (1998 b), se ha adoptado una forma estándar. Este punto es de especial interés ya que es imposible que un hidrograma sea capaz de reproducir la respuesta de todas las cuencas, por lo que para la aplicación de este modelo en otras cuencas se debe explorar la posibilidad de utilizar otros hidrogramas que se ajusten mejor a la aplicación específica. Este modelo tiene mejores resultados cuando h crece ya que la respuesta de la superficie impermeable no depende demasiado de la forma de la lluvia, pero en el caso de la superficie permeable el fenómeno de infiltración depende de los valores instantáneos de capacidad de infiltración e intensidad de lluvia, situación que la simulación continua es capaz de reproducir a lo largo del tiempo, mientras que el modelo analítico es limitado en este sentido por trabajar con valores promediados en el tiempo. Las figuras 6 y 8 muestran que el nuevo modelo se ajusta mejor que el de Guo y Adams (1998 b), lo que se debe a la adecuada reproducción de la estructura de dependencia en el volumen y la duración de tormentas y al cambio de hidrograma de salida utilizado.

Resumiendo, se concluye que una adecuada representación de las tormentas incide en la estimación de la frecuencia de eventos de escorrentía, siendo las cópulas una importante herramienta para lograr buenos resultados. El nuevo modelo analítico reproduce los resultados de la simulación continua bastante bien, en especial para el volumen de escorrentía, y en el caso del caudal máximo tiene mejor desempeño a medida que h aumenta. Por otro lado, a pesar de la complejidad de las expresiones que se deben integrar, el modelo es factible de implementar en una hoja de cálculo, manteniendo las características de compactidad y portabilidad de otros modelos más sencillos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer al profesor J. L. Arumí de la U. de Concepción, Chile por la información de lluvias de la ciudad de Chillán y a la Dirección de Obras Hidráulicas del Ministerio de Obras Públicas por permitir el uso de los datos físicos de las cuencas estudiadas.

REFERENCIAS

- Adams, B. J., and F. Papa (2000). *Urban Stormwater Management Planning with Analytical Probabilistic Models*. John Wiley Sons, Inc., New York.
- Bonta, J. V., and A. R. Rao (1988). "Factors Affecting the Identification of Independent Storm Events". *Journal of Hydrology*, Vol. 98, No. 3-4, pp. 275-293.
- Chow, V. T., D. R. Maidment, and L. W. Mays (1994). *Hidrología Aplicada*. Mc-Graw Hill, Bogotá, Colombia.
- Córdova, J. R., and I. Rodríguez-Iturbe (1985). "On the Probabilistic Structure of storm Surface Runoff". *Water Resources Research*, Vol. 21, No. 5, pp. 755-763.
- Díaz-Granados, M. A., J. B. Valdes, and R. L. Bras (1984). "A Physically Based Flood Frequency Distribution". *Water Resources Research*, Vol. 20, No. 7, pp. 995-1002.
- Eagleson, P. S. (1972). "Dynamics of flood Frequency". *Water Resources Research*, Vol. 8, No. 4, pp. 878-898.
- Favre, A. C., et al. (2004). "Multivariate hydrological frequency analysis using copulas". *Water Resources Research*, Vol. 40.
- Genest, C., and J. MacKay (1986). "The Joy of Copulas: Bivariate Distributions with Uniform Marginals". *The American Statistician*, Vol. 40, No. 4, pp. 280-283.
- Genest, C., and L. P. Rivest (1993). "Statistical-Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas". *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 88, No. 423, pp. 1034-1043.
- Genest, C., and A. C. Favre (2007). "Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask". *Journal of Hydrologic Engineering*, Vol. 12, No. 4, pp. 347-368.
- Goel, N. K., R. S. Kurothe, B. S. Mathur, and R. M. Vogel (2000). "A derived flood frequency distribution for correlated rainfall intensity and duration". *Journal of Hydrology*, Vol. 228, No. 1-2, pp. 56-67.
- Guo, Y. P., and B. J. Adams (1998a). "Hydrologic analysis of urban catchments with event-based probabilistic models - 1. Runoff volume". *Water Resources Research*, Vol. 34, No. 12, pp. 3421-3431.
- Guo, Y. P., and B. J. Adams (1998b). "Hydrologic analysis of urban catchments with event-based probabilistic models - 2. Peak discharge rate". *Water Resources Research*, Vol. 34, No. 12, pp. 3433-3443.
- Kurothe, R. S., N. K. Goel, and B. S. Mathur (1997). "Derived flood frequency distribution for negatively correlated rainfall intensity and duration". *Water Resources Research*, Vol. 33, No. 9, pp. 2103-2107.
- Ministerio de Vivienda y Urbanismo (1996). *Técnicas Alternativas para Soluciones de Aguas Lluvias en Sectores Urbanos*. Guía de Diseño. Santiago, Chile.
- Maidment, D. R. (1993). *Handbook of Hydrology*. Mc-Graw Hill, USA.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer Science+Business Media, Inc., New York.
- Quader, A., and Y. P. Guo (2006). "Peak discharge estimation using analytical probabilistic and design storm approaches". *Journal of Hydrologic Engineering*, Vol. 11, No. 1, pp. 46-54.
- Raines, T. H., and J. B. Valdes (1993). "Estimation of Flood Frequencies for Ungaged Catchments". *Journal of Hydraulic Engineering-Asce*, Vol. 119, No. 10, pp. 1138-1154.
- Restrepo-Posada, P. J., and P. S. Eagleson (1982). "Identification of independent rainstorms". *Journal of Hydrology*, Vol. 55, No. 1-4, pp. 303-319.
- Rivera, P., J. Gironás, J. P. Montt, and B. Fernández (2005). "An Analytical Model for Hydrologic Analysis in Urban Watersheds". 10th International Conference on Urban Drainage, Copenhagen, Denmark, August 2005.
- Rossman, L. A. (2007). *Storm Water Management Model Users's Manual*. Version 5.0. USEPA, Cincinnati, Ohio, USA.
- Salvadori, G., and C. De Michele (2004). "Frequency analysis via copulas: Theoretical aspects and applications to hydrological events". *Water Resources Research*, Vol. 40.
- Salvadori, G., and C. De Michele (2006). "Statistical characterization of temporal structure of storms". *Advances in Water Resources*, Vol. 29, No. 6, pp. 827-842.
- Soil Conservation Service (1972). *Hydrology*. SCS National Engineering Handbook, sec. 4. US Department of Agriculture, Washington, D.C.
- Urban Drainage and Flood Control District (2008). *Drainage Criteria Manual*. Vol. 1. Denver, Colorado. USA.
- Zhang, L., and V. P. Singh (2007). "Bivariate rainfall frequency distributions using Archimedean copulas". *Journal of Hydrology*, Vol. 332, No. 1-2, pp. 93-109.
- Zegpi, M. (2008). "Modelo Analítico para el Comportamiento Hidrológico de Cuenca Urbanas". Tesis no publicada para optar el grado de Magister en Ciencias de la Ingeniería. Pontificia Universidad Católica de Chile. Santiago. Chile.