

# **SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA**

## **XIX CONGRESO CHILENO DE HIDRAULICA**

### **EXTENSION DE UN ESQUEMA NUMÉRICO PARA EL CÁLCULO DEL FLUJO EN EL CASO 2DH**

**CRISTIAN IBACACHE M.<sup>1</sup>**  
**JEANNETTE DONOSO L.<sup>2</sup>**  
**OSCAR LINK L.<sup>3</sup>**

#### **RESUMEN**

Se presenta una extensión del esquema numérico propuesto por Link y Donoso (2008) para la solución discreta de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de aguas someras en el caso bidimensional horizontal. El esquema resuelve las ecuaciones gobernantes de forma explícita utilizando volúmenes finitos rectangulares y triangulares para la discretización espacial. Los resultados del modelo se evalúan, mediante dos experimentos numéricos: (1) la rotura asimétrica de una presa recta y (2), la rotura instantánea de una presa circular. Los resultados obtenidos se comparan con aquellos publicados por otros autores, quienes utilizaron técnicas numéricas distintas a las propuestas en este trabajo, obteniendo una buena concordancia, por lo que se concluye que el modelo desarrollado es de buena calidad y más versátil que otros propuestos en la literatura.

---

<sup>1</sup> Ingeniero Civil, Universidad de Concepción – mail: [cribacache@udec.cl](mailto:cribacache@udec.cl)

<sup>2</sup> Ingeniero Civil, Alumno de Magíster en Cs. de la Ingeniería, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Concepción - mail: [jdonoso@udec.cl](mailto:jdonoso@udec.cl)

<sup>3</sup> Profesor Asistente, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Concepción - mail: [olink@udec.cl](mailto:olink@udec.cl)

## 1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de aguas someras no tienen una solución analítica general, por lo que para resolverlas se aplican métodos de cálculo numérico. El método de los volúmenes finitos presenta la ventaja frente a otros similares, de garantizar la conservación de los flujos en cada punto del dominio de cálculo. El flujo numérico admite diferentes formulaciones o esquemas de discretización espacial e.g. esquemas tipo *flux-splitting* (Vijayasundaram, 1982 modificado por Chacón *et al.*, 2003) y esquemas tipo *flux-difference-splitting* (van Leer, 1982 modificado por Bermúdez y Vázquez, 1993). Donoso y Link (2007) y Link y Donoso (2008) propusieron y evaluaron la calidad de un esquema de *shock* para la discretización de las ecuaciones de aguas someras en el caso unidimensional.

La extensión de los esquemas de discretización al caso bidimensional no es trivial y se dificulta cuando se utilizan volúmenes triangulares (e.g. Bermúdez *et al.* 1998). Namin *et al.* (2004) presentaron esquemas de segundo y tercer orden de exactitud en la modelación de una corriente estuarina, discretizando el término de flujo mediante la aplicación del esquema de Roe. Aricò *et al.* (2007) propusieron un esquema del tipo predictor-corrector en volúmenes finitos. En los trabajos citados, es requisito utilizar volúmenes rectangulares, y/o almacenar información en los nodos de los volúmenes, lo que es desventajoso porque involucra un costo computacional mayor al que se tiene almacenando sólo valores en los centros de los volúmenes.

En el presente trabajo se muestra la extensión del esquema propuesto por Donoso y Link (2007) y Link y Donoso (2008) al caso bidimensional horizontal, utilizando volúmenes finitos rectangulares y triangulares. Por simplicidad, sólo se presenta el problema homogéneo.

## 2. ECUACIONES GOBERNANTES

Las ecuaciones gobernantes del movimiento de aguas someras en el caso bidimensional son

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = S \quad (1)$$

con

$$W = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix}, \quad F_x = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{gh^2}{2} \\ uvh \end{pmatrix}, \quad F_y = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}, \quad S = 0 \quad (2)$$

donde  $h$  es la profundidad del escurrimiento,  $u$  y  $v$  las velocidades promediadas en la vertical y  $g$ , la aceleración de gravedad. El sistema de ecuaciones gobernantes es

estrictamente hiperbólico, i.e. posee valores propios distintos y vectores propios linealmente independientes. La matriz Jacobiana asociada al sistema se define de manera que:

$$A(W, (n_x, n_y)) = n_x A_x(W) + n_y A_y(W) \quad (3)$$

donde  $W$  es el vector de las variables del flujo,  $\tilde{n} = (n_x, n_y)$  es un vector normal unitario que apunta hacia el exterior del volumen, cuyas proyecciones en los eje  $x$  e  $y$  son  $n_x$  y  $n_y$ , respectivamente, y  $A_x$  y  $A_y$  son las matrices Jacobianas de los vectores  $F_x$  y  $F_y$  definidos en (2).

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{q_x^2}{h^2} + gh & 2\frac{q_x}{h} & 0 \\ -\frac{q_x q_y}{h^2} & \frac{q_y}{h} & \frac{q_x}{h} \end{pmatrix} \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{q_x q_y}{h^2} & \frac{q_y}{h} & \frac{q_x}{h} \\ -\frac{q_y^2}{h^2} + gh & 0 & 2\frac{q_y}{h} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Se utilizan las matrices auxiliares  $A_x^*$  y  $A_y^*$  tales que (Bermúdez *et al.* 1998):

$$F_i(W) = A_i^*(W)W \quad (i = x, y) \quad (5)$$

Por lo que las matrices Jacobianas a considerar son:

$$A_x^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{q_x^2}{h^2} + \frac{1}{2}gh & 2\frac{q_x}{h} & 0 \\ -\frac{q_x q_y}{h^2} & \frac{q_y}{h} & \frac{q_x}{h} \end{pmatrix} \quad A_y^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{q_x q_y}{h^2} & \frac{q_y}{h} & \frac{q_x}{h} \\ -\frac{q_y^2}{h^2} + \frac{1}{2}gh & 0 & 2\frac{q_y}{h} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Los valores propios de la matriz  $A^* = n_x A_x^* + n_y A_y^*$  son:

$$\lambda_1^* = n_x u + n_y v \quad \lambda_2^* = \lambda_1^* + c^* \quad \lambda_3^* = \lambda_1^* - c^* \quad (7)$$

donde  $c^* = \sqrt{0.5gh}$ .

### 3. FORMA DISCRETA DE LAS ECUACIONES GOBERNANTES

Sobre cada volumen se integran las ecuaciones gobernantes:

$$\int_v \frac{\partial W}{\partial t} dv + \int_v \nabla F dv = 0 \quad (8)$$

La discretización temporal se realizó con el esquema de Euler explícito:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{W_{x,y}^{t+\Delta t} - W_{x,y}^t}{\Delta t} \quad (9)$$

Reemplazando la ecuación (9) en (8) y aplicando el teorema de Gauss al término de flujo se tiene:

$$A_i \frac{W_{x,y}^{t+\Delta t} - W_{x,y}^t}{\Delta t} + \oint_s \bar{F} \cdot \tilde{n} ds = 0 \quad (10)$$

$A_i$  es el área del volumen finito,  $ds = \sum \Gamma_{ij}$  el perímetro, donde la cantidad de volúmenes con los que se evalúa el flujo depende de su geometría. El flujo a través de las caras de un volumen se evalúa como:

$$\oint_s F \cdot n ds \approx \sum_{r=1} F_r \cdot \tilde{n}_r ds \quad (11)$$

donde  $ds$  representa el perímetro de la celda en el plano  $xy$ . El cálculo de la integral sobre el lado  $\Gamma_{ij}$  se realiza utilizando una función de flujo numérico  $\Phi$ , que aproxima el término del flujo como:

$$\int_{\Gamma_{ij}} F(W_{x,y}^t) \cdot \tilde{n}_{ij} d\sigma \approx \Gamma_{ij} \Phi(W_i^t, W_j^t, \tilde{n}_{ij}) \quad (12)$$

$\Gamma_{ij}$  es la longitud del lado y  $\Phi$  es:

$$\Phi(U, V, \tilde{n}) = \frac{Z(U, \tilde{n}) + Z(V, \tilde{n})}{2} - \frac{1}{2} |Q(W_Q(U, V), \tilde{n})| (V - U) \quad (13)$$

$U$  y  $V$  representan vectores de variables consecutivos en el espacio,  $\tilde{n}$  es el vector unitario normal a la cara en que existe el flujo en dirección desde  $U$  hacia  $V$ , y  $Q$  es la matriz Jacobiana de la función  $Z$  que se define como:

$$Z(W^t, \tilde{n}) = F_x(W^t) n_x + F_y(W^t) n_y \quad (14)$$

De acuerdo a van Leer (1982):

$$W_Q(U, V) = \frac{U + V}{2} \quad (15)$$

La matriz  $A^*$  es una matriz diagonalizable, tal que

$$A^* = X\Lambda X^{-1} \quad (16)$$

con:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -cn_y & u + cn_x & u - cn_x \\ cn_x & v + cn_y & v - cn_y \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1^* & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^* & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^* \end{pmatrix} \quad (18)$$

Para evitar valores propios nulos se aplicó la corrección de entropía de Harten y Lax (1984). La matriz  $Q$  se evalúa como:

$$Q = X|\Lambda|X^{-1} \quad (19)$$

#### 4. CONDICIONES DE BORDE

El borde cerrado se modeló, imponiendo el flujo perpendicular a la cara del borde igual a cero,  $q \cdot \tilde{n} = 0$ . El flujo nulo en la dirección perpendicular se asegura restando directamente las componentes del flujo en la dirección normal a la cara:

$$q^{t+1} = q^t + (\Delta q - \Delta q \cdot \tilde{n}) \quad (20)$$

donde  $q$  representa las componentes del caudal por unidad de ancho en las direcciones  $x$  e  $y$ .  $\Delta q$  representa la diferencia entre las últimas dos componentes del vector  $\Delta W$  dado por la siguiente expresión:

$$\Delta W_i = -\sum \Phi(W_i, W_j, \tilde{n}_{ij}) - Z(W_i, \tilde{n}_{ib}) \quad (21)$$

El subíndice  $b$  indica que la cara se encuentra en el borde del dominio.

El borde abierto se modeló imponiendo una condición Dirichlet:

$$W_i^{t+\Delta t} = W_i^t - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{j=1}^3 \Gamma_{ij} \Phi(W_i^t, W_j^t, \tilde{n}_{ij}) - \frac{\Delta t}{A_i} \Gamma_{ib} \Phi(W_i^t, W_i^t, \tilde{n}_{ib}) \quad (22)$$

## 5. CALIDAD DEL ESQUEMA PROPUESTO

El modelo propuesto se evaluó mediante dos test de simulación: (1) la rotura asimétrica de una presa recta y (2) la rotura instantánea de una presa circular.

### 5.1 ROTURA ASIMÉTRICA DE UNA PRESA

El dominio de cálculo de 200 x 400 m se discretizó con volúmenes finitos cuadrados de 5 m de lado. El paso de tiempo utilizado fue de 0.01 s. Las condiciones iniciales fueron:

$$h = \begin{cases} 10 \text{ m} & \text{para } x < 100 \text{ m} \\ 5 \text{ m} & \text{para } x > 100 \text{ m} \end{cases}$$

$$u = v = 0 \text{ m/s } \forall x, y$$

Los volúmenes de borde en el extremo de aguas abajo ( $x = 400 \text{ m}$ ) se consideraron abiertos. Los volúmenes de borde en contacto con la presa, en el extremo aguas arriba y en los costados del dominio se consideraron cerrados. La Figura 4 muestra las líneas de corriente y la magnitud de la velocidad calculadas para  $t = 30$  y  $60 \text{ s}$ .

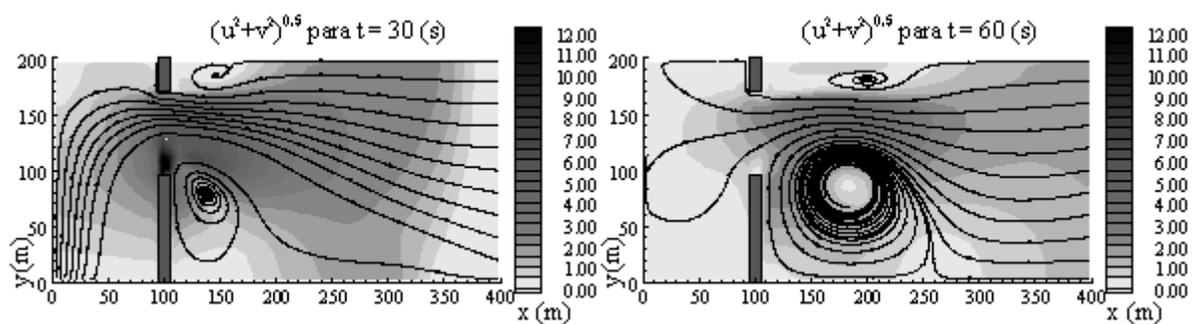


Figura 4. Líneas de corriente y magnitud de la velocidad calculada 30 (izq.) y 60 (der.) s después de la rotura asimétrica de la presa

Se observa, de acuerdo con lo esperado, que la magnitud de la velocidad aumenta en las zonas donde se estrangulan las líneas de corriente. Durante el vaciamiento se generan dos zonas de recirculación aguas abajo de la presa, que presentan una asimetría similar a la del

rompimiento. La figura 5 muestra la superficie libre sobre la malla de cálculo y las curvas de igual profundidad vistas en planta para  $t=0, 5, 7$  y  $10$  s.

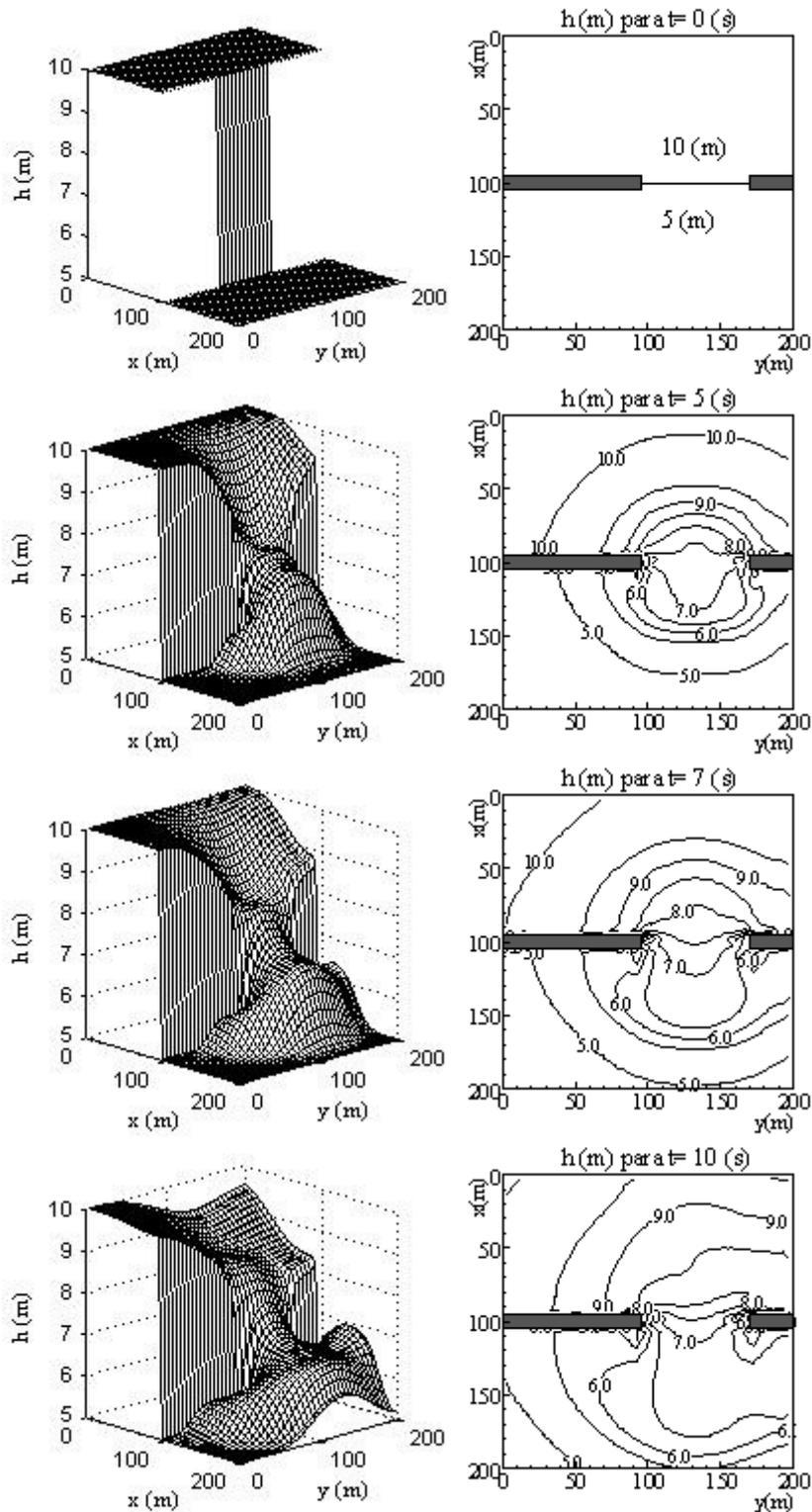


Figura 5. Superficie libre sobre la malla de cálculo (izq.) y curvas de igual profundidad vistas en planta (der.) para  $t=0, 5, 7$  y  $10$  s.

Se observa que los resultados numéricos son consistentes con la física del problema. La figura 6 muestra los resultados obtenidos con el esquema propuesto y por Mingham y Causon (1998) para  $t=7.2$  s.

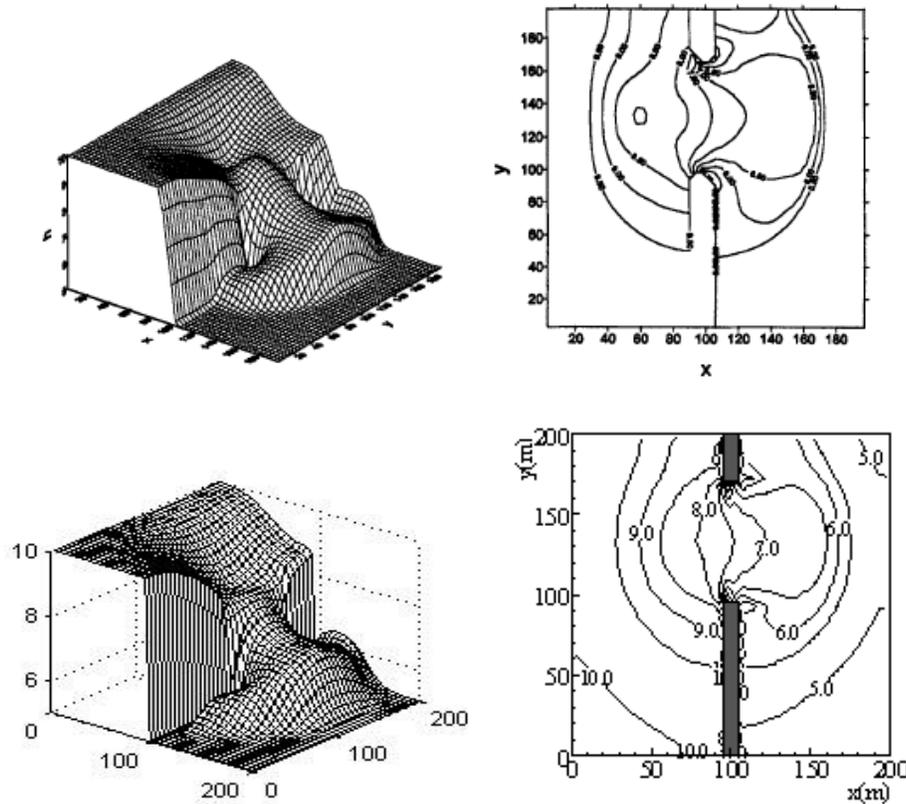


Figura 6. Resultados obtenidos con el esquema propuesto y por Mingham y Causon (1998) para  $t=7.2$  s

Se observa una buena consistencia entre los resultados obtenidos con el modelo propuesto y por Mingham y Causon (1998).

## 5.2 ROTURA INSTANTÁNEA DE UNA PRESA CIRCULAR

El dominio de cálculo de  $50 \times 50$  m se discretizó mediante volúmenes triangulares isotópicos de altura característica igual a 1 m, que constituyen una malla triangular no estructurada. El paso de tiempo fue de 1 s. El dominio se simuló con todos los bordes abiertos. Las condiciones iniciales fueron:

$$h = \begin{cases} 10 \text{ m si } \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2} \leq 11 \text{ m} \\ 1 \text{ m si } \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2} > 11 \text{ m} \end{cases}$$

$$u = v = 0 \text{ m/s } \forall x, y$$

La figura 7 muestra los resultados obtenidos con el modelo propuesto y por Mingham y Causon (1998) y Gottardi y Venutelli (2004) para  $t = 0.69$  s.

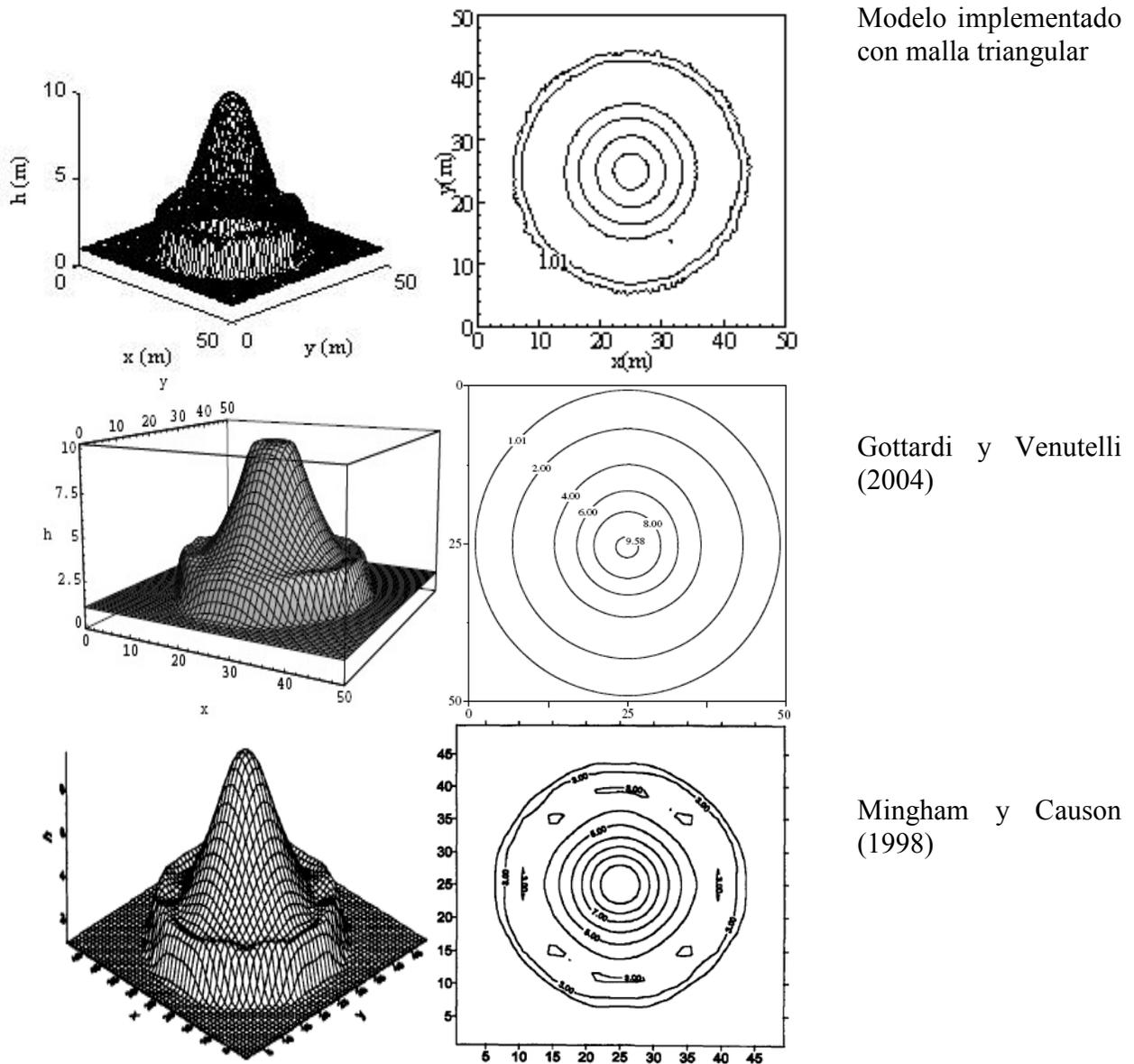


Figura 7. Superficie libre sobre la malla de cálculo (izq.) y curvas de igual profundidad vistas en planta (der.) para  $t=0.69$  s, obtenidos con el modelo propuesto, por Mingham y Causon (1998) y Gottardi y Venutelli (2004)

Se observa que los resultados obtenidos con el modelo propuesto utilizando mallas triangulares conservan mejor la simetría radial de la solución, en parte debido a que los volúmenes triangulares se adaptan mejor a la geometría circular de la presa.

## 6. CONCLUSION

Se presentó una extensión del esquema conservativo y de alta resolución propuesto por Link y Donoso (2008) para la solución discreta de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de aguas someras en el caso bidimensional horizontal.

Se resolvió la forma discreta de las ecuaciones homogéneas que gobiernan el movimiento de aguas someras para simular la rotura asimétrica de una presa recta y la rotura instantánea de una presa circular.

Se obtuvo resultados consistentes con la física de los problemas simulados y una buena concordancia con resultados obtenidos por otros autores que utilizaron técnicas de solución distintas a la propuesta en este trabajo. Destaca la versatilidad del esquema propuesto, ya que permite discretizar dominios mediante triángulos que se adaptan muy bien a geometrías irregulares y curvas.

## REFERENCIAS

Aricò, C., Nasello, C. y Tucciarelli, T. (2007) A marching in space and time (MAST) solver of the shallow water equations. Part II: The 2D model. *Advances in Water Resources*. 30. 1253-1271.

Bermúdez, A., Dervieux, A., Desideri, J. y Vázquez, M. (1998) Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 155. 49-72.

Bermúdez, A. y Vázquez, M. (1993) Upwind Métodos for Hyperbolic Conservation Laws with Source Terms. *Computer and Fluids*. 23(8). 1049-1071.

Chacón, T., Domínguez, A. y Fernández, E. (2003a) Flux Splitting Solvers for Shallow Water Equations with Source Terms. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 42(1). 23-55.

Chacón, T., Domínguez, A. y Fernández, E. (2003b) A Family of Stable Numerical Solvers for the Shallow Water Equations with Source Terms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 192(1-2). 203-225.

Donoso, J. y Link, O. (2007). Un modelo numérico conservativo, de alta resolución, para el cálculo del flujo en canales abiertos, basado en el método de los volúmenes finitos. XVIII Congreso Chileno de Ingeniería Hidráulica.

Gottardi G. y Venutelli M. (2004). Central scheme for two-dimensional dam-break flow simulation. *Advances in Water Resources*. 27:259-268.

Harten, A. y Lax, P. (1984) On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 21(1):1-23.

Link, O. y Donoso, J. (2008) Development and Verification of a Numerical Model for Calculation of Hydrodynamics in Open Channels using the Finite Volume Method. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*. 56(3):190-200.

Mingham, C. y Causon, D. (1998) High-resolution finite-volume method for shallow water flows. *Journal of Hydraulic Engineering*. Vol. 124(6):605-614.

Namin, M., Lin, B. y Falconer, R. (2004). Modelling estuarine and coastal flows using an unstructured triangular finite volume algorithm. *Advances in Water Resources*. 27:1179-1197.