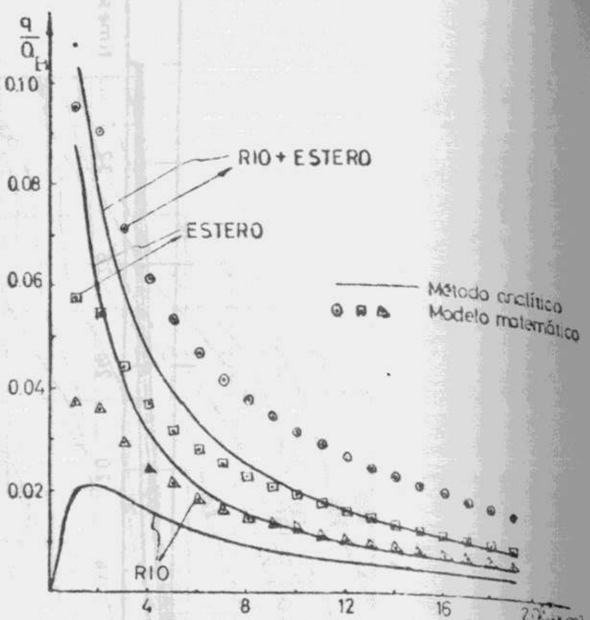



FIGURA N°5

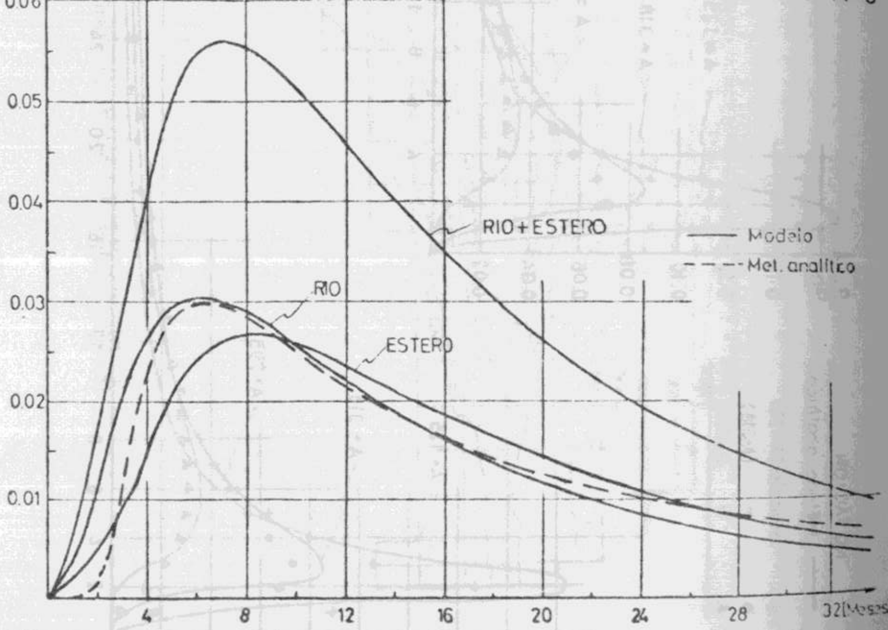



FIGURA N°6



# CALCULO DE UNA FORMULA DE COLOCACION LINEAL PARA APLICAR EL PROCEDIMIENTO DE MOMENTOS ESTADISTICOS

Por

Sergio Radrigán Vogel (*)

## R E S U M E N

Se presentan las propiedades generales de las fórmulas de colocación de un conjunto de datos que tienen distribución gaussiana. Enseguida se analizan las propiedades de las fórmulas de colocación simétricas de tipo polinómico y se calcula su grado en función de la cantidad de parámetros estadísticos que se le desean imponer.

El trabajo concluye con el cálculo de la fórmula de colocación lineal que satisface la varianza, usando el procedimiento de momentos estadísticos, y con una comparación con las fórmulas clásicas de Hazen y Weibull.

(*) Jefe del Departamento de Ingeniería Civil, ENDESA
Profesor de la Escuela de Ingeniería de la Universidad Católica de Chile.

# 1. EXPOSICION DEL PROBLEMA

## 1.1 Introducción

El método clásico para analizar las propiedades estadísticas de un conjunto de datos, generalmente de carácter hidrológico, consiste esencialmente en suponer que ellos constituyen una muestra distribuida equiprobablemente y enseguida tantear alguna ley de distribución teórica o empírica que los interprete en la mejor forma posible.

Esta ley de distribución - teórica o empírica - puede darse a priori, si hay alguna razón que la justifique, o simplemente a posteriori, como resultado de un simple proceso de suavización algebraica o pictórica del fenómeno. Por lo general, para alcanzar esta interpretación se usan métodos algebraicos y gráficos combinados.

Estos métodos son lentos y laboriosos y no permiten el uso intensivo de los procesos computacionales automáticos. Si bien, por una parte, tienen la ventaja de poder visualizar el desarrollo de toda la marcha del análisis y, por tanto, de permitir un alto grado de manipuleo y ajuste de los datos, por esta misma razón permiten introducir también una alta dosis de efectos subjetivos en forma paulatina y con ello conducir a resultados parciales o intencionados.

La aparición de procedimientos computacionales automáticos más rápidos, más objetivos, pero también más ciegos, hace necesario hacer explícitos los métodos clásicos, completar los algoritmos y, lo que es más importante, exige muchas veces revisar asuntos conceptuales que parecían obvios y que, sin embargo, analizados en profundidad contienen elementos de trascendencia conflictiva.

## 1.2 Colocación de datos discretos en una curva de distribución normal gaussiana

Como consecuencia de tener que realizar una gran cantidad de análisis de distribución de datos hidrológicos nos vimos obligados a aplicar el método computacional desarrollado para el microcomputador TI 59 por la firma Texas Instruments y que forma parte del módulo N° 2 "Estadística Aplicada".



El método consiste, en resumen, en entrar los datos, aplicar una transformación algebraica adecuada, ajustar una curva de distribución clásica y calcular los momentos estadísticos. Los valores numéricos obtenidos de estos momentos estadísticos permiten, en teoría, realizar los diagnósticos de la muestra de datos entrada.

En esencia, el procedimiento aparenta ser expedito, rápido, impersonal y mediante el agregado de algunas partes de programa puede permitir estudiar la influencia de datos sospechosos o conflictivos. Sin embargo, el procedimiento supone implícitamente que se pueden aplicar las técnicas clásicas sin mayor revisión de algunos análisis numéricos. Como veremos más adelante, si no se realizan estos análisis numéricos, se puede cometer graves errores de diagnóstico con este método.

A nuestro juicio, dos fueron los problemas cruciales a que nos vimos enfrentados cuando aplicamos este método, cuyo análisis no encontramos en la literatura corriente:

El primero se refiere al hecho de manejar una muestra relativamente pequeña de datos discretos (entre 10 y 70 datos).

El segundo se refiere a la interpretación y diagnóstico de las propiedades estadísticas de la muestra y a una sistematización adecuada en la definición de la función de transformación de las variables.

En el presente trabajo sólo nos referiremos al primer aspecto, o sea, a la definición de la colocación de pocos datos discretos en una curva de distribución.

Desde un punto de vista teórico y dentro de límites muy amplios se puede emplear cualquier curva de distribución razonable, ajustando las variables mediante una transformación adecuada.

Al respecto se ha preferido elegir la distribución de Gauss por varios motivos fundamentalmente pragmáticos: está tabulada e interpretada convenientemente, se conocen las aproximaciones polinómicas directas e inversas que permitan un rápido cálculo computacional, es centrada alrededor del promedio, es infinita en sus colas y posee todos los momentos estadísticos.

También, desde un punto de vista práctico, mediante una adecuada transformación matemática es posible adaptar cualquier distribución razonable a una distribución gaussiana, de tal modo que es suficiente estudiar esta transformación para aplicar enseguida un método normalizado de interpretación y diagnóstico estadístico.

El segundo problema a que nos referíamos más arriba se refiere justamente al estudio de esta transformación, (para la cual hemos acuñado el término de transnormalización), en una forma sistemática y deducir sus cualidades estadísticas y no lo trataremos en este trabajo.

## 2. FORMULA GENERAL DE COLOCACION DE DATOS EN UNA CURVA DE DISTRIBUCION

### 2.1 Principios básicos

El principio clásico usado en hidrología para inferir las propiedades de la población a partir de una muestra de N datos discretos es hacer las siguientes hipótesis:

- Cada dato es independiente.
- Cada dato representa igual probabilidad de ocurrencia.
- El conjunto de datos representa el universo de probabilidades, o sea, la certeza.

De estas hipótesis básicas se deduce inmediatamente que cada dato representa un intervalo de probabilidad

$$\Delta P = \frac{1}{N} \qquad (1)$$



ya que el conjunto de datos representa el universo de probabilidades :

$$\sum_{1}^{N} \Delta P = \frac{1}{N} \cdot N = 1$$

El procedimiento clásico para iniciar los cálculos consiste en ordenar los datos de menor a mayor (o inversamente) y asignar a los datos un número de orden $m$ creciente desde $1$ hasta $N$.

El paso siguiente consiste en asignar a cada número $m$ una probabilidad acumulativa de ocurrencia que es proporcional a $m$. Esta propiedad es consecuencia de la hipótesis de la equiprobabilidad de los datos.

En efecto, si cada dato es equiprobable con intervalo de probabilidad $\Delta P = 1/N$ el dato de orden $m$ tiene una probabilidad acumulativa:

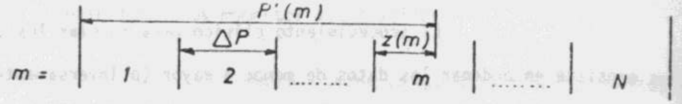
$$P(m) = \sum_{1}^{m} \Delta P$$

$$= m \ \Delta P$$

$$= \frac{m}{N} \qquad (2)$$

Sin embargo, el problema crucial que se presenta es saber dónde ubicar el dato de orden $m$ dentro del intervalo $\Delta P$ para que represente convenientemente las propiedades estadísticas del conjunto que se pretende analizar. La idea más simplista, deducida de las propiedades del valor medio de una función, sería asignarle el punto medio del intervalo $\Delta P$. Sin embargo, como veremos más adelante, esta suposición es muy restrictiva y conviene relajarla sobre la base de que el punto $P'(m)$, que represente el intervalo $\Delta P$ de orden $m$, se ubique en cualquier abscisa dentro de ese intervalo.

Si llamamos $z(m)$ esta abscisa local (ver diagrama) se tendrá $p'(m) = (m-1)\cdot\Delta P + z(m)$ (3)




en que $z(m)$ será una función del número de orden $m$, sujeta a las restricciones $0 \leq z(m) \leq \Delta P$.

Si se introduce la ec (1) en (3) resulta :

$$P'(m) = \frac{(m-1)}{N} + z(m) \qquad (4)$$

que es la fórmula general de colocación.

Según sea la función que se asigne a $z(m)$ resultarán distintas fórmulas de colocación.

Hay que hacer notar que la restricción

$$0 \leq z(m) \leq \Delta P$$

no es trivial y responde a una necesidad de orden analítico para el caso que $m \rightarrow \infty$.

2.2 Fórmula simétrica

Es particularmente interesante estudiar la condición que debe cumplir $z(m)$ para que la distribución sea simétrica central.

La condición impuesta por la simetría central se expresa escribiendo que los puntos equidistantes de los extremos (o del centro) tienen probabilidad complementaria:

$$P'(m) + P'(N+1-m) = 1 \qquad (5)$$



Si se introduce la ec (5) en (4) y se usa la ec (1) resulta finalmente

$$z(m) + z(N+1-m) = \frac{1}{N} \qquad (6)$$

como condición de simetría, que también puede deducirse fácilmente del diagrama.

La distancia entre dos puntos sucesivos es:

$$\Delta P' = z(m+1) - z(m) + \frac{1}{N} \qquad (7)$$

Definamos la abscisa $\bar{m} = \frac{N+1}{2}$

De aquí resulta:

$$z(N+1-\bar{m}) = z\left(\frac{N+1}{2}\right) = z(\bar{m})$$

y, por tanto, introduciendo en (6):

$$z(\bar{m}) = \frac{\Delta P}{2} \qquad (8)$$

En estricto rigor, de acuerdo con la definición de la función $z(m)$ dada en 2.1, ésta estaría definida sólo para valores enteros de $m$ por lo cual la ecuación (8) no tendría sentido si $N$ fuera par. Sin embargo, es conveniente extender esta definición a valores fraccionarios de $m$ para los efectos del análisis, y volver sobre las restricciones de $m$ entero en las conclusiones finales.

Hechas estas consideraciones, y sin restar generalidad, definimos la función $U$ tal que:

$$U(m-\bar{m}) = z(m) - \frac{\Delta P}{2} \qquad (9)$$

Si en (9) reemplazamos el argumento $m$ por

$$N+1-m = 2\bar{m}-m,$$

resulta

$$U(\bar{m}-m) = z(2\bar{m}-m) - \frac{\Delta P}{2}$$

pero, en virtud de (6)

$$z(2\bar{m}-m) - \frac{\Delta P}{2} = \frac{\Delta P}{2} - z(m)$$

$$U(\bar{m}-m) = \frac{\Delta P}{2} - z(m) = -U(m-\bar{m})$$

o sea, en general, $U(x) = -U(-x)$

Por tanto, la función $U$ es antisimétrica o impar, y como corolario $U(o) = 0$

Si se introduce el valor

$$z(m) = U(m-\bar{m}) + \frac{\Delta P}{2}$$

en la ec (3), resulta:

$$P'(m) = \frac{m-\bar{m}}{N} + U(m-\bar{m}) + \frac{1}{2}$$

y si ponemos $\Pi(m-\bar{m}) = \frac{m-\bar{m}}{N} + U(m-\bar{m})$

resulta finalmente

$$P'(m) = \Pi(m-\bar{m}) + \frac{1}{2} \qquad (10)$$

como fórmula general de colocación simétrica central.

Observación:

La función $\Pi(m-\bar{m})$ también es antisimétrica: $\Pi(x) = -\Pi(-x)$

$$\Pi(o) = 0$$



De aquí: $P'(\bar{m}) = \frac{1}{2}$ (10')

## 2.2.1 Desarrollo polinómico de la fórmula símétrica

Un caso particularmente útil es definir la función $\Pi$ como un polinomio de coeficientes indeterminados. En virtud de su propiedad antisimétrica, la función $\Pi$ puede desarrollarse como

$$\Pi(m-\bar{m}) = \left\{A_1(m-\bar{m}) + A_3(m-\bar{m})^3 + \cdots + A_{2j+i}(m-\bar{m})^{2j+i}\right\}\Delta P \qquad (11)$$

con lo cual queda:

$$P'(m) = \left\{A_1(m-\bar{m}) + A_3(m-\bar{m})^3 + \cdots + A_{2j+i}(m-\bar{m})^{2j+1}\right\}\Delta P + \frac{1}{2} \qquad (12)$$

$$z(m) = \left\{(A_1-1)(m-\bar{m}) + A_j(m-\bar{m})^3 + \cdots + A_{2j+1}(m-\bar{m})^{2j+1} + \frac{1}{2}\right\}\Delta P \qquad (13)$$

El desarrollo polinómico dado por (12) o (13) tiene $j+1$ parámetros $A$ libres cuando alcanza el grado $2j+1$.

La restricción dada por $0 \leq z(m) \leq \Delta P$ impone la condición equivalente

$$\left|(A_1-1)(m-\bar{m}) + A_3(m-\bar{m})^3 + \cdots + A_{2j+1}(m-\bar{m})^{2j+1}\right| \leq \frac{1}{2} \qquad (14)$$

para todo $m = 1, 2, \cdots, N$.

## 2.2.2 Fórmulas simétricas lineales

Si restringimos el polinomio al primer término se obtienen funciones lineales en $m$

$$P'(m) = A_1(m-\bar{m})\,\Delta P + \frac{1}{2} \qquad (12')$$

$$z(m) = \left[(A_1-1)(m-\bar{m}) + \frac{1}{2}\right]\Delta P \qquad (13')$$

que se desarrollan:

$$P'(m) = \frac{1}{2} + A_1 \, \frac{2m-N-1}{2N} \qquad (12")$$

$$z(m) = \frac{2+N-2m}{2N} + A_1 \, \frac{2m-N-1}{2N} \qquad (13")$$

La ec. (12") constituye la fórmula de colocación simétrica lineal más general.

Dada la estructura de (12"), se le puede dar otra forma del tipo general

$$P'(m) = \alpha + \beta m$$

en que $\alpha$ y $\beta$ son constantes ligadas a $A_1$ por:

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{N+1}{2N} A_1 \qquad (15)$$

$$\beta = \frac{A_1}{N} \qquad (16)$$

La distancia entre puntos colocados es:

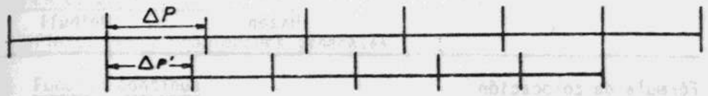
$$\Delta P' = \beta = \frac{A_1}{N} \qquad (17)$$

Si la distancia $\Delta P' > \Delta P$ la fórmula de colocación se denomina dilatante y en caso contrario, contrayente. Si $\Delta P' = \Delta P$ se llama centrada.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Por tanto, si | $A_1 > 1,$ | $\beta > 1/N$ | es dilatante |
| si | $A_1 < 1,$ | $\beta < 1/N$ | es contrayente |
| si | $A_1 = 1,$ | $\beta = 1/N$ | es centrada |

Si hay $N$ puntos, existen $N-1$ intervalos entre ellos. Su distancia mínima se obtiene cuando el primer punto está al final del primer intervalo y el último punto al comienzo del último intervalo equiprobable.






$$(N-1)\ \Delta P'min. = (N-2)\ \Delta P$$

$$\Delta P'min. = \frac{N-2}{N-1}\ \Delta P$$

igualando (18) y (17) se obtiene

$$A_1\ min = \frac{N-2}{N-1} < 1 \qquad \text{(contrayente)} \quad (18')$$

Para el valor $\Delta P'\ max$ se tiene:

$$(N-1)\ \Delta P'max = N\ \Delta P = 1$$

$$\Delta P'\ max = \frac{1}{N-1}$$

y, por tanto $A_1\ max = \frac{N}{N-1} > 1$ (dilatante) (18")

En resumen, $\frac{N-2}{N-1} \leq A_1 \leq \frac{N}{N-1}$ (19)

2.2.3 Casos especiales de Hazen y Weibull

Como casos especiales de la fórmula simétrica lineal dada por la ec. (12") se analizan las fórmulas de colocación de Hazen y Weibull.

Los resultados se resumen en el siguiente cuadro.

| | | Hazen | Weibull |
|---|---|---|---|
| Fórmula de colocación | $P'(m)$ | $\frac{2m-1}{2N}$ | $\frac{m}{N+1}$ |
| Función | $z(m)$ | $\frac{\Delta P}{2}$ | $(1-\frac{m}{N+1})\,\Delta P$ |
| Coeficiente lineal | $A_1$ | $1$ | $\frac{N}{N+1}$ |
| Distancia entre puntos colocados | $\Delta P' = \beta$ | $\frac{1}{N}$ | $\frac{1}{N+1}$ |
| Coeficiente | $\alpha$ | $-\frac{1}{2N}$ | $0$ |
| Tipo de colocación | | centrada | contrayente |

Tanto las fórmulas de Hazen como Weibull satisfacen la restricción impuesta por (19).

### 2.3 Tendencia cuando $N \longrightarrow \infty$

Cuando el número de puntos es muy grande $N \longrightarrow \infty$ deberá cumplirse que:

$$\lim_{N \to \infty} P'(m) \longrightarrow P(m)$$

En efecto, pongamos $P(m) = \frac{m}{N} = x$ (de la fórmula (2))

De acuerdo con la inecuación (19)

$$\lim_{N \to \infty} A_1 = 1$$

y, por tanto, en la ec. (12")

$$\lim_{N \to \infty} P'(m) = \frac{1}{2} + A_1\left(x - \frac{1}{2}\right) = x$$

lo que demuestra la proposición.

Además $\lim_{N \to \infty} \alpha = 0$

$\lim_{N \to \infty} \beta = 1$



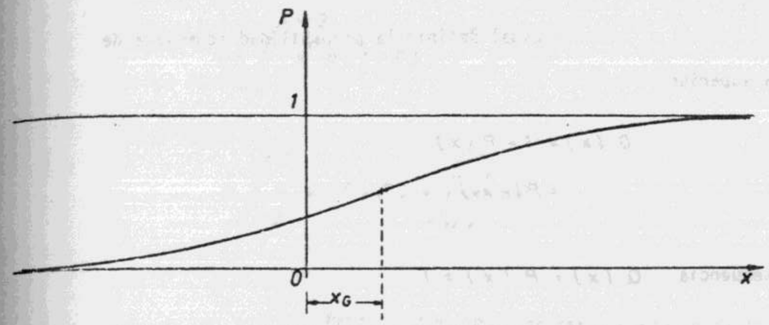
## 3. MOMENTOS ESTADISTICOS

### 3.1 Definiciones y propiedades generales

#### 3.1.1 Función contínua

Sea $f(x)$ la función de densidad de una curva de distribución. La función de probabilidad acumulada se define:

$$P(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$




Esta función $P(x)$ es siempre creciente, desde el valor 0 para $x = -\infty$ hasta el valor 1 para $x = \infty$

Si se tiene un punto de abscisa $x_G$ en este gráfico, se define el momento estadístico de orden $r$ con respecto a $x_G$ como

$$M_G^r = \int_0^1 (x - x_G)^r\,dP$$

Tal como se había anticipado en la introducción, restringiremos este estudio al caso, bastante general, de distribuciones simétricas, como es el caso de la distribución de Gauss.

En este caso es más cómodo ubicar el eje de las ordenadas en el centro de gravedad de la curva de densidad, lo que equivale a ubicarlo en el punto de inflexión de la curva de probabilidad acumulada y definir los momentos estadísticos alrededor de este eje:

$$M_o^r = \int_o^1 x^r \, dP \quad (20)$$

en que P goza de la propiedad

$$P(-x) + P(x) = 1 \quad (21)$$

de donde $\quad P(o) = 1/2$

Es usual definir la probabilidad acumulada de la cola superior

$$Q(x) = 1 - P(x)$$
$$= P(-x)$$

En consecuencia $\quad Q(x) + P(x) = 1$

Para poder calcular la integral dada por (20) es necesario calcular la función inversa

$$x(P)$$

Esta función goza de las siguientes propiedades, deducidas de (21):

$$x(1-P) = -x(P) \quad (22)$$

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

De (22) se obtiene: $\quad [x(1-P)]^r = [-x(P)]^r$

Si $\quad r = 2q \quad$ es par

$$[x(1-P)]^{2q} = [x(P)]^{2q} \quad (23)$$



Si $\quad r = 2q+1 \quad$ es impar

$$[x(1-P)]^{2q+1} = -[x(P)]^{2q+1} \quad (24)$$

La integral (20) se puede escribir

$$M_o^r = \int_o^1 x^r \, dP = \int_o^{1/2} x^r \, dP + \int_{1/2}^1 x^r \, dP$$

$$= -\int_1^{1/2} x^r \, d(1-P) + \int_{1/2}^1 x^r \, dP$$

$$= \int_{1/2}^1 x^r \, d(1-P) + \int_{1/2}^1 x^r \, dP$$

Pero si $\quad r = 2q \quad$ es par, en virtud de (23) se tiene:

$$\int_{1/2}^1 x^{2q} d(1-P) = \int_{1/2}^1 x^{2q} \, dP$$

y, por tanto:

$$M_o^{2q} = 2\int_{1/2}^1 x^{2q} \, dP = 2\int_o^1 x^{2q} \, dP \quad (25)$$

Si $\quad r = 2q+1 \quad$ es impar, en virtud de (24) se tiene:

$$\int_{1/2}^1 x^{2q+1} d(1-P) = -\int_{1/2}^1 x^{2q+1} \, dP$$

y, por tanto

$$M_o^{2q+1} = 0 \quad (26)$$

En resumen, en distribuciones de probabilidad simétricas, los momentos impares son nulos y los momentos pares tienen valores distintos de cero.

### 3.1.2 Función discreta

Para el caso de distribuciones discretas, la fórmula (20) se convierte en:

$$M_o^r = \sum_1^N x^r \Delta P = \frac{1}{N}\sum_1^N x^r \tag{27}$$

en que $x(P)$ es la función inversa de la probabilidad acumulada, con las propiedades dadas por las ecs. (22'), (23) y (24).

Cuando N es impar la suma (27) puede escribirse

$$M_o^r = \frac{1}{N}\sum_1^N x^r = \frac{1}{N}\left(\sum_1^{\bar{m}-1} x^r + \sum_{\bar{m}+1}^N x^r\right)$$

ya que el término de orden $\bar{m}$ es 0. En efecto, en virtud de (10') y (22'): $P'(m) = \frac{1}{2}$

y $x(\frac{1}{2}) = 0$

Pero si $\sum_1^{\bar{m}-1} x^r = \sum_1^{\bar{m}-1} x^r(P')$ $\quad 1 \leq m \leq \bar{m}-1$

entonces $\sum_{\bar{m}+1}^N x^r = \sum^{\bar{m}-1} x^r(1-P')$

$$= \sum_1^{\bar{m}-1} [-x(P')]^r$$

Si $r = 2q$ es par, se tiene

$$\sum_{\bar{m}+1}^N x^{2q} = \sum_1^{\bar{m}-1} x^{2q}(P')$$

$$M_o^{2q} = \frac{2}{N}\sum_1^{\bar{m}-1} x^{2q} \tag{28}$$



Si $r = 2q+1$ es impar, se tiene

$$\sum_{\bar{m}+1}^N x^{2q+1} = -\sum_1^{\bar{m}-1} x^{2q+1}(P')$$

$$M_o^{2q+1} = 0 \tag{29}$$

Cuando $N$ es par la suma (27) puede escribirse

$$M_o^r = \frac{1}{N}\sum_1^N x^r = \frac{1}{N}\left(\sum_1^{\bar{m}-1/2} x^r + \sum_{\bar{m}+1/2}^N x^r\right)$$

ya que los términos $\bar{m} - \frac{1}{2} = \frac{N}{2}$ y $\bar{m} + \frac{1}{2} = \frac{N}{2} + 1$ son enteros sucesivos.

Por los mismos razonamientos anteriores se llega a:

$$M_o^{2q} = \frac{2}{N}\sum_1^{\bar{m}-1/2} x^{2q} \tag{28'}$$

$$M_o^{2q+1} = 0 \tag{29'}$$

que son enteramente análogos a las (28) y (29) y a las (25) y (26) respectivamente.

### 3.2 Aplicación a distribuciones normales o gaussianas

En caso de una distribución normal tipificada se tiene:

función de densidad: $f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ (30)

función de probabilidad acumulada

$$P(x) = \int_{-\infty}^x f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \tag{31}$$

fórmula que no puede hacerse explícita por funciones elementales.

La función inversa $x(P)$ tampoco puede hacerse explícita por funciones elementales.

En caso de una distribución normal de variable tipificada se tiene:

$$M_0^1 = 0$$

$$M_0^2 = 1 = \sigma^2 \qquad \text{(varianza)}$$

$$M_0^3 = 0$$

$$M_0^4 = 3 = K\sigma^4 \qquad \text{(en que K es la curtosis)}$$

Si se desea imponer a una fórmula de colocación $r$ condiciones es necesario definir hasta el momento de orden $2r$

Por tanto, si a una fórmula de colocación sólo se le desea imponer una condición (varianza), será suficiente que el polinomio sea lineal. Si se le desea imponer dos condiciones (varianza y curtosis), la fórmula de colocación deberá ser un polinomio cúbico.

En este trabajo sólo se estudia la primera posibilidad.

## 4. CALCULO DEL PARAMETRO PARA SATISFACER UNA CONDICION (Condición de varianza o de momento 2)

### 4.1 Procedimiento general

De acuerdo con lo expuesto, el procedimiento general del cálculo del parámetro $A_1$ para satisfacer la condición del momento 2 consiste fundamentalmente en los siguientes pasos:

a) Se da un valor de $N$

b) Se busca el valor del parámetro $A_1$ tal que con

$$P' = \frac{1}{2} + A_1 \frac{2m - N - 1}{2N}$$

c) y con la expresión $x(P')$

d) se verifique que



$$\frac{2}{N}\sum_1^{\bar{m}-\frac{1}{2}} x^2 = 1 \qquad \text{para N par} \qquad (32')$$

$$\frac{2}{N}\sum_1^{\bar{m}-1} x^2 = 1 \qquad \text{para N impar} \qquad (32'')$$

e) Se obtiene así la función $A_1(N)$ buscada.

En la práctica la verificación de las ecs. (32) no se puede conseguir sino bajo un error $\epsilon$ definido de antemano.

$$\epsilon \geq \left| \frac{2}{N}\sum_1^{\bar{m}-\frac{1}{2}} x^2 - 1 \right| \qquad \text{para N par} \qquad (33')$$

$$\epsilon \geq \left| \frac{2}{N}\sum_1^{\bar{m}-1} x^2 - 1 \right| \qquad \text{para N impar} \qquad (33'')$$

### 4.2 Fórmula inversa de probabilidad acumulada

Como se acotó en 3.2 la función $x(P')$ no puede hacerse explícita por funciones elementales.

Para este fin se recurre a la aproximación polinómica fraccionaria

$$x = t - \frac{C_0 + C_1 t + C_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3} + \mathcal{E}$$

en que $t = \sqrt{Ln \frac{1}{(1-P')^2}}$

$C_0 = 2{,}515517$ $\qquad d_1 = 1{,}432788$

$C_1 = 0{,}802853$ $\qquad d_2 = 0{,}189269$

$C_2 = 0{,}010328$ $\qquad d_3 = 0{,}001308$

$$y \ |\mathcal{E}| \leq 4.5 \times 10^{-4}$$

que aparece en el libro de Abramowitz y Stegun.

## 4.3 Resultados y comentarios

Los cálculos de $A_1\ (N)$ se hicieron mediante un microcomputador TI - 59 y se resumen en la tabla I adjunta. En el cálculo se ha admitido un error $|e| = 0,001$ en las aproximaciones (33), lo cual es más que suficiente para todos los fines prácticos.

En la tabla I se han agregado dos columnas: la de cálculo del momento 2 que resulta de aplicar la fórmula de colocación centrada de Hazen, y la del valor $A_1\ m\acute{a}x = \frac{N}{N-1}$ que corresponde a la máxima dilatancia dada por (18").

De la tabla I se deduce que la mejor colocación se obtiene con una fórmula dilatante, ya que $A_1 > 1$. Es interesante observar que el valor de $A_1$ converge muy lentamente hacia $1$ aún para valores tan grandes como $N = 50$. Para inferir la tendencia que muestra $A_1$ con $N$ grande se calculó el coeficiente de máxima dilatancia $A_1\ m\acute{a}x$ y se observa que ambos valores convergen rápidamente a partir de $N - 30$. Este hecho insinúa la posibilidad de expresar

$$\lim_{N\to\infty} A_1 = \frac{N}{N-1}$$

y la fórmula de colocación para $N$ grande sería muy aproximadamente

$$P'(m) = \frac{m-1}{N-1}$$

resultado en cierto modo sorprendente, pues contrariamente a la opinión de los expertos, es la fórmula opuesta a la de Weibull, que goza de mayor popularidad.

Por otra parte, de la tabla I se deduce también que los momentos 2 calculados con la fórmula de colocación de Hazen tienen errores considerables, que van desde el 50% para $N = 2$ hasta 13% para $N = 50$. La fórmula de Weibull, que es contrayente, con $A < 1$ producirá errores aún mayores que la de Hazen. En consecuencia, cualquier diagnóstico que se emprenda por el método de los momentos usando las fórmulas de Hazen o Weibull conducirá a errores de apreciación considerables.



Por último, la tabla I muestra además que si se usa el método gráfico con las fórmulas de colocación de Hazen o Weibull, se producirá un cierto error acumulativo que tiende a aumentar la pendiente de la línea de distribución con respecto al método que se expone en este trabajo.

TABLA I

$N$ = número de datos

$A_1$ = parámetro lineal de la fórmula general de colocación

$M_2$ = momento 2 calculado con Hazen $A_1 = 1$

$A_1$ máx = coeficiente de máxima dilatancia

| $N$ | $A_1$ | $M_2$ (Hazen) | $A_1$ màx |
|---|---|---|---|
| 2 | 1.3859 | 0.4446 | |
| 3 | 1.1904 | 0.6005 | |
| 4 | 1.1274 | 0.6783 | |
| 5 | 1.0969 | 0.7242 | |
| 6 | 1.0797 | 0.7541 | |
| 7 | 1.0681 | 0.7751 | |
| 8 | 1.0607 | 0.7905 | |
| 9 | 1.0548 | 0.8021 | |
| 10 | 1.0505 | 0.8113 | 1.1111 |
| 15 | 1.0383 | 0.8374 | |
| 20 | 1.0326 | 0.8494 | 1.0527 |
| 25 | 1.0291 | 0.8561 | |
| 30 | 1.0266 | 0.8603 | 1.0346 |
| 35 | 1.0247 | 0.8632 | 1.0294 |
| 40 | 1.0231 | 0.8652 | 1.0256 |
| 45 | 1.0216 | 0.8667 | 1.0227 |
| 50 | 1.0202 | 0.8679 | 1.0204 |



SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA
IV COLOQUIO NACIONAL

# ESTIMACION DE LAS CARACTERISTICAS DE UN EMBALSE SUBTERRANEO

Fernando Mimica S. (*)
Gastón Galleguillos B. (**)

## RESUMEN

Una metodología prsentada por Nutbrown para las estimación de las características elásticas de un acuífero se aplica al embalse subterráneo existente entre Los Andes y San Felipe. Los resultados obtenidos constituyen una efectiva ayuda en el proceso de calibración de un modelo matemático de simulación del escurrimiento subterráneo. El uso de este último, permite cuantificar, para el caso estudiado, las desviaciones introducidas por la simplicidad del método.

---

(*) Alumno memorista de la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Técnica Federico Santa María.

(**) Ingeniero Civil (U.de Ch.). Profesor Jornada Completa de la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Técnica Federico Santa María.