



SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

IV COLOQUIO NACIONAL

EL CALCULO DEL EJE HIDRAULICO EN CAUCES NATURALES

Sergio Montes V. (*)

RESUMEN

(Preparado por Fco. Javier Domínguez S.)

El problema de calcular el eje hidráulico de un lecho natural (no prismático como dice el autor) en que de un punto a otro varía la forma de la sección, la pendiente, etc., ha sido abordado por varios autores; el trabajo del profesor Dr. Sergio Montes V. lo aborda en forma exitosa haciendo hipótesis que no difieren de la realidad, simplificadoras del problema por medio de computadoras. Lo comprueba con un cálculo del eje hidráulico del río Missouri aguas abajo de su confluencia con el río Kansas. La coincidencia es realmente muy buena.

(*) Profesor e Investigador. Departamento de Ingeniería Civil. Universidad de Tasmania, Australia.

En canales de pendiente de fondo constante y sección transversal invariable (canales que son definidos por Ven Te Chow como "prismáticos"), el cálculo del eje hidráulico o curva de remanso no ofrece problema especial. Existe una variedad de métodos analíticos, numéricos y gráficos que permiten resolver el problema, que consiste en la integración de la ecuación diferencial que define la profundidad en función de la distancia y de las características del lecho, pendiente y gasto afluente.

Esta ecuación diferencial puede determinarse a partir del teorema de conservación de la energía, que indica que en dos secciones de un cauce natural o artificial, la energía medida a partir de un nivel horizontal arbitrario queda descrita por la relación:

$$Z_0 + y_0 + \alpha_0 \frac{U_0^2}{2g} = Z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} + \int_{x_0}^{x_1} S_e dx \quad (1)$$

Los términos de esta ecuación están definidos en la figura N°1. Si esta expresión se diferencia con respecto a la distancia x , se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_e}{1 - Q^2 T / g A^3} \quad (2)$$

En que

S_0 = pendiente de fondo

y S_e = pendiente de la línea de energía = $U^2 / C^2 R$

En forma alternativa, el término que expresa las pérdidas de energía debidas a efectos de rozamiento puede escribirse en la forma sugerida por Salas Edwards:

$$\int_{x_0}^{x_1} S_e dx = \frac{1}{2} (S_{e_0} + S_{e_1}) (x_1 - x_0) = \bar{S}_e (x_1 - x_0)$$

S_{e_0} y S_{e_1} representan las pendientes de la línea de energía en las secciones inicial y final. Combinando esta definición con la ecuación (1) se logra la relación:

$$x_1 - x_0 = \frac{E_0 - E_1}{S_0 - S_e} \quad (3)$$

en que E = energía medida con respecto al fondo del canal = $y + \alpha U^2 / 2g$. Las ecuaciones (2) y (3) representan los puntos de partida de la gran variedad de métodos de trazado del eje hidráulico que hoy se utilizan. Los métodos analíticos de Bakhmeteff y Chow usan la ecuación (2), en tanto que el método de trazado del eje hidráulico punto a punto ideado por Salas Edwards y difundido en las diversas ediciones de la "Hidráulica" del Profesor F.J. Domínguez, parte de (3). En ambos casos se hace uso de la propiedad que el miembro derecho de estas dos ecuaciones, para canales prismáticos, es puramente una función de la profundidad. La ecuación (2) queda reducida a una ecuación de variables separables, lo que permite escribir:

$$x_1 - x_0 = \int_{y_0}^{y_1} \frac{1 - \alpha \frac{Q^2 T}{g A^3}}{S_0 - S_e} dy \quad (4)$$

La solución de la integral en (4) se logra a través de métodos analíticos como los más arriba citados, gráficos o estrictamente numéricos, tales como la regla de Simpson.

En el caso de la ecuación (3), la integral queda tácitamente eliminada gracias a la hipótesis introducida en la definición de la pérdida de energía. Ambos métodos sufren la restricción que la profundidad y_1 debe ser compatible con las formas posibles de la curva de remanso, definidas por las características del lecho, pendiente y gasto. En el caso del método de Salas Edwards, las profundidades y_0 y y_1 deben ser lo suficientemente cercanas para que la aproximación involucrada en la ecuación (3) sea válida.

El caso de los cauces naturales es un tanto más complicado. En este tipo de cauces (no prismáticos), tanto la forma del lecho como la pendiente cambian de punto a punto. La ecuación diferencial (2) deja de pertenecer al simple tipo de variables separables, y se determina ahora mediante la derivación parcial de la ecuación de conservación de la energía (1) con respecto a x :

$$\frac{dy}{dx} = (S_0 - S_e - \frac{\alpha Q^2}{gA^3} \frac{\partial A(x,y)}{\partial x}) / (1 - \alpha \frac{Q^2 T}{gA^3}) \quad (5)$$

Esta ecuación puede representarse por la relación simbólica:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (6)$$

que define un tipo de mucho más difícil integración. A este factor debe agregársele el hecho que las características de las secciones transversales son conocidas solamente a ciertos intervalos, en los cuales se ha efectuado un levantamiento topográfico que determina la cota de fondo y forma de la sección. No puede garantizarse la continuidad ni la diferenciabilidad de las funciones que describen los elementos geométricos de la sección transversal y por lo tanto la solución numérica o analítica de (6) no es factible. Esta objeción no es necesariamente aplicable a casos como el de un aliviadero lateral, en que la variación de la cota de fondo y de la forma de la sección son continuas y conocidas de antemano. En este caso, la ecuación (5) puede integrarse por métodos numéricos o gráficos.

La forma alternativa de la ecuación (3), que puede escribirse como:

$$x_1 - x_0 = \frac{(Z_0 + y_0 + \alpha_0 \frac{U_0^2}{2g}) - (Z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g})}{\frac{1}{2} (S_{e_0} + S_{e_1})} \quad (7)$$

salva algunas de las restricciones a la integración de (2) en cauces naturales, mediante la hipótesis que las pérdidas friccionales son una función continua y lineal con x . Sin embargo, no puede resolverse (7) como en el caso de los canales prismáticos, en que se determina la distancia que separa dos puntos de profundidad conocida. Debe resolverse el problema inverso de determinar la profundidad y_1 que satisfaga la ecuación (7), en que la distancia ($x_1 - x_0$) es un valor constante y conocido. La relación entre la profundidad y con la energía E y la pendiente S_e es en general compleja, lo que hace impráctica la solución directa de (7). Debe apelarse entonces a una solución por tanteos, en el que asumiendo una serie de valores para y_1 , se calcula a partir de ellos los valores de S_{e_1} y E_1 , hasta que la ecuación (7) quede satisfecha. Este es el método sugerido en los textos de Chow y Henderson.

Este tipo de solución puede agilizarse considerablemente si se adopta la siguiente variante:

Definiendo la función $W(y_1)$ como:

$$W(y_1) = (x_1 - x_0) - \frac{(Z_0 - Z_1) + (E_0 - E_1)}{\frac{1}{2} (S_{e_0} + S_{e_1})} \quad (8)$$

puede notarse que la solución y_1 de la ecuación (7) hace que $W(y_1) = 0$. El problema se reduce entonces a encontrar la raíz útil de la ecuación (8), que por la naturaleza del problema debe ser cercana a la profundidad inicial y_0 . Entre los diversos métodos numéricos, el método de Newton-Raphson es quizás uno de los más conocidos, debido a su simplicidad y rápida convergencia. En este método de aproximaciones sucesivas, la aproximación de orden n a la raíz está ligada a la aproximación de orden $(n-1)$ por la relación:

$$y_n = y_{n-1} - \frac{W}{dW/dy} \quad (9)$$

en que la función W y su derivada se avaldan con el valor de $y = y_{n-1}$. Para iniciar el proceso de aproximaciones sucesivas es conveniente tomar la profundidad y_0 como valor inicial. A este proceso puede objetársele el hecho aducido anteriormente, que la relación entre E y S_e con la profundidad es complicada, por lo que la expresión de la derivada dW/dy es difícil de obtener. Esta dificultad puede salvarse si la derivada se reemplaza por su valor aproximado :

$$\frac{dW}{dy} = \frac{W(y+\Delta y) - W(y)}{\Delta y} \quad (10)$$

en que Δy representa un incremento de la profundidad del orden de 1-3 cm. El método de Newton-Raphson no pierde efectividad con esta alteración, que sustituye el cálculo de la derivada por el cálculo de dos valores de la función W para dos valores cercanos a y .

Este método puede ser fácilmente implementado en un computador o en calculadoras programables tales como la HP 67 o la TI 59. Como ejemplo consideraremos el interesante caso resuelto por Ven Te Chow en su libro "Open Channel Hydraulics", pp. 278-292. En este ejemplo se estudia el cálculo del eje hidráulico en una sección del río Missouri, aguas abajo de la confluencia entre los ríos Missouri y Kansas. Los datos geométricos y cotas de las secciones transversales provienen de una publicación del Cuerpo de Ingenieros del Ejército Americano. En este tramo el río Missouri posee un canal principal bien definido, así como una sección lateral de menor profundidad y gran rugosidad. Chow asigna valores del n de Manning de 0.025 y 0.050 para el canal principal y la sección lateral respectivamente. El valor promedio del n de Manning para toda la sección puede ser calculado a partir de la fórmula de Lotter :

$$\bar{n} = \frac{(A^{5/3} P^{2/3})_{TOTAL}}{\sum_{i=1}^M (\frac{1}{n} A^{5/3} P^{2/3})_{PARCIAL}}$$

El cálculo del eje hidráulico se realizó en un 2.111 computador PDP-8, usando lenguaje FOCAL. Para esto se escribió un sencillo programa que resuelve las ecuaciones (8), (9) y (10) y que se incluye en el apéndice a esta nota. Los datos geométricos de cada sección, tales como área transversal, perímetro mojado, n de Manning y coeficiente de distribución de velocidades α , fueron interpretados por relaciones lineales en la profundidad y , deducidos de los datos numéricos proporcionados por Chow. En este cálculo se han retenido las unidades inglesas a fin de comparar los presentes resultados con los obtenidos por Chow usando otros métodos. Los resultados son los siguientes :

SECCIÓN N°	X	Z=z+y	A	P	R	n	S _e	H=z+E
1	0	752,250	44450	1407	31,592	0.023	0.000227	754,028
2	1.060	752,737	46605	1536	29,047	0.025	0.000285	754,300
3	1.905	753,400	51809	1708	30,330	0.025	0.000200	754,504
4	3.965	754,182	66092	2183	30,281	0.025	0.000128	754,841
5	5.655	754,431	73228	2842	25,763	0.025	0.000124	755,054

Los resultados de la tabla anterior coinciden bien con los calculados por Chow mediante el método gráfico de Ezra, y que transcribimos más abajo :

Distancia X	Cota Superficial Z Método Ezra	Cota Superficial Z Presente Método
0	752,25	752,25
1.060	752,72	752,74
1.905	753,38	753,40
3.965	754,15	754,18
5.655	754,43	754,43

2.112 Caso de las secciones prismáticas. El método aquí descrito es igualmente aplicable al caso de las secciones prismáticas. En este tipo de canal, el programa de computador (o el cálculo en una calculadora manual) se simplifica notablemente, ya que se elimina la determinación de las características geométricas de cada sección.

Referencias :

- Chow, V.T. "Open Channel Hydraulics"., Mc Graw Hill, N.Y. (1959).
- Domínguez, F.J. "Hidráulica"., Editorial Universitaria, (1959).
- Henderson, F.M. "Open Channel Flow"., Mc Millan, (1966).

Apéndice

Programa de Computador que resuelve la ecuación del eje hidráulico por aproximaciones sucesivas.

Programa de Computador que resuelve la ecuación del eje hidráulico por aproximaciones sucesivas.

```

01.01 C SOLUCION DEL EJE HIDRAULICO EN CAUCES NATURALES
01.02 C POR METODO DE APROXIMACIONES SUCCESIVAS DE NEWTON-RAPHSON
01.05 S Q=431000
01.08 D 7; S Z(1)=752.25; S Z=Z(1); S J=1; S X=0; D 4; S J=2
01.10 S SE(1)=SE; S H(1)=E; T X 8.03 X(1),Z(1),A,P,R,N,Z 9.08 SE,Z 8.03 E,I
02.05 C LA PROFUNDIDAD EN LA SECCION SIGUIENTE SE ENCUENTRA
02.06 C MEDIANTE EL ALGORITMO DE NEWTON-RAPHSON
02.10 S Y=753; S Z=Y; D 4
02.11 S W=-X(J)-2*(H(J)-E)/(SE(J-1)+SE)
02.12 I (FABS(W)-.1)2.30,2.30,2.14
02.13 S Z=Y+.05; D 4; S V1=-X(J)-2*(H(J)-E)/(SE(J-1)+SE)
02.14 S V2=(V1-W)/.05; S DY=-W/V2
02.16 S Y=Y+DY; S Z=Y; D 4; G 2.12
02.25 S Y=Y; S SE(J)=SE; S H(J)=E; S X=X+X(J)
02.30 S Z(J),A,P,R,N, Z 9.08 SE(J),Z 8.03 H(J),I
02.35 T X,Z(J),A,P,R,N, Z 9.08 SE(J),Z 8.03 H(J),I
02.40 I (J-4.9)2.50,2.60,2.60
02.50 S J=J+1; G 2.10
02.60 D
03.10 C PROPIEDADES GEOMETRICAS DE LA SECCION TRANSVERSAL
03.20 S Z1=(Z-752);S A=A(J)+A1(J)*Z1; S P=P(J)+P1(J)*Z1; S N=N(J)+N1(J)*Z1
03.30 S AL=AL(J); S U=Q/A; S R=A/P;S E=Z+AL*.0155*U*U
03.40 S SE=.4529*(U*N)**2/(FEXP((4/3)+FLOG(R)))
07.10 C CONSTANTES NUMERICAS QUE DEFINEN LAS SECCIONES TRANSVERSALES
07.15 S A(1)=44100; S A1(1)=1400;S P(1)=1406; S P1(1)=4
07.17 S AL(1)=1.22;S N(1)=.02304; S N1(1)=.0002; S X(1)=0
07.20 S A(2)=43500; S A1(2)=1500; S P(2)=1529; S P1(2)=9
07.25 S AL(2)=1.02; S N(2)=.02453; S N1(2)=.000015; S X(2)=1060
07.30 S A(3)=49500; S A1(3)=1650; S P(3)=1697; S P1(3)=8
07.35 S AL(3)=1.03; S N(3)=.02463; S N1(3)=.00006; S X(3)=845
07.40 S A(4)=61400; S A1(4)=2150; S P(4)=2163; S P1(4)=9
07.45 S AL(4)=1.00; S N(4)=.02500; S N1(4)=0; S X(4)=2060
07.50 S A(5)=66300; S A1(5)=2850; S P(5)=2829; S P1(5)=5.5
07.55 S AL(5)=1.16; S N(5)=.02373; S N1(5)=.00031; S X(5)=1690

```

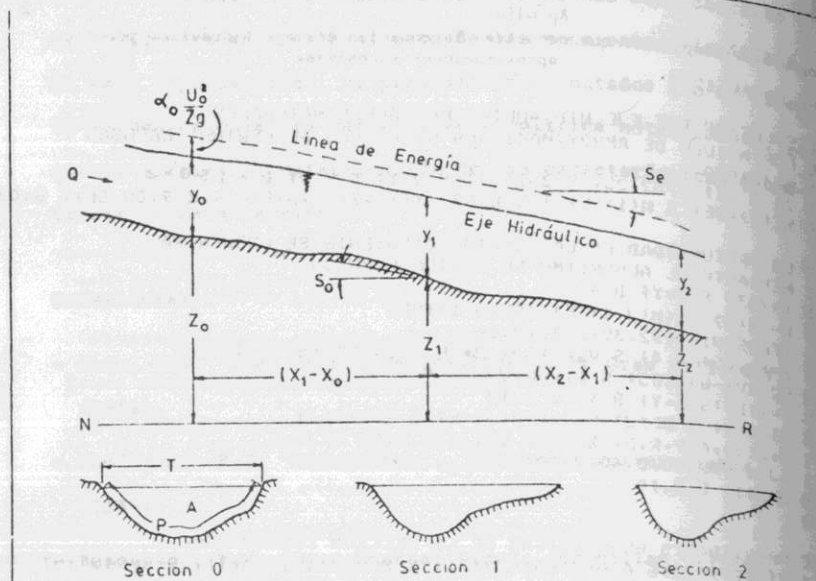


FIG 1 Definición de los elementos geométricos en un cauce natural

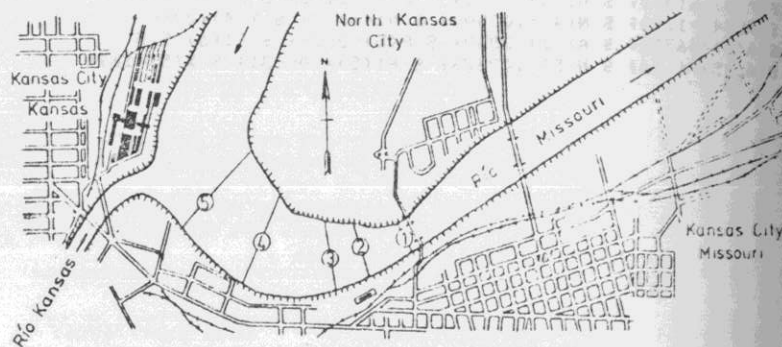


FIG 2 Río Missouri en Kansas City

PREVISION DE NIVELES DEL RIO RAPEL EN EL PUEBLO DE

RAPEL Y SU VERIFICACION

Por

Andrés Benítez Girón (*)

RESUMEN

El pueblo de Rapel, situado 23,55 km aguas abajo de la Central Rapel, queda afectado cuando el caudal del río Rapel es superior a 4 500 m³/s, por lo cual la Central Rapel trata de regular al máximo las crecidas que se producen, para evitar daños en el pueblo, o avisar oportunamente los niveles que va a alcanzar el agua cuando el caudal evacuado debe ser superior a 3 500 m³/s.

En este trabajo se indican los estudios efectuados, los métodos utilizados para determinar los niveles máximos en cada crecida y los estudios que van a realizarse próximamente para conocer mejor el fenómeno de la propagación de ondas a lo largo del río entre la Central Rapel y el pueblo de Rapel.

(*) Ingeniero Jefe de la División Estudios Hidrológicos ENDESA.