

APLICACION DE ALGORITMOS NUMERICOS AL ESTUDIO DE UN CHORRO LAMINAR  
AXISIMETRICO EN LA REGION PLENAMENTE DESARROLLADA

Luis Ayala Riquelme (\*)

RESUMEN

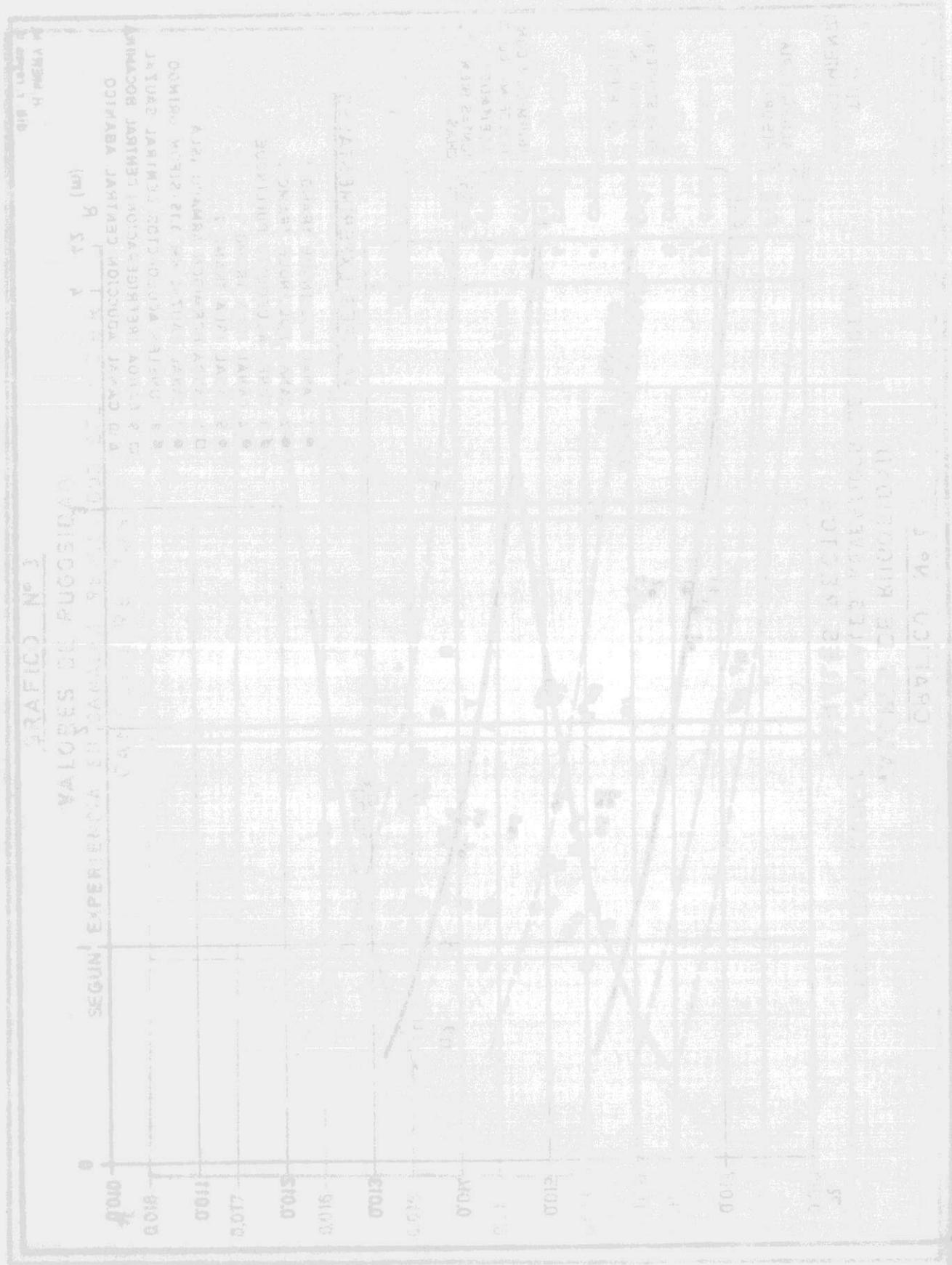
En este trabajo se presenta una metodología que permite resolver mediante técnicas numéricas, algunos problemas asociados con capas límites laminares.

El problema específico que se aborda corresponde al estudio de la expansión de un chorro en regimen laminar descargando en un medio infinito en reposo de iguales propiedades físicas a las del chorro.

Para la solución numérica se requiere transformar adecuadamente las ecuaciones de la capa límite laminar. Esta transformación conduce a una ecuación diferencial ordinaria no-lineal de 3er. orden la cual se integra numéricamente utilizando una aproximación de diferencias finitas.

Los resultados se comparan con la solución analítica disponible encontrándose buena concordancia entre ambas soluciones.

(\*) Profesor e Investigador del Centro de Recursos Hidráulicos, Departamento de Obras Civiles, Universidad de Chile.



## INTRODUCCION

Los problemas de Mecánica de Fluidos relacionados con capas límites laminares conducen a ecuaciones diferenciales parciales no lineales y contadas veces son directamente integrables.

A través del tiempo se han propuesto diversos métodos que permiten resolver en forma exacta o aproximada cierto tipo de problemas.

Las técnicas numéricas, hoy en día de gran aplicación, han permitido un avance sustancial que se ha traducido en la solución de problemas más complejos.

El caso de la expansión de un chorro laminar axisimétrico constituye un problema clásico de capa límite tridimensional que tiene solución analítica, al menos en la región del flujo plenamente desarrollado.

Esta característica se ha aprovechado para probar una de las técnicas numéricas actualmente en uso. La solución que se presenta aquí requiere previamente la transformación de las ecuaciones de la capa límite y para ello se hace uso de la propiedad de la afinidad de la solución. Para la integración numérica las derivadas se aproximan mediante diferencias finitas y se hace uso del llamado algoritmo de Thomas para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas resultante.

## ECUACIONES BASICAS

El flujo producido por la descarga de un chorro da origen a una región de escurrimiento en la cual se pueden distinguir dos zonas.

En la figura 1 se muestra un corte del chorro a través de su eje de simetría visualizándose ambas zonas : la del flujo en desarrollo y la del flujo plenamente desarrollado. La primera zona se caracteriza por que en ella la capa límite del escurrimiento se encuentra en pleno crecimiento. El límite superior de la capa da origen a una zona llamada núcleo dentro de la cual no existen esfuerzos tangenciales. El núcleo tiene la forma de un cono cuya base es la sección del orificio de salida. En el vértice del cono los gradientes de velocidad han alcanzado el eje mismo del chorro y la sección que contiene el vértice constituye el origen de la zona del flujo plenamente establecido.

En la figura 2 se esquematiza el sistema de coordenadas utilizado para la solución del problema. La porción del chorro que se muestra corresponde a la zona de flujo plenamente establecido.

Para esta zona las ecuaciones que rigen el movimiento del fluido incompresible son las ecuaciones de continuidad y la de la cantidad de movimiento en la dirección del flujo (Schlichting, 1968 y White, 1974).

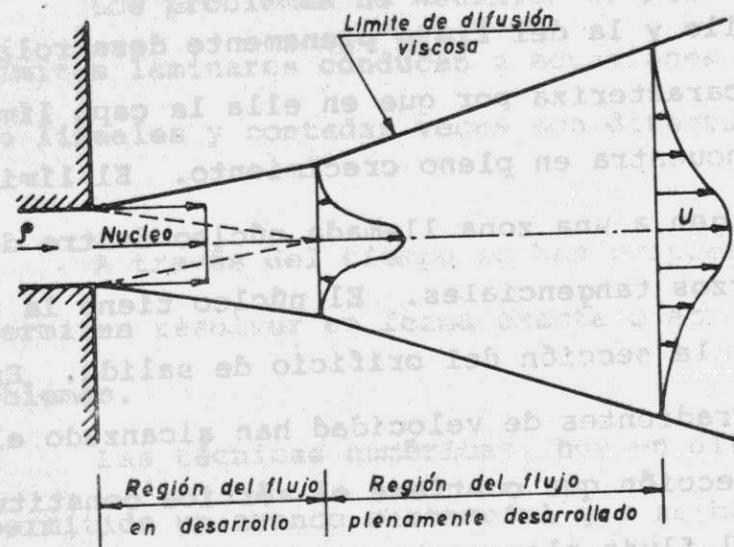
Continuidad :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (1)$$

Cantidad de movimiento en la dirección x :

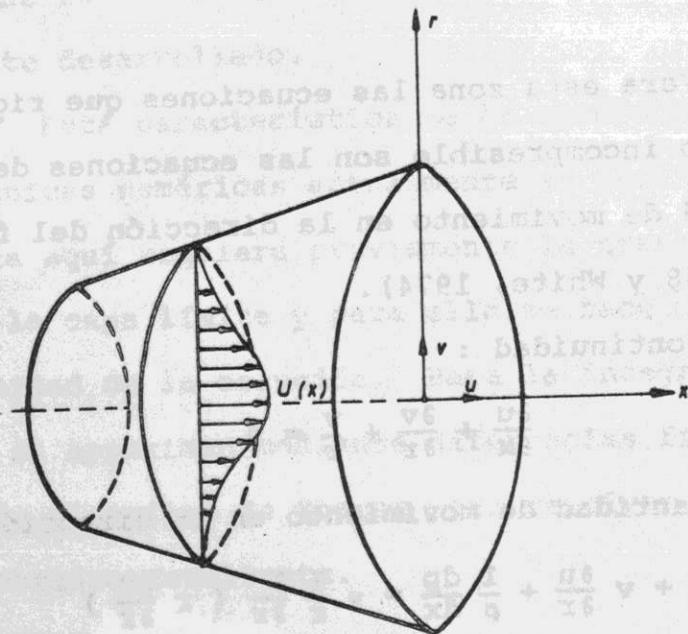
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = v \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2)$$

La ecuación de la cantidad de movimiento se obtiene de la componente x de las ecuaciones de Navier-Stokes imponiendo las simplificaciones propias de la teoría de la capa límite :



CORTE ESQUEMATICO DE UN CHORRO AXISIMETRICO

FIG. 1



SISTEMA DE COORDENADAS UTILIZADO

FIG. 2

- i) La capa límite es de dimensiones pequeñas.
- ii) La presión del flujo potencial exterior se transmite a la capa límite sin sufrir modificaciones.
- iii) La difusión de cantidad de movimiento en el sentido radial es despreciable.

También se impone la condición de que el medio infinito exterior al chorro se encuentre en reposo, por lo cual utilizando (ii) se tiene :

$$\frac{dp}{dx} = 0 \tag{3}$$

En las ecuaciones anteriores las variables tienen los siguientes significados :

- $u, v$  componentes de la velocidad a lo largo y transversales al flujo, respectivamente.
- $r, x$  coordenadas en la dirección radial y del flujo, respectivamente
- $\rho, \nu$  densidad y viscosidad cinemática del fluido
- $p$  presión

TRANSFORMACION DE LAS ECUACIONES

Para la integración de las ecuaciones se utiliza la propiedad de que la distribución de velocidades es afín o auto-similar, por lo cual la velocidad adimensional es independiente de la abscisa  $x$ . Para definir las ecuaciones adimensionales se utilizan la velocidad axial  $U(x)$  y una estimación del espesor de la capa límite  $g(x)$ .

La condición de afinidad se obtiene de

$$\frac{u}{U(x)} = f'(n) \tag{4}$$

$$\text{en que } \eta = \left( \frac{r}{g(x)} \right)^2 \quad \text{y} \quad f'(\eta) = \frac{df}{d\eta} \quad (5)$$

$f(\eta)$  representa la función de corriente adimensional

Utilizando las expresiones anteriores las ecuaciones (1) y (2) con la simplificación (3) pueden expresarse en forma adimensional como se explica a continuación

i) Término  $\left| u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|$

$$u = Uf'$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dU}{dx} f' + U \frac{\partial f'}{\partial x} = U_x f' + U f'' \eta_x \quad (6)$$

$$\left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = U U_x f'^2 + U^2 \eta_x f' f'' \quad (7)$$

ii) Término  $\left( v \frac{\partial u}{\partial r} \right)$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{d}{d\eta} (Uf') \cdot \eta_r = Uf'' \cdot \eta_r \quad (8)$$

por otro lado  $\eta_r = \frac{2r}{g^2}$  (9)

luego

$$\left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) = Uf'' \cdot \frac{2r}{g^2}$$

La velocidad radial  $v$  se obtiene de la ecuación de continuidad ya que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = \frac{\partial (ru)}{\partial x} + \frac{\partial (rv)}{\partial r} = 0 \quad (10)$$

luego,  $rv = - \int_0^r \frac{\partial (ru)}{\partial x} dv = - \int_0^r \frac{\partial u}{\partial x} r dr$

reemplazando el valor  $\frac{\partial u}{\partial x}$  de la expresión (6) se obtiene

$$rv = - \int_0^r |U_x f' + U f'' \eta_x| r dr$$

De (9) se tiene  $r dr = \frac{g^2}{2} d\eta$

luego

$$rv = - \int_{\eta=0}^{\eta} |U_x f' + U f'' \eta_x| \frac{g^2}{2} d\eta$$

$$v = - \frac{g^2}{2r} \cdot |U_x f' - 2U \frac{g_x}{g} \int_0^{\eta} f'' \eta d\eta|$$

ya que  $\eta_x = -2\eta \left( \frac{g_x}{g} \right)$

La integral del segundo miembro puede resolverse

por partes :

$$\int f'' \eta d\eta = f' \eta - \int f' d\eta = f' \eta - f$$

finalmente se obtiene

$$v = \frac{g^2}{2r} \left( (U_x + 2U \frac{g_x}{g}) f - 2U \frac{g_x}{g} \eta f' \right) \quad (11)$$

y por lo tanto :

$$\left| v \frac{\partial u}{\partial r} \right| = U \left( U_x + 2U \frac{g_x}{g} \right) f f'' - U^2 \eta_x f' f'' \quad (12)$$

donde se ha reemplazado  $\eta_x = -\frac{2\eta g_x}{g}$

iii) Término  $v \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left| r \frac{\partial u}{\partial r} \right|$

Desarrollando el término se obtiene

$$v \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

de la ecuación (8) se tiene

$$\left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) = U f'' \eta_r$$

luego

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = U \frac{\partial}{\partial r} (f'' \eta_r) = U f''' \eta_r^2 + U f'' \eta_{rr} = \frac{4Ur^2}{g^4} f''' + \frac{2U}{g^2} f''$$

luego

$$\left| v \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right| = 4 \frac{vU}{g^2} (f'' + f''') \quad (13)$$

La ecuación adimensional del movimiento se obtiene reemplazando cada uno de los términos de las ecuaciones (7), (12), y (13) obteniéndose la ecuación

$$\frac{4v}{U_x g^2} (f'' + \eta f''') = f'^2 + \left( 1 + \frac{2U}{U_x} \frac{g_x}{g} \right) f f'' = 0 \quad (14)$$

Para resolver la ecuación anterior es preciso conocer  $U$  y  $g$ . Para este efecto se impone la condición de afinidad de la distribución de velocidad. Ello implica que la ecuación (14) debe satisfacerse para todo valor de la abscisa  $x$ , por lo que sus coeficientes deben ser constantes :

$$-\frac{4v}{U_x g^2} = K_1 \quad \frac{2U}{U_x} \frac{g_x}{g} = K_2 \quad (15)$$

ambas relaciones son equivalentes a :

$$g U g_x = -2v \frac{K_2}{K_1} \quad (16)$$

Por otro lado se cuenta con la condición de que la cantidad de movimiento inicial se mantenga constante :

$$M_x = \int_0^\infty \rho u^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi \rho U^2 \int_0^\infty f'^2 \cdot g^2 d\eta \quad (17)$$

$$U^2 g^2 = \frac{M_x}{2\pi \rho \int_0^\infty f'^2 d\eta} = \frac{M_*}{I} \quad (18)$$

en que  $M_* = \frac{M_x}{\rho} \quad I = 2\pi \int_0^\infty f'^2 d\eta$

luego  $U g = \left( \frac{M_*}{I} \right)^{1/2}$

reemplazando esta ecuación en (16) se obtiene

$$g = - \left| \frac{2vK_2}{K_1} \left( \frac{I}{M_*} \right)^{1/2} \right| x \quad (19)$$

$$U = - \left| \frac{K_1}{2vK_2} \frac{M_*}{I} \right| \frac{1}{x}$$

Además se impone la condición que las fuerzas de inercia y las de fricción viscosa sean del mismo orden de magnitud. Ello conduce finalmente a la siguiente ecuación :

$$\eta f''' + f'' + f'^2 + ff'' = 0 \quad (20)$$

Las condiciones de borde son :

- 1)  $u = U$  cuando  $r = 0 \Rightarrow f'(0) = 1$
- 2)  $u = 0$  cuando  $r = \infty \Rightarrow f'(\infty) = 0$
- 3) El eje de simetría es línea de corriente  $\Rightarrow f(0) = 0$

#### APROXIMACION NUMERICA

Para resolver numéricamente la ecuación diferencial ordinaria no-lineal anterior se procede a linealizarla. En este proceso debe recordarse que los términos no-lineales provienen de la aceleración convectiva y que en el proceso de linealización es más preciso considerar a la velocidad como término linealizable que su derivada espacial.

La ecuación se reescribe acorde a lo anterior de la siguiente forma :

$$\eta f''' + (1 + f_*) f'' + f_*' f' = 0 \quad (22)$$

$f_*$  y  $f_*'$  son las funciones que se consideran momentáneamente constante durante la integración en cada punto del espacio.

La integración numérica se realiza utilizando un algoritmo basado en el Método de Diferencias Finitas.

Para este efecto las derivadas se aproximan mediante una diferencia centrada de 3 puntos. Si  $U_n$  representa el valor de la aproximación numérica de  $f'$  en el nudo  $n$  de la malla y  $h$  el tamaño de la malla :

$$(f')_n = U_n$$

$$(f'')_n = \frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2h}$$

$$(f''')_n = \frac{U_{n-1} - 2U_n + U_{n+1}}{h^2}$$

$$h = \Delta \eta = \eta_{n+1} - \eta_n$$

$$\eta_n = (n - 1)h \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación se obtiene para el nudo  $n$  :

$$\left( (n-1) + \frac{1+f_*}{2} \right) U_{n+1} + (hf_* - 2(n-1)) U_n + \left( (n-1) - \frac{1+f_*}{2} \right) U_{n-1} = 0$$

que se expresa en forma resumida como :

$$A_n U_{n+1} + B_n U_n + C_n U_{n-1} = 0 \quad (23)$$

$$\text{con } A_n = \left( (n-1) + \frac{1+f_*}{2} \right) = \frac{1}{2} (2n - 1 + f_*)$$

$$B_n = (hf_* - 2(n-1)) = (hf_* - 2n + 2) \quad (24)$$

$$C_n = \left( (n-1) - \frac{1+f_*}{2} \right) = \frac{1}{2} (2n - 3 - f_*)$$

Las condiciones de borde son

$$U_1 = 1 \quad U_N = 0$$

#### METODO DE SOLUCION

La ecuación anterior que es válida para un nudo, da origen a un sistema de  $N$  ecuaciones algebraicas para toda la malla y se resuelve utilizando un proceso recursivo (algoritmo de Thomas). Para ello se asume :

$$U_n = E_n U_{n+1} + F_n \quad (24)$$

Los coeficientes  $E_n$  y  $F_n$  se calculan en función de los coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$  y  $C_n$  y utilizando :

$$U_{n-1} = E_{n-1} U_n + F_{n-1}$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación del nudo se obtiene :

$$A_n U_{n+1} + B_n (E_n U_{n+1} + F_n) + C_n (E_{n-1} U_n + F_{n-1}) = 0$$

$$(C_n E_{n-1}) U_n = - (A_n + B_n E_n) U_{n+1} - B_n F_n - C_n F_{n-1}$$

De donde se deduce que

$$E_n = \frac{-A_n}{B_n + C_n E_{n-1}} \quad (25)$$

$$F_n = \frac{-C_n F_{n-1}}{B_n + C_n E_{n-1}}$$

Como se conoce la condición inicial  $U_1 = 1$ , se tienen los valores iniciales de  $E$  y  $F$  :

$$U_1 = 1 = E_1 U_2 + F_1$$

Por otro lado esta ecuación debe satisfacerse para todo valor de  $U_2$ , en consecuencia :

$$E_1 = 0 \quad F_1 = 1 \quad (26)$$

Para determinar los restantes valores de  $E$  y  $F$  se requiere conocer los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$  en cada nudo. Estos dependen de  $f_*$  y  $f_*'$  y del intervalo de integración  $h$ .

Para calcular  $f_*$  en cada nudo se supone un perfil inicial  $f_*'$  y este se integra por algún método de integración numérico usual : método de los trapecios, Regla de Simpson, etc.

Todos los valores  $A_n$ ,  $B_n$  y  $C_n$  se calculan de acuerdo a las relaciones (24) utilizando los valores  $f_*$  y  $f_*'$  anteriores.

A continuación se hace uso de las ecuaciones (25) para calcular en forma recursiva los valores  $E_n$  y  $F_n$  utilizando las condiciones iniciales de las ecuaciones (26).

Una vez conocidos los valores  $E_n$  y  $F_n$  para todos los nudos de la malla se calcula el nuevo perfil de velocidades de acuerdo a la relación (24).

El nuevo perfil se utiliza para una segunda iteración y así sucesivamente hasta que la máxima diferencia entre dos distribuciones consecutivas sea menor que un error preestablecido.

Para el cálculo de los valores  $U_n$  en la relación (24) se hace uso de la condición de borde externa, vale decir  $f'(\infty) = 0$ . Para llevar a la práctica dicha condición se asume que

$f'$  se anula para un valor de  $\eta = \eta_*$  que se elige "a priori".

Una forma alternativa para imponer la condición de borde externa consiste en estudiar el comportamiento asintótico de la ecuación (20). En este caso la ecuación se reduce a :

$$\eta f''' + f'' = 0$$

Esta ecuación puede integrarse directamente y a través de sus primeras y segundas derivadas, intentar obtener una relación para ajustar en cada iteración el valor de  $f' \approx U_N$ .

#### APLICACION DEL METODO

Con el objeto de demostrar la potencialidad del algoritmo numérico se ha hecho uso de la solución analítica (Schlichting, 1968) que se dispone en este caso. Esta solución puede escribirse bajo la forma

$$\psi' = \frac{u}{U} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} \xi^2\right)^2} \quad (27)$$

en que 
$$U = \frac{3}{8\pi} \frac{M_*}{v} \frac{1}{x} \quad (28)$$

y 
$$\xi = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} M_*^{1/2} \frac{v}{4vx} \quad (29)$$

Para comparar la solución numérica con la analítica es preciso llevar a cabo el cálculo con la misma velocidad de referencia y en el mismo punto del espacio. Es fácil verificar que las condiciones que hacen que  $\psi'$  y  $f'$  sean equivalentes están dadas por

$$I = 2\pi \int_0^\infty f'^2 d\eta = \frac{2\pi}{3} \quad \text{y} \quad \xi^2 = 2\eta \quad (30)$$

De aquí se concluye que la solución analítica puede expresarse en términos de las variables originales como :

$$\psi' \equiv f'(\eta) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}\eta\right)^2} \quad (31)$$

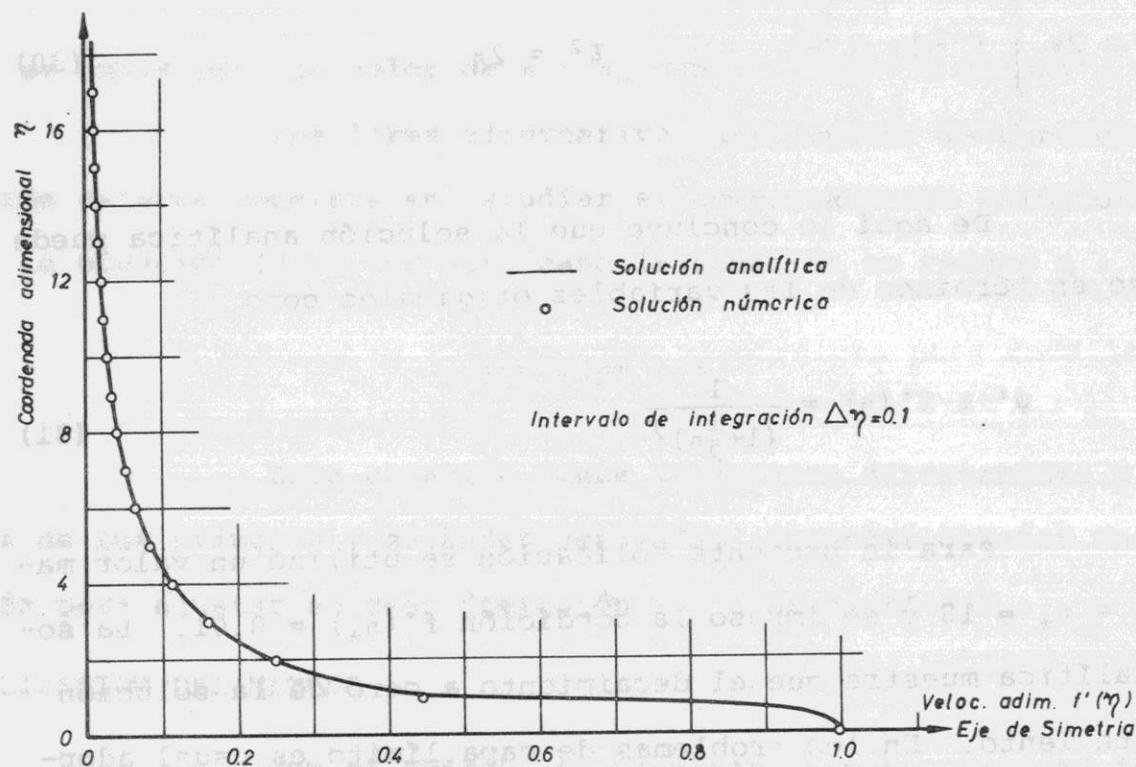
Para la presente aplicación se utilizó un valor máximo de  $\eta = \eta_* = 18$  y se impuso la condición  $f'(\eta_*) = 0.01$ . La solución analítica muestra que el decaimiento a cero de la solución es bastante lento. En los problemas de capa límite es usual adoptar un valor de  $\eta_* = 8$ .

Los resultados de la solución numérica y analítica se incluyen en la Tabla 1 que contiene los valores de la función de corriente para cada nudo. En la integración se ha adoptado un intervalo  $h = \Delta\eta = 0.01$ .

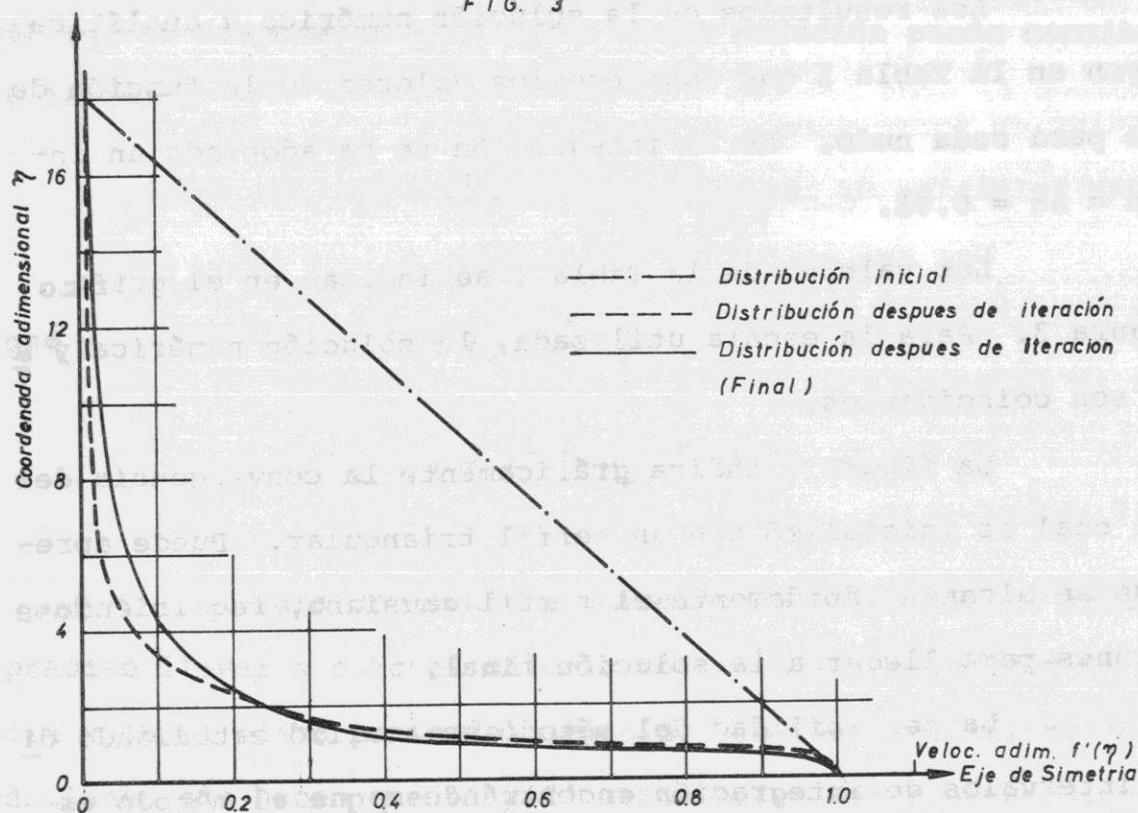
Los valores de la Tabla 1 se indican en el gráfico de la figura 3. Para la escala utilizada, la solución numérica y analítica son coincidentes.

La figura 4 indica gráficamente la convergencia del método el cual se inicializó con un perfil triangular. Puede apreciarse que se alcanza rápidamente el perfil gaussiano, requiriéndose 6 iteraciones para llegar a la solución final.

La sensibilidad del método se analizó estudiando diferentes intervalos de integración encontrándose que el método es



DISTRIBUCION DE VELOCIDAD AXIAL  
COMPARACION ENTRE SOLUCION ANALITICA Y NUMERICA  
FIG. 3



CONVERGENCIA DE LA SOLUCION NUMERICA  
FIG. 4

Tabla 1

Resultados Numéricos y Analíticos

n	f(η)	f'(η) num	f'(η) anal	Dif.(%)
0	0.0	1.0000	1.0000	0.0
1	0.6626	0.4411	0.4444	0.76
2	0.9936	0.2487	0.2500	0.51
3	1.1926	0.1595	0.1600	0.30
4	1.3252	0.1110	0.1111	0.13
5	1.4195	0.0816	0.0816	0.01
6	1.4910	0.0626	0.0625	-0.09
8	1.5906	0.0401	0.0400	-0.22
10	1.6576	0.0271	0.0278	-0.28
12	1.7045	0.0205	0.0204	-0.28
14	1.7402	0.0157	0.0156	-0.22
18	1.7901	0.0100	0.0100	0.0

relativamente sensible a la elección de este parámetro. Ello es lógico por cuanto la aproximación de las derivadas involucra errores por truncamiento del orden de  $h^2$ . Por ejemplo, a título ilustrativo, la máxima diferencia con la solución analítica usando  $h = 1.0$  resultó de 39.2% requiriéndose 3 iteraciones. Para  $h = 0.1$  que es la solución que se presenta en la Tabla 1 y figura 3, la máxima diferencia fue 0.76% en 6 iteraciones.

Como siempre existe un compromiso entre el esfuerzo computacional requerido y la precisión del cálculo.

#### CONCLUSIONES

El estudio de la expansión de un chorro laminar con simetría axial en la región del flujo plenamente desarrollado que se abordó en este trabajo constituye un ejemplo de aplicabilidad de los métodos numéricos a ciertos problemas de Mecánica de Fluidos.

El método presentado es general para capas límites laminares con o sin simetría axial e involucra las siguientes etapas.

1. Transformación de las ecuaciones diferenciales parciales en una ecuación diferencial ordinaria no-lineal.
2. Formulación de un algoritmo numérico que permita la integración de la ecuación diferencial ordinaria no-lineal.
3. Solución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales resultantes, imponiendo las condiciones de borde apropiadas.

Existen dos dificultades asociadas con el desarrollo de las etapas anteriores :

- 1) Encontrar una transformación sencilla que conduzca a una ecua-

ción diferencial ordinaria satisfactoria para la aplicación de técnicas numéricas.

- ii) Imponer la condición de borde externa

El primer punto involucra un proceso de aproximaciones sucesivas que requiere cierta práctica y conocimiento del problema.

Para el segundo punto se puede recurrir a algoritmos como el indicado anteriormente (Aplicación del Método) o hacer suposiciones adecuadas.

En todo caso la aplicación de la metodología demuestra que la solución numérica es altamente satisfactoria tanto en lo relativo a esfuerzo computacional requerido como a exactitud de la solución.

#### BIBLIOGRAFIA

1. Centro de Recursos Hidráulicos. Expansión de un Chorro Turbulento de Revolución en un Medio Infinito, Laboratorio de Hidráulica, Universidad de Chile.
2. Schlichting, H. Boundary Layer Theory, Mc Graw Hill, 1968.
3. Universidad de California, Apuntes de Clase Curso ME 263A Viscous Flow, Berkeley 1975.
4. White, F.M., Viscous Flow, Mc Graw Hill, 1974.