

SEGUNDO COLOQUIO NACIONAL
SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

REDES DE FLUJO POR EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

GUILLERMO CABRERA F. (*) Y PATRICIO FERRER A. (**)

RESUMEN

En este trabajo se presenta el método de los elementos finitos y su aplicación al cálculo de redes de flujo en problemas de escurrimiento en medios permeables. Además, el programa de computación elaborado permite resolver problemas con superficie libre. Se presentan tres aplicaciones del método, una de las cuales, tiene solución analítica y por lo tanto, permite verificar la exactitud del método. A través de este estudio se demuestra las ventajas que presenta el método de los elementos finitos frente al método de las diferencias finitas.



(*) Ingenieros Investigadores, Sección Hidrología y Riego, Departamento de Obras Civiles, Universidad de Chile.

1.- INTRODUCCION.

La ecuación diferencial que rige el escurrimiento permanente en medios permeables, sólo en contadas ocasiones puede ser integrada directamente. Por esta razón, se han elaborado numerosos métodos que permiten obtener soluciones de la ecuación, aunque en muchos casos ellas sean sólo aproximadas debido a las simplificaciones previas que es necesario introducir.

En el último tiempo, los métodos numéricos de resolución han tenido gran auge debido a la rapidez con que se pueden efectuar los cálculos si se cuenta con la ayuda de un computador. El método de las diferencias finitas ha sido el método numérico más comúnmente utilizado hasta el momento. Sin embargo, tiene algunos defectos que lo hacen un tanto rígido dificultando la elaboración de un programa generalizado que permita resolver una gran variedad de problemas.

Por esta razón se pensó en aplicar el método numérico de elementos finitos que aparentemente ofrecía mayores ventajas sobre el de diferencias finitas. Esta suposición quedó confirmada a través de la realización del estudio que aquí se presenta.

2.- ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LOS ESCURRIMIENTOS EN MEDIOS PERMEABLES.

En un medio poroso saturado con escurrimiento laminar, la velocidad se puede calcular mediante la ley de Darcy. Esta ley expresa que la velocidad en una cierta dirección es igual al producto de la permeabilidad por el gradiente del potencial hidráulico H en esa dirección. Si se considera un medio en dos dimensiones (x e y) con permeabilidades k_x y k_y y se combina la ley anterior con la ecuación de continuidad en régimen permanente, se obtiene la ecuación del potencial H (1, 2, 3, 4, 7):

$$k_x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Para completar la red de flujo de un escurrimiento, es necesario calcular además, las líneas de flujo. Para ello, se utiliza la función flujo ψ que permite definir expresiones para la velocidad. Estas expresiones en conjunto con la ecuación de continuidad, determinan la ecuación de la función flujo (1, 2, 3, 4, 7):

$$\frac{1}{k_y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{k_x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

3.- METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

Este método está basado en el principio del trabajo mínimo y utiliza una técnica de discretización para su aplicación.

A continuación, se explica brevemente el método para resolver la ecuación que rige el potencial hidráulico y luego los cambios que hay que introducir en el caso de las líneas de flujo. Una explicación detallada se puede encontrar en la bibliografía (4, 8)

3.1 Potencial Hidráulico (H).

Como ya se explicó, la ecuación del potencial hidráulico (H) para un medio anisotrópico viene dada por la expresión (1).

La solución de esta ecuación sometida a condiciones de borde específicas, es equivalente matemáticamente a encontrar una función H que minimice la siguiente integral E sobre toda la región de solución:

$$E = \frac{1}{2} \iint \left[k_x \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3)$$

La verificación de la expresión anterior se puede hacer mediante la aplicación de los principios del cálculo de variaciones. Si a la expresión (3) se le aplican las condiciones de minimización de Euler, se obtiene directamente la ecuación (1).

Para la aplicación del método se considerará la región del problema dividida arbitrariamente en elementos triangulares tal como se muestra en la figura 1.

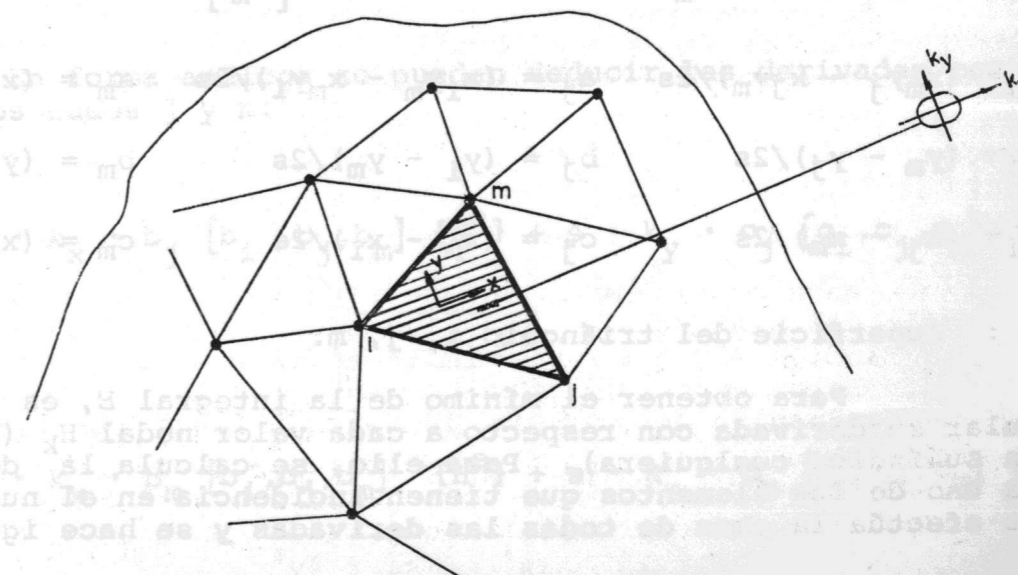


FIGURA 1

MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Si los valores desconocidos de la función H en los nudos de los triángulos definen completamente y en forma única la función en la región, entonces derivando la función E con respecto a cada uno de los valores nodales de H e igualando cada una de esas derivadas a cero, resulta un sistema de ecuaciones simultáneas, en las que se incluyen las condiciones de borde, y cuya solución proporcionará los valores de H en cada nudo que minimizan la integral E y por lo tanto, solucionan el problema.

Si se considera un triángulo típico i, j, m, (elemento e), tal como el indicado en la figura 1, con un sistema de ejes coordinados definidos localmente coincidiendo con los ejes principales de anisotropía del material en ese elemento, la definición más simple de la variación de la función H en el elemento vendrá dada por:

$$H = A + B \cdot x + C \cdot y$$

La evaluación de las constantes A, B y C se hace considerando que para los puntos de coordenadas (x_i, y_i), (x_j, y_j) y (x_m, y_m), el valor del potencial es H_i, H_j y H_m, respectivamente. De manera que:

$$H = N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m \tag{4}$$

o bien $H = (N_i, N_j, N_m) \{H^e\}$

donde

$$\begin{aligned} N_i &= a_i + b_i x + c_i y \\ N_j &= a_j + b_j x + c_j y \\ N_m &= a_m + b_m x + c_m y \end{aligned} \quad H^e = \begin{bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{bmatrix}$$

$$a_i = (x_m y_j - x_j y_m) / 2s \quad a_j = (x_i y_m - x_m y_i) / 2s \quad a_m = (x_j y_i - x_i y_j) / 2s$$

$$b_i = (y_m - y_j) / 2s \quad b_j = (y_i - y_m) / 2s \quad b_m = (y_j - y_i) / 2s$$

$$c_i = (x_j - x_m) / 2s \quad c_j = (x_m - x_i) / 2s \quad c_m = (x_i - x_j) / 2s$$

s: superficie del triángulo i, j, m.

Para obtener el mínimo de la integral E, es necesario calcular su derivada con respecto a cada valor nodal H_k (k indica un subíndice cualquiera). Para ello, se calcula la derivada en cada uno de los elementos que tienen incidencia en el nudo k y luego, se efectúa la suma de todas las derivadas y se hace igual a cero.

Llamando E^e a la integral E definida en el elemento e (i, j, m), su derivada con respecto al nudo i será:

$$\frac{\partial E^e}{\partial H_i} = \iint_e \left[k_x \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] d_x d_y$$

Considerando que H tiene la expresión (4) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^e}{\partial H_i} &= \iint_e k_x [b_i, b_j, b_m] \{H^e\} b_i d_x d_y + \\ &\quad \iint_e k_y [c_i, c_j, c_m] \{H^e\} c_i d_x d_y \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que por definición, k_x y k_y permanecen constantes, que H_i, H_j y H_m no son funciones de x e y, y que además, se cumple:

$$\iint_e d_x d_y = s$$

la expresión final para la derivada de E^e con respecto a H_i vale:

$$\frac{\partial E^e}{\partial H_i} = s \cdot k_x \cdot b_i [b_i, b_j, b_m] \{H^e\} + s \cdot k_y \cdot c_i [c_i, c_j, c_m] \{H^e\}$$

En forma análoga se pueden deducir las derivadas con respecto a los nudos j y m:

$$\frac{\partial E^e}{\partial H_j} = s \cdot k_x \cdot b_j [b_i, b_j, b_m] \{H^e\} + s \cdot k_y \cdot c_j [c_i, c_j, c_m] \{H^e\}$$

$$\frac{\partial E^e}{\partial H_m} = s \cdot k_x \cdot b_m [b_i, b_j, b_m] \{H^e\} + s \cdot k_y \cdot c_m [c_i, c_j, c_m] \{H^e\}$$

de manera que en el elemento e:

$$\left\{ \frac{\partial E}{\partial H} \right\}^e = s \begin{bmatrix} k_{x_i b_i} + k_{y_i c_i} & k_{x_j b_i} + k_{y_j c_i} & k_{x_m b_i} + k_{y_m c_i} \\ k_{x_i b_j} + k_{y_i c_j} & k_{x_j b_j} + k_{y_j c_j} & k_{x_m b_j} + k_{y_m c_j} \\ k_{x_i b_m} + k_{y_i c_m} & k_{x_j b_m} + k_{y_j c_m} & k_{x_m b_m} + k_{y_m c_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{bmatrix}$$

La matriz que multiplica al vector de los H recibe el nombre de matriz de incidencia para cada elemento. Se puede ver, además, que dicha matriz es simétrica, lo cual presenta claras ventajas computacionales.

Las ecuaciones finales que resultan de este proceso de minimización se obtienen al considerar, como ya se dijo, las contribuciones de todos los elementos que tengan incidencia en un cierto nudo para satisfacer la condición de mínimo. Así, para el nudo i, se tendrá:

$$\frac{\partial E}{\partial H_i} = \sum_{\text{todo } e \text{ adyacente a } i} \frac{\partial E^e}{\partial H_i} = 0 \quad (5)$$

El proceso termina con la resolución del sistema de ecuaciones planteado por la expresión anterior, la cual determina el valor de H en cada uno de los nudos. Desde luego, que para los nudos que son condiciones de borde, el valor del potencial será conocido.

Si se designa por n el número de nudos del sistema formado (incluyendo los nudos condiciones de borde) el sistema de ecuaciones (5) resultante se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde

$$k_{ij} = s \cdot k_x \cdot \sum b_i b_j + s \cdot k_y \cdot \sum c_i c_j$$

válida para $i \neq j$ y las sumatorias tomadas sobre todos los elementos adyacentes al tramo i, j.

Para $i = j$ (simetral)

$$k_{ij} = s \cdot k_x \cdot \sum b_i^2 + s \cdot k_y \cdot \sum c_i^2$$

donde las sumatorias están tomadas sobre todos los elementos adyacentes al nudo i.

Se puede demostrar que la matriz k_{ij} es simétrica, es decir, $k_{ij} = k_{ji}$ y además, sólo una banda en torno a la diagonal tiene coeficientes diferentes de cero. Estas propiedades permiten resolver sistemas con un gran número de incógnitas (por ejemplo 200) sin utilizar demasiada memoria en el computador.

Los nudos condiciones de borde, se tratan en forma especial, la cual se explica mediante un ejemplo. Si se tiene un problema en que el espacio se ha dividido en 5 nudos, de los cuales a y b representan condiciones de borde conocidas, el sistema planteado es de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{1a} & k_{12} & k_{1b} & k_{13} \\ k_{a1} & k_{aa} & k_{a2} & k_{ab} & k_{a3} \\ k_{21} & k_{2a} & k_{22} & k_{2b} & k_{23} \\ k_{b1} & k_{ba} & k_{b2} & k_{bb} & k_{b3} \\ k_{31} & k_{3a} & k_{32} & k_{3b} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_a \\ H_2 \\ H_b \\ H_3 \end{bmatrix} = 0, \quad k_{ij} = k_{ji}$$

y puede escribirse como sigue sin ser alterado:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{12} & 0 & k_{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & 0 & k_{22} & 0 & k_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{32} & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_a \\ H_2 \\ H_b \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{1a} H_a - k_{1b} H_b \\ H_a \\ -k_{2a} H_a - k_{2s} H_s \\ H_b \\ -k_{3a} H_a - k_{3b} H_b \end{bmatrix}$$

Con esto, se obtiene una independización de las condiciones de borde, ya que el primer miembro de todas las ecuaciones del sistema queda planteado en términos de las incógnitas, exceptuando las ecuaciones de los nudos condiciones de borde, que son identidades.

3.2 Líneas de Flujo (ψ).

La derivación del sistema de ecuaciones que se debe resolver para calcular las líneas de flujo es enteramente análogo al recién descrito, correspondiente al potencial hidráulico. La única diferencia, es que la función flujo tiene que satisfacer la ecuación (2) en donde las permeabilidades aparecen dividiendo las segundas derivadas. No se repetirá el cálculo anterior, ya que el sistema al cual se llega es idéntico al planteado en la expresión (6), pero en este caso los k_{ij} tienen la siguiente expresión:

$$k_{ij} = \frac{s}{k_y} \sum b_i b_j + \frac{s}{k_x} \sum c_i c_j$$

4.- PROGRAMA DE COMPUTACION.

Para poder utilizar el método de los elementos finitos, se elaboró un programa de computación en lenguaje FORTRAN. Este permite resolver problemas de escurrimiento en régimen permanente bidimensional, calculando la función potencial hidráulico y/o la función flujo. Además, se incorporó al programa la posibilidad de resolver problemas con superficie libre.

En el programa se leen los nudos que forman cada elemento, las coordenadas de cada nudo, las permeabilidades en cada elemento, el ángulo que forma la dirección principal de anisotropía de cada elemento con respecto al sistema general de coordenadas y finalmente, los nudos que son condiciones de borde y el valor que toma la incógnita (potencial o línea de flujo) en esos nudos. Leída la información necesaria se forma la matriz de la ecuación (6) y se procede a resolver el sistema de ecuaciones mediante el uso de diversas subrutinas. Antes de imprimir los resultados se determinan las coordenadas de los puntos que tienen un valor constante predefinido. Esto se hace por interpolación lineal y permite graficar en forma fácil los valores calculados. También el programa tiene incorporada una subrutina que permite graficar, en la misma hoja de impresión del computador, tanto las líneas de flujo como las equipotenciales.

5. APLICACIONES.

Las aplicaciones presentadas, más que pretender resolver problemas prácticos, intentan demostrar la potencialidad del método.

El problema resuelto tiene solución analítica, lo que permite una comprobación del método, y los otros dos ilustran su uso.

5.1 Muro ubicado sobre un relleno isotrópico homogéneo e infinito

En la figura 2 se ha esquematizado el problema que se desea resolver:

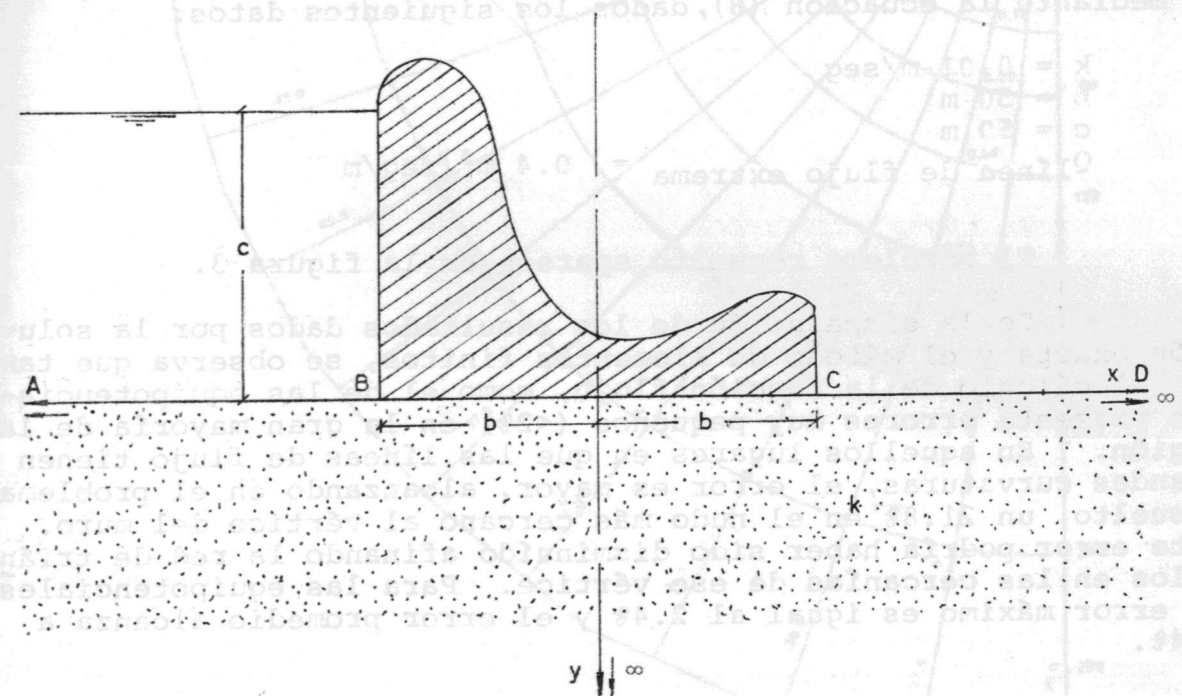


FIGURA 2

Este problema tiene una solución analítica que se puede determinar (3, 4) por el método de la variable compleja. Las ecuaciones que resultan son:

$$\frac{x^2}{b^2 \cos^2 \phi'} - \frac{y^2}{b^2 \sin^2 \phi'} = 1 \tag{7}$$

$$\frac{x^2}{b^2 \cosh^2 \psi^2} + \frac{y^2}{b^2 \cosh^2 \psi^2} = 1 \tag{8}$$

donde

$$\phi' = -\frac{\pi H}{c} \quad \text{y} \quad \psi' = \frac{\pi \psi}{kc}$$

Mediante estas ecuaciones se puede obtener el potencial hidráulico y la función flujo para cualquier punto del medio. Esto se utiliza para comprobar los resultados teóricos con los que resultan de aplicar el método de los elementos finitos.

Para aplicar el método de los elementos finitos se determinó primeramente las coordenadas de una línea de flujo extrema mediante la ecuación (8), dados los siguientes datos:

- k = 0.01 m/seg
- b = 50 m
- c = 50 m

Q línea de flujo extrema = 0.4 m³/seg/m

El problema resuelto aparece en la figura 3.

De la comparación de los resultados dados por la solución exacta y el método de elementos finitos, se observa que tanto el cálculo de la función flujo, como el de las equipotenciales presenta errores muy pequeños (<2%) en la gran mayoría de la región. En aquellos lugares en que las líneas de flujo tienen grandes curvaturas, el error es mayor, alcanzando en el problema resuelto, un 21.8% en el nudo más cercano al vértice del muro. Este error podría haber sido disminuido afinando la red de triángulos en las cercanías de ese vértice. Para las equipotenciales el error máximo es igual al 2.4% y el error promedio alcanza a 0.4%.

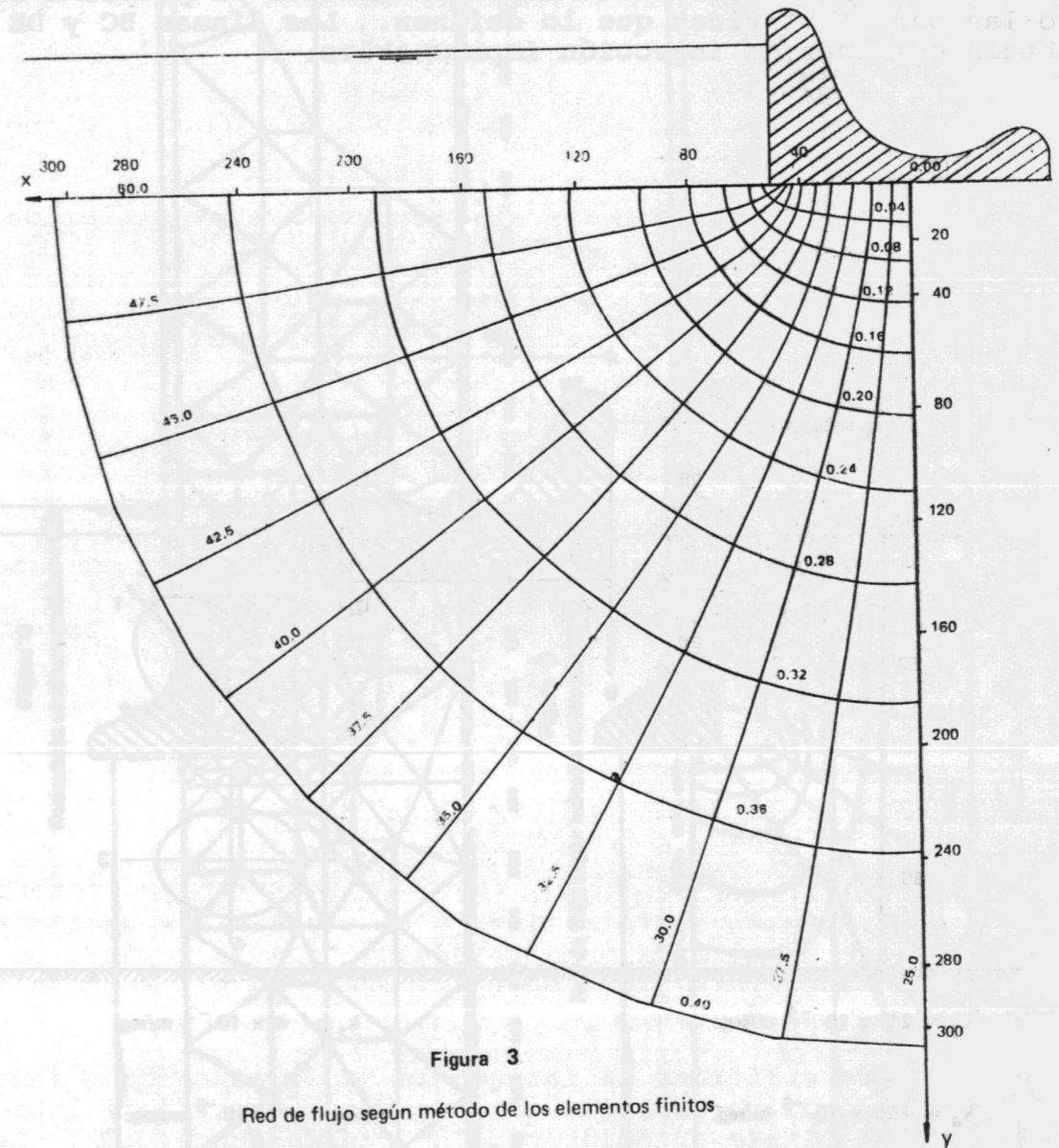


Figura 3
Red de flujo según método de los elementos finitos

5.2 Muro ubicado sobre un relleno formado por dos capas anisotrópicas diferentes.

En la figura 4 se ha esquematizado el problema indicando las características que lo definen. Las líneas BC y DE representan cortinas de inyección impermeables.

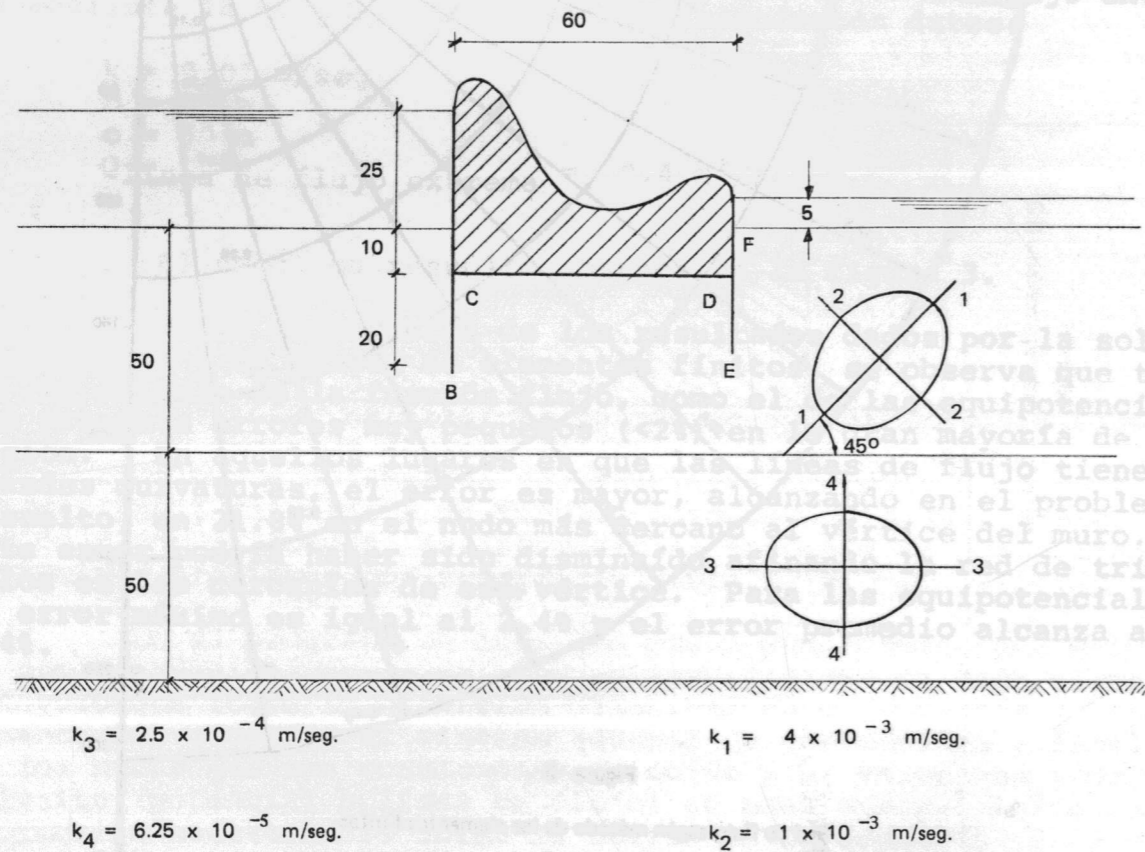


FIGURA 4

El reticulado usado para resolver el problema con el método de los elementos finitos, aparece dibujado en la Figura 5. La red obtenida aparece en la figura 6.

Figura 5
Reticulado usado en problema 5.2

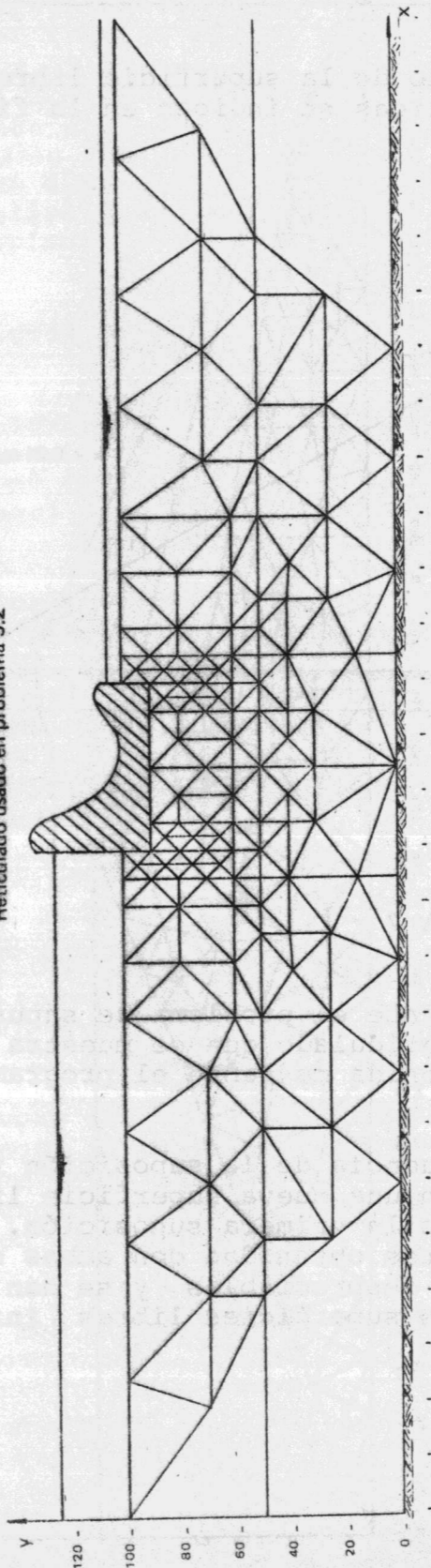
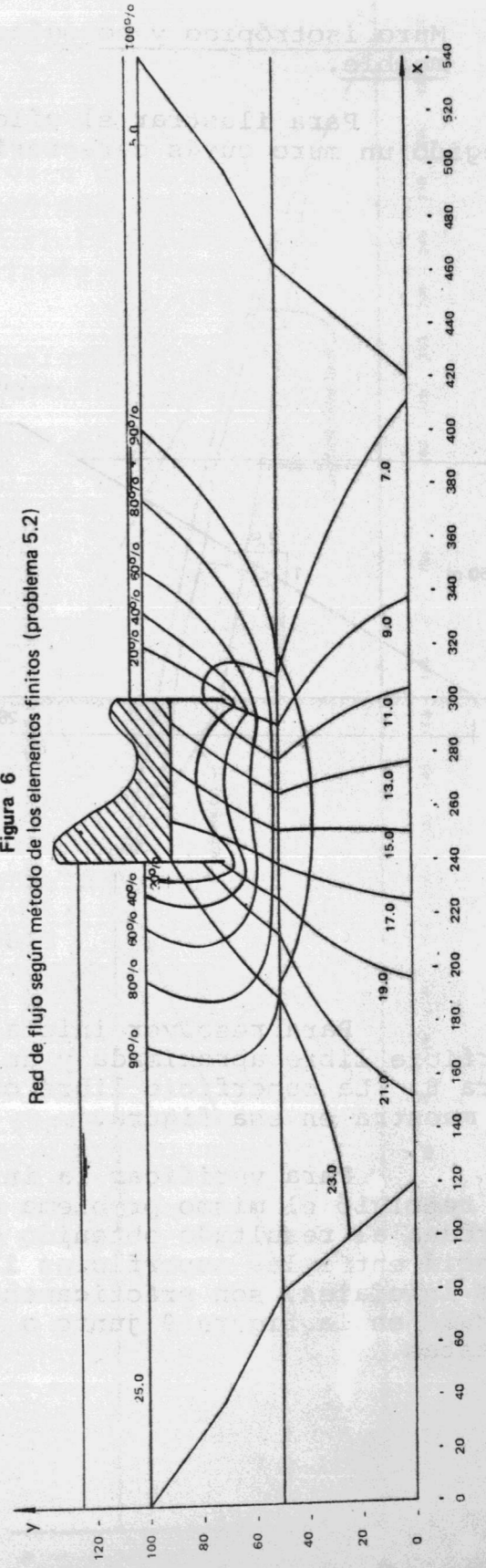


Figura 6
Red de flujo según método de los elementos finitos (problema 5.2)



5.3 Muro isotrópico y homogéneo apoyado sobre un estrato impermeable.

Para ilustrar el cálculo de la superficie libre, se ha elegido un muro cuyas características se indican en la figura 7.

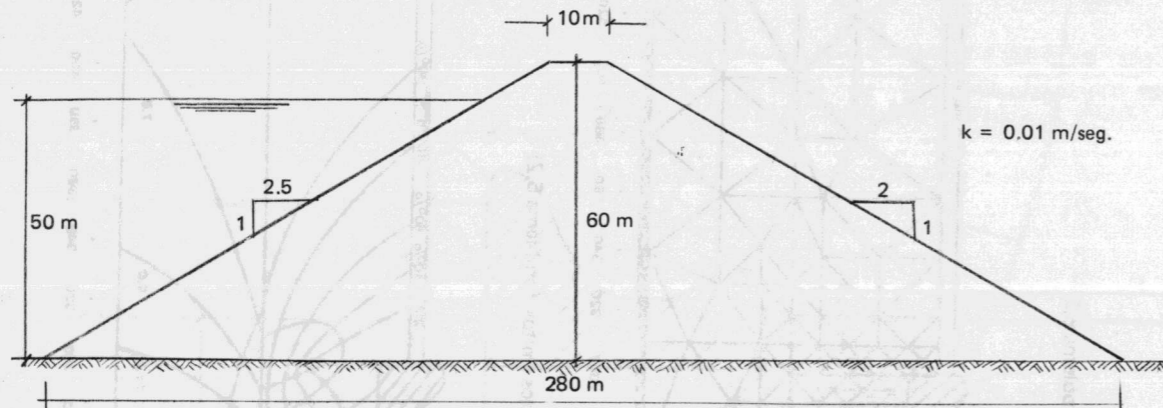


FIGURA 7

Para resolver inicialmente el problema se supuso una superficie libre aproximada y un reticulado que se muestra en la figura 8. La superficie libre obtenida mediante el programa también se muestra en esa figura.

Para verificar la influencia de la suposición inicial, se resolvió el mismo problema con una nueva superficie libre más cercana al resultado obtenido con la primera suposición. La diferencia entre las superficies libres obtenidas con ambas suposiciones iniciales, son prácticamente despreciables y se han esquematisado en la figura 9 junto a las superficies libres iniciales supuestas.

Figura 8
Reticulado usado en problema 5.3 y superficie libre obtenida

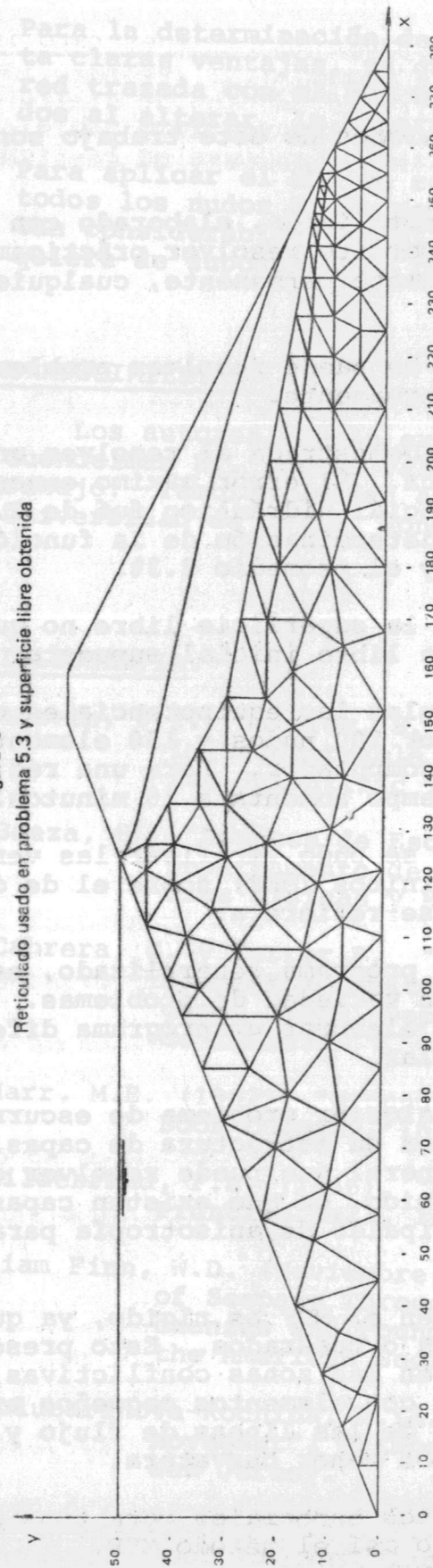
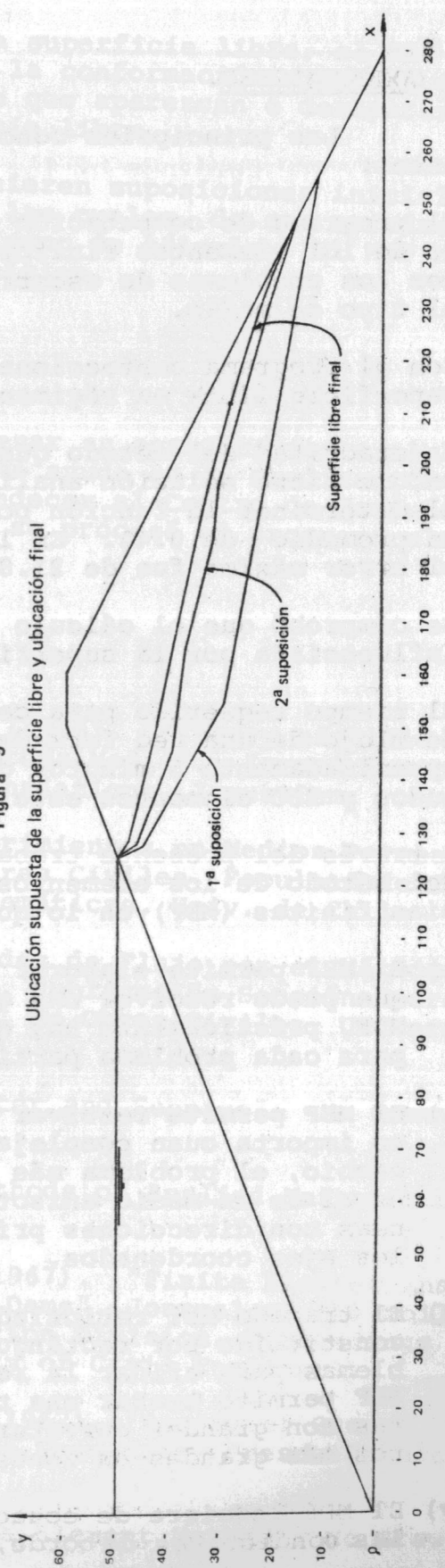


Figura 9
Ubicación supuesta de la superficie libre y ubicación final



6.- CONCLUSIONES.

Las principales conclusiones de este trabajo son las siguientes:

1. El programa de computación generalizado, elaborado con el método de los elementos finitos, permite resolver prácticamente todos los problemas de escurrimiento permanente, cualquiera sea el tipo de medio.
2. Con el programa confeccionado se puede resolver problemas de superficie libre en régimen permanente.
3. La exactitud del método quedó demostrada al resolver un problema que tiene solución analítica. El error máximo encontrado al determinar la función potencial hidráulico fué de 2.4% con un promedio de 0.4%. En la determinación de la función flujo el error máximo fue de 21.8% y el promedio 2.3%.
4. Se comprobó que el cálculo de la superficie libre no queda influenciada por la superficie libre inicial supuesta.
5. El tiempo requerido para calcular las equipotenciales o líneas de flujo de una red formada por 100 nudos y 150 elementos es de aproximadamente 5 minutos de computador. Para una red de 150 nudos y 250 elementos este tiempo aumenta a 10 minutos.
5. A través del presente trabajo se pudo verificar las ventajas del método de los elementos finitos (MEF) sobre el de diferencias finitas (MDF) en lo que se refiere a:
 - i) El MEF permite elaborar un programa generalizado, es decir, que puede resolver una gran variedad de problemas. Con el MDF, prácticamente hay que elaborar un programa diferente para cada problema particular.
 - ii) El MEF permite resolver cualquier problema de escurrimiento no importa cuán compleja sea su estructura de capas. En cambio, el problema más general que puede resolver el MDF es el de un medio anisotrópico, en que existen capas homogéneas con direcciones principales de anisotropía paralelas a los ejes coordenados.
 - iii) El trazado del reticulado en el MDF es rígido, ya que está constituido por rectángulos o cuadrados. Esto presenta problemas para afinar la red en las zonas conflictivas. El MEF permite trazar una red con elementos pequeños en las zonas con grandes curvaturas de las líneas de flujo y elementos más grandes en zonas con menor curvatura.
 - iv) El MDF requiere de ecuaciones especiales para considerar las condiciones de borde, no así el método MEF.

v) Para la determinación de la superficie libre, el MEF presenta claras ventajas, ya que la conformación rigurosa de la red trazada con el MDF hace que aparezcan o desaparezcan nudos al alterar la superficie libre.

vi) Para aplicar el MDF se requieren suposiciones iniciales en todos los nudos de la red, las cuales, de ser erradas, aumentan considerablemente el tiempo de cálculo. El MEF no requiere de suposiciones iniciales.

ALGUNOS RESULTADOS EXPERIMENTALES SOBRE EL
FUNCIONAMIENTO DE UN TUBO DE PITOT CILINDRICO

7.- AGRADECIMIENTOS.

Los autores desean expresar su agradecimiento al Ing. Tomás Guendelman B., por su valiosa ayuda en la realización de este trabajo. También desean agradecer al Centro de Computación de la Universidad de Chile, donde se procesó el programa elaborado.

R. FUENTES. (*)

F. ROMERO. (**)

8.- BIBLIOGRAFIA.

1. Aravin, V.I.; Numerov, S.N. (1965). "Theory of Fluid Flow in Undeformable Porous Media". Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem.
2. Baeza, H. "Apuntes de Escurrimientos en Medios Permeables". Departamento de Obras Civiles, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Univ. de Chile.
3. Cabrera, G. y Ferrer P. "Redes de Flujo por el Método de Elementos Finitos", Publicación Sección Hidrología y Riego, Depto. de Obras Civiles, Universidad de Chile.
4. Harr, M.E. (1962). "Groundwater and Seepage". Mc Graw Hill Book Company, Inc.
5. Hildebrand, F.B. (1956). "Methods of Applied Mathematics" Prentice Hall, Inc.
6. Liam Finn, W.D. (Noviembre, 1967). "Finite Element Analysis of Seepage Through Dams". Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division. Proceedings of the American Society of Civil Engineers.
7. Polubarinova-Kochina, P.YA. (1962). "Theory of Ground Water Movement", Princeton University Press. Princeton, New Jersey.
8. Zienkiewicz, O. (1967). "Finite Element Method". Mc Graw Hill Book Company, Inc.

9. Zienkiewicz, O.; Mayer, P.; Cheung, Y.K. (Febrero, 1966)
"Solution of Anisotropic Seepage by Finite Elements"
Journal of the Engineering Mechanis Division, Pro-
ceedings of the American Society of Civil Engineers.

Los autores desean expresar sus agradecimientos a los señores
... por haberlos ayudado en la realización de este trabajo.
... para resolver los problemas de escurrimiento permanente, cualquiera sea
el tipo de medio.

2. Con el programa confeccionado se puede resolver problemas de
superficie libre en régimen permanente.

Los autores desean expresar sus agradecimientos a los señores
... por haberlos ayudado en la realización de este trabajo.
... para resolver los problemas de escurrimiento permanente, cualquiera sea
el tipo de medio.

4. Se puede calcular el tiempo de tránsito de la superficie libre no queda
influenciada por la superficie libre inicial.

5. El tiempo requerido para calcular las equipotenciales líneas
... es de aproximadamente 15 minutos para una red de 150
nodos y 10 minutos para una red de 100 nodos.

6. Se puede calcular el tiempo de tránsito de la superficie libre no queda
influenciada por la superficie libre inicial.

7. Se puede calcular el tiempo de tránsito de la superficie libre no queda
influenciada por la superficie libre inicial.

8. Se puede calcular el tiempo de tránsito de la superficie libre no queda
influenciada por la superficie libre inicial.

9. Se puede calcular el tiempo de tránsito de la superficie libre no queda
influenciada por la superficie libre inicial.

10. Se puede calcular el tiempo de tránsito de la superficie libre no queda
influenciada por la superficie libre inicial.

SEGUNDO COLOQUIO NACIONAL
SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

ALGUNOS RESULTADOS EXPERIMENTALES SOBRE EL
FUNCIONAMIENTO DE UN TUBO DE PITOT CILINDRICO
EN UN ESCURRIMIENTO CURVO

R. FUENTES. (*)

F. ROMERO. (**)

R E S U M E N

Se exponen aquí algunos resultados preliminares
sobre el funcionamiento de un tubo de Pitot cilíndrico colocado en
un flujo curvo. Las experiencias han permitido cuantificar la in-
fluencia de la curvatura sobre los ángulos tomadas entre la velo-
cidad y el punto de estancamiento, así como sobre el formado entre
el punto de estancamiento y el punto en que la cota piezométrica se
hace igual a la del flujo en ausencia del cilindro en el punto estu-
diado.

(*) Ingeniero Jefe. Laboratorio de Hidráulica. Depto. de Ingeniería
Civil. Universidad de Chile.

(**) Ingeniero Civil Hidráulico. Universidad de Chile.